И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 11 (498)

УДК 514.763

А.Я. СУЛТАНОВ

АФФИННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МНОГООБРАЗИЙ С ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗНОСТЬЮ И АВТОМОРФИЗМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБР

В данной работе показывается, что группа аффинных преобразований многообразия M_n, снабженного линейной связностью ∇ в каждом касательном пространстве $T_{x_0}(M_n)$ к многообразию M_n, индуцирует группу автоморфизмов линейной алгебры $\mathbf{A}$, в которой операции порождаются ковариантными дифференциалами тензорных полей кручения и кривизны связности ∇. Исследование группы автоморфизмов этой алгебры позволяет оценить размерность группы аффинных преобразований в пространстве (M_n, ∇).

1. Аффинные преобразования многообразий с линейной связностью

Пусть M_n — связное, гладкое многообразие класса C^∞, ∇ — линейная связность на нем, $L(M_n)$ — расслоение линейных реперов над M_n. Обозначим через $X^{(0)}$ естественный лифт на $L(M_n)$ векторного поля X, заданного на M_n. Напомним следующее

Определение 1.1. Диффеоморфизм $f : M_n \to M_n$ называется аффинным, если

$$df(\nabla_X Y) = \nabla_{dfX} dfY$$

для любых векторных полей X, Y, заданных на M_n.

В этом определении df означает дифференциал отображения f.

Известно, что множество G всех аффинных преобразований пространства (M_n, ∇) образует группу Ли, размерность которой не больше, чем $n^2 + n$, где n — размерность многообразия M_n ([1], с. 215).

Обозначим через $g(M_n)$ алгебру Ли инфинитезимальных преобразований группы G аффинных преобразований многообразия M_n. Для каждого $X \in g(M_n)$ имеет место равенство

$$L_X \nabla = 0,$$

где L_X — символ производной Ли относительно векторного поля X.

С каждой линейной связностью ассоциированы два естественных тензорных поля: T — тензорное поле кручения и R — тензорное поле кривизны, которые определяются тождествами

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$
$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Пусть K — тензорное поле типа (r,s), где $r = 0$ или 1.

Определение 1.2. Тензорное поле K называется инвариантным относительно диффеоморфизма f, если для произвольных векторных полей $X_1, X_2, \dots, X_s$ на M_n имеет место равенство

$$df(K(X_1, X_2, \dots, X_s)) = K(dfX_1, dfX_2, \dots, dfX_s).$$

Легко проверить, что тензорные поля T и R инвариантны относительно аффинных преобразований пространства (M_n, ∇).

Предложение 1.1. *Если тензорное поле K инвариантно относительно аффинного преобразования (M_n, ∇), то для любого натурального числа m тензорное поле $\nabla^m K$ инвариантно относительно аффинного преобразования f.*

Доказательство этого предложения можно провести индукцией по m.

Пусть x'_0 — произвольная точка расслоения $L(M_n)$, x_0 — ее естественная проекция на M_n.

Предложение 1.2. *Соответствие $h : g(M_n) \to T_{x'_0}(L(M_n))$ по правилу $h(X) = X^{(0)}_{x'_0}$ является инъективным* ([1], с. 219).

Из этого предложения следует, что $\operatorname{Im} h$ имеет размерность, равную размерности группы G аффинных преобразований пространства (M_n, ∇):

$$\dim(\operatorname{Im} h) = \dim G.$$

Рассмотрим в точке $x_0 \in M_n$ значения тензорных полей $\nabla^m T$ и $\nabla^k R$. Полученные тензоры задают в касательном пространстве $T_{x_0}(M_n)$ алгебраические операции, линейные по каждому аргументу. Таким образом, в каждой точке $x_0 \in M_n$ возникает линейная алгебра

$$\mathbf{A} = (T_{x_0}(M_n), T_{x_0}, R_{x_0}, (\nabla^m T)_{x_0}, (\nabla^k R)_{x_0}), \quad m, k \in \mathbf{N}.$$

Группа аффинных преобразований G пространства (M_n, ∇) индуцирует подгруппу автоморфизмов построенной алгебры. Действительно, рассмотрим стационарную подгруппу $G_{x_0} = \{f \mid f \in G \text{ и } f(x_0) = x_0\}$ точки x_0 группы аффинных преобразований. Эта подгруппа порождает группу $H_{x_0} = \{df_{x_0} \mid f \in G_{x_0}\}$ линейных преобразований касательного пространства $T_{x_0}(M_n)$. Группа H_{x_0} называется линейной группой изотропии группы G в точке x_0.

Из предложения 1.1 следует

Предложение 1.3. *Группа H_{x_0} является замкнутой подгруппой в группе Ли автоморфизмов алгебры $\mathbf{A}$ и, следовательно, группой Ли.*

Алгебра Ли g_0 группы H_{x_0} является алгеброй дифференцирований линейной алгебры $\mathbf{A}$, причем $\dim g_0 = \dim H_{x_0}$.

Введем следующие обозначения: $K^{2m} = (\nabla^m T)_{x_0}$, $K^{2m+1} = (\nabla^m R)_{x_0}$. Будем считать, что $\nabla^0 T = T$ и $\nabla^0 R = R$.

Выберем локальную карту (U, x^i) на M_n, область U которой содержит точку x_0. На расслоении $L(M_n)$ построим карту $(\pi^{-1}(U), x^i, x^i_\alpha)$ $(i, \alpha = 1, 2, \ldots, n)$ и зафиксируем точку x'_0 из $L(M_n)$ над точкой x_0. Для каждого инфинитезимального аффинного преобразования $\mathbf{X}$ из $g(M_n)$ имеем

$$X = X^i \partial_i,$$
$$X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^{(0)} + (X^i)_{(\alpha)} \partial_i^{\alpha},$$

где $(X^i)_{(0)}$ — вертикальные лифты функций X^i, $(X^i)_{(\alpha)}$ — α-лифты в расслоении $L(M_n)$, определенные условием $(X^i)_{(\alpha)} = (\partial_j X^i)_{(0)} x^j_\alpha$, где $\|x^j_\alpha\| \in GL(n, \mathbf{R})$.

Если X — инфинитезимальное преобразование из алгебры Ли стационарной подгруппы G_{x_0}, то $X(x_0) = 0$, т. е. $X^i(x_0) = 0$, а эндоморфизм $\varphi : T_{x_0}(M_n) \to T_{x_0}(M_n)$, заданный формулой $\varphi(a) = (\partial_j X^i(x_0)) a^j \partial_i|_{x_0}$ для любого вектора $a \in T_{x_0}(M_n)$, принадлежит алгебре Ли g_0 линейной группы изотропии H_{x_0}, следовательно, является дифференцированием алгебры $\mathbf{A}$. Поэтому

$$\varphi(K^q(a_1, a_2, \ldots, a_{t(q)})) = K^q(\varphi(a_1), a_2, \ldots, a_{t(q)}) + K^q(a_1, \varphi(a_2), \ldots, a_{t(q)}) + K^q(a_1, a_2, \ldots, \varphi(a_{t(q)})).$$

Если в качестве векторов $a_1, a_2, \ldots, a_{t(q)}$ возьмем векторы базиса $\partial_i|_{x_0}$, то получим соотношения $K\big({}^{i}_{j_1 j_2 \ldots j_{t(q)}}\big|{}^{l}_{s}\big) \partial_l X^s(x_0) = 0$, где

$$K\big({}^{i}_{j_1 j_2 \ldots j_{t(q)}}\big|{}^{l}_{s}\big) = \delta^l_{j_1} K^i_{s j_2 \ldots j_{t(q)}} + \cdots + \delta^l_{j_{t(q)}} K^i_{j_1 j_2 \ldots s} - \delta^i_s K^l_{j_1 j_2 \ldots j_{t(q)}}.$$

Таким образом, каждое дифференцирование $\varphi \in g_0$ удовлетворяет системе однородных линейных уравнений

$$K\binom{i}{j_1 j_2 \ldots j_{t(q)}}\Big|{}^{l}_{s}) x_l^s = 0. \tag{1.1}$$

Пусть теперь $\mathbf{X}$ — произвольное инфинитезимальное аффинное преобразование пространства (M_n, ∇). Тогда его координаты X^α удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$L_X(\nabla^m T) = 0,$$
$$L_X(\nabla^k R) = 0.$$

Отсюда получим, что в точке x_0 упорядоченный набор $(X^i(x_0), \partial_j X^i(x_0))$ удовлетворяет системе однородных линейных уравнений

$$(\partial_s K^i_{j_1 j_2 \ldots j_{t(q)}}(x_0)) y^s + K\binom{i}{j_1 j_2 \ldots j_{t(q)}}\Big|{}^{l}_{s}) y_l^s = 0. \tag{1.2}$$

Обозначим через $\overline{M}$ матрицу системы (1.2), а через M — матрицу системы (1.1). Из сказанного выше следует, что M — подматрица матрицы $\overline{M}$, поэтому $\operatorname{rank} \overline{M} \geq \operatorname{rank} M$.

Предложение 1.4. *Если $\rho = \operatorname{rank} \overline{M}$, то $\dim G \leq n^2 + n - \rho$.*

Доказательство. Пространство решений системы (1.2) имеет размерность $n^2 + n - \rho$. Поэтому наибольшее число линейно независимых векторов $X^{(0)}_{x_0'} \in \operatorname{Im} h \subset T_{x_0'}(L(M_n))$ не больше, чем $n^2 + n - \rho$. Это означает, что $\dim(\operatorname{Im} h) \leq n^2 + n - \rho$. Следовательно, $\dim G \leq n^2 + n - \rho$. $\square$

Из доказанного предложения следует

Предложение 1.5. *Если размерность r линейной группы изотропии H_{x_0} удовлетворяет неравенству $r \leq r_1$, то $\dim G \leq n + r_1$.*

Доказательство. Если $r = \dim H_{x_0}$, то $\operatorname{rank} M = n^2 - r$. Отсюда следует, что $\operatorname{rank} \overline{M} \geq n^2 - r_1$. Из предложения 1.4 следует, что $\dim G \leq n^2 + n - \operatorname{rank} \overline{M} \leq n + r_1$. $\square$

Предложение 1.6. *Если группа автоморфизмов линейной алгебры $\mathbf{A} = (T_{x_0}(M_n) K^q)$, $q = 0, 1, \ldots$, имеет размерность ρ, то $\dim G \leq n + \rho$.*

Доказательство. Алгебра g_0 линейной алгебры изотропии H_{x_0} является подалгеброй алгебры Ли дифференцирований алгебры $\mathbf{A}$. Поэтому $\dim H_{x_0} \leq \rho$. Отсюда на основании предложения 1.5 заключаем $\dim G \leq n + \rho$. $\square$

2. Дифференцирования алгебр с антикоммутативным умножением

Пусть $\mathbf{A} = (V, \circ)$ — линейная алгебра над полем действительных чисел, $\dim V = n$, умножение в которой удовлетворяет условию $a \circ b = -b \circ a$ для любых элементов a и b. Для всякого дифференцирования D алгебры $\mathbf{A}$ имеем $D(a \circ b) = (Da) \circ b + a \circ (Db)$.

Пусть выбран базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ алгебры $\mathbf{A}$. Обозначим через C^i_{jk} структурные постоянные алгебры $\mathbf{A}$ и положим $De_i = a_i^j e_j$. Тогда коэффициенты a_i^j удовлетворяют системе линейных уравнений

$$C\binom{i}{jk}\Big|{}^{l}_{s}) x_l^s = 0, \tag{2.1}$$

где $C\binom{i}{jk}\Big|{}^{l}_{s}) = \delta^l_j C^i_{sk} + \delta^l_k C^i_{js} - \delta^i_s C^l_{jk}$.

Выберем некоторую линейную ненулевую форму $\theta : V \to \mathbf{R}$. Умножение в алгебре и выбранная форма θ позволяют построить билинейную антисимметрическую форму $\psi(a, b) = \theta(a \circ b)$.

Обозначим через L_θ ядро линейной формы $\theta : L_\theta = \operatorname{Ker} \theta$, а ограничение билинейной формы ψ на L_θ — через ψ_0. Билинейная форма ψ_0 антисимметрична, поэтому в L_θ можно построить базис, относительно которого ψ_0 будет иметь канонический вид. Этот базис можно дополнить до базиса алгебры $\mathbf{A}$. Так как $\dim L_\theta = n-1$, то достаточно к базисным векторам пространства L_θ добавить один вектор. Будем считать, что в базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ алгебры $\mathbf{A}$ векторы $e_1, e_2, \ldots, e_{n-1}$ составляют базис пространства L_θ, относительно которого форма ψ_0 имеет канонический вид, а вектор e_n удовлетворяет условию $\theta(e_n) = 1$.

Пусть $2r$ — ранг билинейной формы ψ_0. Тогда относительно выбранного базиса будем иметь $\psi_0(e_{2s-1}, e_{2s}) = -\psi_0(e_{2s}, e_{2s-1}) = 1$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$, $\psi_0(e_i, e_j) = 0$ в остальных случаях. Отсюда следует, что структурные постоянные C^n_{jk} будут удовлетворять соотношениям $C^n_{2s-1\;2s} = -C^n_{2s\;2s-1} = 1$, $C^n_{ab} = 0$ $(a, b < n)$ в остальных случаях.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{C}$, составленную из коэффициентов при переменных

$$x^{j'}_n \ (j' < n),\ x^{2s-1}_{\alpha_s},\ x^{2s}_{\alpha_s},\ x^{2s}_{2s} \quad (s = 1, 2, \ldots, r;\quad \alpha_s = 2s+1, \ldots, n-1)$$

в уравнениях системы (2.1), соответствующих индексам

$$\begin{aligned} &\binom{h'}{1 2},\quad \binom{n}{\beta_t\ 2t} \quad (t = 1, 2, \ldots, r;\quad \beta_t = 2t+1, \ldots, n-1),\\ &\binom{n}{2t-1\ \beta_t},\quad \binom{n}{2l-1\ 2l} \quad (l = 1, 2, \ldots, r). \end{aligned}$$

Для коэффициентов, входящих в первую серию уравнений, будем иметь $C\left(\binom{h'}{1\ 2}\Big|\binom{h}{j'}\right) = -\delta^{h'}_{j'} C^h_{1\,2} = -\delta^{h'}_{j'}$. Для коэффициентов следующих серий уравнений получим

$$\begin{aligned} &C\left(\binom{n}{\beta_t\ 2t}\Big|\binom{n}{j'}\right) = 0, \quad C\left(\binom{n}{\beta_t\ 2t}\Big|\binom{a_s}{2s-1}\right) = \delta^{a_s}_{\beta_t} C^n_{2s-1\ 2t} + \delta^{a_s}_{2t} C^n_{\beta_t\ 2s-1} = \delta^{a_s}_{\beta_t}\delta^s_t,\\ &C\left(\binom{n}{\beta_t\ 2t}\Big|\binom{\alpha_s}{2s}\right) = \delta^{\alpha_s}_{2t} C^n_{\beta_t\ 2s} = 0,\\ &C\left(\binom{n}{2t-1\ \beta_t}\Big|\binom{n}{j'}\right) = 0, \quad C\left(\binom{n}{2t-1\,\beta_t}\Big|\binom{\alpha_s}{2s-1}\right) = \delta^{\alpha_s}_{2t-1} C^n_{2s-1\ \beta_t} = 0,\\ &C\left(\binom{n}{2t-1\ \beta_t}\Big|\binom{\alpha_s}{2s}\right) = \delta^{\alpha_s}_{\beta_t} C^n_{2t-1\ 2s} + \delta^{\alpha_s}_{2t-1} C^n_{2s\ \beta_t} = \delta^{\alpha_s}_{\beta_t}\delta^s_t,\\ &C\left(\binom{n}{2l-1\ 2l}\Big|\binom{n}{j'}\right) = 0, \quad C\left(\binom{n}{2l-1\ 2l}\Big|\binom{\alpha_s}{2s-1}\right) = \delta^{\alpha_s}_{2l-1} C^n_{2s-1\ 2l} = 0,\\ &C\left(\binom{n}{2l-1\ 2l}\Big|\binom{\alpha_s}{2s}\right) = \delta^{\alpha_s}_{2l} C^n_{2l-1\ 2s} = 0, \quad C\left(\binom{n}{2l-1\ 2l}\Big|\binom{2s}{2s}\right) = \delta^s_l C^n_{2l-1\ 2s} = \delta^s_l. \end{aligned}$$

Из полученных соотношений следует, что матрица $\mathbf{C}$ имеет следующее строение:

$$\begin{pmatrix} -E_{n-1} & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & E_{2(n-3)} & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & E_{2(n-5)} & \cdots & * & * \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E_{2(n-(2r+1))} & * \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & E_r \end{pmatrix},$$

где E_p — единичная матрица порядка p. Таким образом,

$$\operatorname{rank}\mathbf{C} = n - 1 + 2(n-3) + (n-5) + \cdots + (n - (2r+1)) + r = n - 1 + r(2n - 2r - 3).$$

Отсюда следует

Предложение 2.1. *Если ранг билинейной формы $\psi_0(a, b) = \theta(a \circ b)$ равен $2r$, то размерность алгебры дифференцирований линейной алгебры* $\mathbf{A}$ *с антикоммутативным умножением не больше, чем $n^2 - r(2n - 2r - 3) - n + 1$.*

Следствием доказанного предложения является

Предложение 2.2. *Размерность алгебры дифференцирований линейной алгебры* $\mathbf{A}$ *с антикоммутативным умножением не больше, чем $n^2 - 3n + 6$.*

Из доказанных предложений 2.1 и 1.6 следует

Теорема 2.1. *Пусть* (M_n, ∇) — *пространство с линейной связностью и* T — *тензорное поле кручения связности* ∇. *Если в точке* $x_0 \in M_n$ *ранг ограничения билинейной формы* $(\theta \circ T)_{x_0}$ *на подпространство* $L_\theta = \operatorname{Ker}\theta$ *равен* $2r$, *то размерность группы аффинных преобразований этого пространства не больше, чем* $n^2 - r(2n - 2r - 3) + 1$.

Из теоремы 2.1 при $r = 1$ получается

Теорема 2.2 ([2]). *Если ограничение билинейной формы* $(\theta \circ T)_{x_0}$ *на подпространство* $L_\theta = \operatorname{Ker}\theta$ *ненулевое, то размерность группы аффинных преобразований пространства* (M_n, ∇) *не больше, чем* $n^2 - 2n + 6$.

Литература

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 1. – М.: Наука, 1981. – 344 с.
2. Егоров И.П. *Движения в пространствах аффинной связности* // Движения в пространствах аффинной связности / Учен. зап. Пензенск. пед. ин-та. – Казань: Изд-во. Казанск. ун-та, 1965, – С. 5–179.

Пензенский государственный педагогический университет

Поступила 07.12.2002