ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 11 (474)

УДК 517.95

К.Б. САБИТОВ, Р.Г. ИДРИСОВ

ЗАДАЧА ГЕЛЛЕРСТЕДТА ДЛЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$L\mathbf{U} \equiv K(y)\mathbf{U}_{xx} + \mathbf{U}_{yy} + A(x,y)\mathbf{U}_x + B(x,y)\mathbf{U}_y + C(x,y)\mathbf{U} = 0, \tag{1}$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A(x,y)$, $B(x,y)$ — заданные числовые функции, $C(x,y) = (C_{ik}(x,y))$, $i,k = \overline{1,n}$, — квадратная матрица, $\mathbf{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $n \geq 2$, в области D, ограниченной простой кривой Жордана Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A_1(a_1, 0)$ и $A_2(a_2, 0)$, $a_1 < a_2$, характеристиками A_1C_1, C_1E, EC_2, C_2A_2 системы (1) при $y < 0$, где $E(e, 0)$, $a_1 < e < a_2$, $C_1(\frac{a_1+e}{2}, y_{c_1})$, $y_{c_1} < 0$ и $C_2(\frac{a_2+e}{2}, y_{c_2})$, $y_{c_2} < 0$.

Обозначим $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_1 = D \cap \{y < 0 \wedge x < e\}$ и $D_2 = D \cap \{y < 0 \wedge x > e\}$. В дальнейшем будем предполагать, что

$$K(y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C(\overline{D_i}) \wedge C^2(\overline{D_i} \setminus \overline{EA_i}), \quad C_{jk}(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C(\overline{D_i}), \;\; j,k = \overline{1,n},$$
$$A(x,y), B(x,y) \in C^1(\overline{D}_+) \wedge C(\overline{D_i}) \wedge C^1(\overline{D_i} \setminus \overline{EA_i}), \quad i = 1,2.$$

Для системы (1) в области D рассмотрим задачу Геллерстедта (задачу G).

Задача G. Найти функцию $\mathbf{U}(x,y)$, удовлетворяющую условиям

$$\mathbf{U}(x,y) \in C(\overline{D}) \wedge C^1(D) \wedge C^2(D_+ \cup D_1 \cup D_2), \tag{2}$$

$$L\mathbf{U}(x,y) \equiv 0, \quad (x,y) \in D_+ \cup D_1 \cup D_2, \tag{3}$$

$$\mathbf{U}(x,y) = \Phi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{\Gamma}, \tag{4}$$

$$\mathbf{U}(x,y) = \Psi(x,y), \quad (x,y) \in \overline{A_1C_1} \cup \overline{A_2C_2}, \tag{5}$$

где Φ, Ψ — заданные достаточно гладкие вектор-функции, причем $\Phi(A_1) = \Psi(A_1)$ и $\Phi(A_2) = \Psi(A_2)$.

В данной работе установлены экстремальные свойства модуля

$$|\mathbf{U}(x,y)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2(x,y)}$$

решений задачи Геллерстедта для системы (1) в областях эллиптичности, гиперболичности и в целом в смешанной области D, и приводятся применения этих свойств при исследовании задачи G.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 99-01–00934.

В [1] были получены экстремальные свойства модуля решений задачи T для системы (1), когда $K(y) = y$, $A(x,y) = B(x,y) \equiv 0$, $(C_{ik}(x,y))$, $i,k = \overline{1,n}$, $n \geq 2$, — отрицательно-определенная матрица, компоненты которой в области эллиптичности удовлетворяют условиям

$$(n-1)(C_{ik}(x,y) + C_{ki}(x,y)) \leq 2(C_{ii}(x,y)C_{kk}(x,y))^{1/2}, \quad i \neq k,$$

а в гиперболической области достаточно малы, и доказана единственность решения. Если граничные функции достаточно гладкие и кривая Γ оканчивается ортогонально к оси Ox или сколь угодно малыми дугами "нормальной" кривой системы (1), на основе теоремы единственности методом интегральных уравнений получена теорема существования решения задачи T. В [2]-[4] при некоторых ограничениях на кривую Γ, при условии, что матрицы A, B и C достаточно малы, доказана однозначная разрешимость задачи T в пространстве $W_2^1(D)$. В данной работе эти ограничения сняты. Отметим, что в [5]–[8] задачи Геллерстедта и Трикоми исследованы для систем уравнений смешанного типа первого порядка. Аналог задачи Трикоми для системы высшего порядка изучен в [9].

Некоторые экстремальные свойства модуля решений системы (1) установлены в [10], [11].

2. Экстремальные свойства модуля решений в области эллиптичности

Лемма 1. *Пусть* 1) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (1) *непрерывны и ограничены,* $C(x,y)$ *— неположительно определенная матрица;* 2) $\mathbf{U}(x,y) \in C^2(D_+)$. *Тогда модуль* $|\mathbf{U}(x,y)|$ *решения* $\mathbf{U}(x,y)$ *системы* (1), *отличного от постоянного, не может достигать локального максимума ни в одной точке области* D_+.

Лемма 2. *Пусть* 1) *в области* D_+ *коэффициенты системы* (1) *ограничены и* $C(x,y)$ *— неположительно определенная матрица;* 2) $\mathbf{U}(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^1(D_+ \cup A_1E \cup EA_2) \wedge C^2(D_+)$; 3) $\max\limits_{D_+} |\mathbf{U}(x,y)| = |\mathbf{U}(Q)| > 0$. *Тогда, если* $Q = (x_0, 0)$, $a_1 < x_0 < a_2$, $x_0 \neq e$, *то*

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{\partial |\mathbf{U}(x_0,y)|}{\partial y} < 0.$$

Доказательство лемм 1, 2 приведено в [10], [11].

Лемма 3. *Пусть* 1) *выполнены условия* 1)–3) *леммы* 2; 2) *функция* $|\mathbf{U}(x,y)|$ *имеет изолированный положительный максимум* $|\mathbf{U}(Q)|$ *в точке* E; 3) *в малой окрестности точки* E: а) *функция* $K(y)\mathbf{U}_x^2 + \mathbf{U}_y^2$ *суммируема;* б) *производные* A_x *и* B_y *непрерывны вплоть до границы;* в) $2(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) - A_x - B_y \leq 0$, $B(x,0) \geq 0$. *Тогда в любой выколотой окрестности* $\overset{\circ}{U} \subset A_1A_2$ *точки* E *найдется точка* $Q_1 = (x_1, 0) \in \overset{\circ}{U}$ *такая, что*

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{\partial |\mathbf{U}(x_1,y)|}{\partial y} < 0. \tag{6}$$

Доказательство. В силу леммы 1 модуль $|\mathbf{U}(x,y)|$ решения системы (1), отличного от постоянного, не может достигать максимума в области D_+. Пусть точка $Q = E$, т. е. $|\mathbf{U}(Q)| \equiv |\mathbf{U}(E)|$. Допустим, что существует выколотая окрестность $\overset{\circ}{U}_1$ точки E такая, что для всех $P(x,0) \in \overset{\circ}{U}_1 \cap A_1A_2$

$$\lim_{y \to 0+0} \frac{\partial |\mathbf{U}(x,y)|}{\partial y} \geq 0.$$

В области D_+ введем вектор $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $e_i = u_i/|\mathbf{U}|$. Тогда $\mathbf{U} = |\mathbf{U}|\mathbf{e}$ и система (1) принимает вид

$$L\mathbf{U} = L(|\mathbf{U}|\mathbf{e}) = K(y)|\mathbf{U}|_{xx}\mathbf{e} + |\mathbf{U}|_{yy}\mathbf{e} + |\mathbf{U}|_x(2K\mathbf{e}_x + A\mathbf{e}) + |\mathbf{U}|_y(2K\mathbf{e}_y + B\mathbf{e}) + |\mathbf{U}|L\mathbf{e} = 0. \tag{7}$$

Полученное векторное уравнение (7) умножим на вектор $\mathbf{e}$ скалярно. Тогда получим эллиптическое в D_+ уравнение относительно модуля $|\mathbf{U}(x,y)|$

$$M(|\mathbf{U}|) = (\mathbf{e}, L\mathbf{U}) = K(y)|\mathbf{U}|_{xx} + |\mathbf{U}|_{yy} + A|\mathbf{U}|_x + B|\mathbf{U}|_y + (\mathbf{e}, L\mathbf{e})|\mathbf{U}| = 0,$$

при этом $(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) \le 0$. В самом деле,

$$\begin{aligned}(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) = K(y)(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{xx}) + (\mathbf{e}, \mathbf{e}_{yy}) + A(\mathbf{e}, \mathbf{e}_x) + B(\mathbf{e}, \mathbf{e}_y) + (\mathbf{e}, C\mathbf{e}) =\\ = K(y)(\mathbf{e}, \mathbf{e}_{xx}) + (\mathbf{e}, \mathbf{e}_{yy}) + (\mathbf{e}, C\mathbf{e}) =\\ = -K(y)(|\mathbf{U}|^{-4}[|\mathbf{U}|^2|\mathbf{U}_x|^2 - (\mathbf{U}, \mathbf{U}_x)^2]) - |\mathbf{U}|^{-4}[|\mathbf{U}|^2|\mathbf{U}_y|^2 - (\mathbf{U}, \mathbf{U}_y)^2] + (\mathbf{e}, C\mathbf{e}) \le 0,\end{aligned}$$

т. к. $(\mathbf{e}, C\mathbf{e}) \le 0$ и $|(\mathbf{U}, \mathbf{U}_p)| \le |\mathbf{U}|\,|\mathbf{U}_p|$, $p \in \{x, y\}$.

Пусть $r \in (0, |\mathbf{U}(Q)|)$. Число r возьмем настолько близким к числу $|\mathbf{U}(Q)|$, чтобы кривая γ, составленная из линии уровня $|\mathbf{U}(x,y)| = r$, целиком лежала в U_1 и для всех точек (x,y), принадлежащих области G, ограниченной кривой γ и отрезком A_1A_2, $|\mathbf{U}(x,y)| \ge r$. Поскольку функция $\mathbf{U}$ является в области D_+ решением эллиптического уравнения $M(|\mathbf{U}|) = 0$, то в силу теоремы о представлении решений эллиптических уравнений ([12], гл. 6) следует существование такой кривой γ. Причем, не теряя общности рассуждений, можно считать, что кривая γ является спрямляемой [13]. Обозначим через B_1 и B_2 точки пересечения кривой γ с отрезком A_1A_2. В области G рассмотрим функцию $v(x,y) = |\mathbf{U}(x,y)| - r$, которая является решением эллиптического уравнения

$$Lv = K(y)v_{xx} + v_{yy} + Av_x + Bv_y + (\mathbf{e}, L\mathbf{e})v = -r(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) \ge 0 \tag{8}$$

и удовлетворяет граничным условиям

$$v(x,y) = 0, \quad (x,y) \in \gamma, \tag{9}$$

$$\frac{\partial v(x, 0+0)}{\partial y} \ge 0, \quad x \in B_1E \cup EB_2. \tag{10}$$

Интегрируя тождество $2vLv = (2Kvv_x + Av^2)_x + (2vv_y + Bv^2)_y - 2(Kv_x^2 + v_y^2) + v^2(2(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) - A_x - B_y)$ по области G с учетом условий (8), (9), получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{B_1E} [2v(x,0)v_y(x,0) + B(x,0)v^2(x,0)]\,dx + \int\limits_{EB_2} [2v(x,0)v_y(x,0) + B(x,0)v^2(x,0)]\,dx +\\ + \iint\limits_G [2(K(y)v_x^2 + v_y^2) - (2(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) - A_x - B_y)v^2]dx\,dy - 2r\iint\limits_G (\mathbf{e}, L\mathbf{e})\,v\,dx\,dy = 0.\end{aligned} \tag{11}$$

Из равенства (11) в силу наложенных на коэффициенты условий и неравенства (10) следует, что $v(x,y) \equiv 0$ в $\overline{G}$, т. е. $|\mathbf{U}(x,y)| \equiv \mathrm{const}$ в $\overline{G}$, что противоречит условию изолированности максимума в точке E. Следовательно, в любой окрестности $\mathring{U} \subset A_1A_2$ точки E существует точка $Q_1 \in \mathring{U}$ такая, что справедливо неравенство (6). $\square$

Выясним, насколько существенно условие $(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) \le 0$ для лемм 1–3. Рассмотрим в квадрате $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y < \pi/k,\ k > 0\}$ систему, записанную по компонентам искомого решения $\mathbf{U} = (u_1, u_2)$,

$$\begin{aligned}u_{1xx} + u_{1yy} + k^2u_1 + k^2u_2 = 0,\\ u_{2xx} + u_{2yy} + k^2u_1 + k^2u_2 = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

Для этой системы

$$(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) = (\mathbf{e}, C\mathbf{e}) - |\mathbf{U}|^{-4}\sum_{p=1}^{2}\left[|\mathbf{U}|^2|\mathbf{U}_p|^2 - (\mathbf{U}, \mathbf{U}_p)^2\right]. \tag{13}$$

Система (12) имеет решение $u_1(x,y) = u_2(x,y) = \sin kx \sin ky$. Легко видеть, что модуль $|\mathbf{U}(x,y)| = \sqrt{2}\sin kx \sin ky$ достигает своего наибольшего положительного значения в $\overline{D}$ в точке $(\pi/2k, \pi/2k) \in D$. На найденных решениях u_1 и u_2 соотношение (13) имеет вид

$$(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) = (\mathbf{e}, C\mathbf{e}) = k^2(e_1+e_2)^2 = 2k^2 > 0.$$

Следовательно, нарушение условия $(\mathbf{e}, L\mathbf{e}) \le 0$ существенно влияет на справедливость лемм 1–3.

3. Экстремальные свойства модуля решений в области гиперболичности

В областях D_1 и D_2 перейдем в характеристические координаты (ξ, η)

$$\xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt, \quad \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)}dt.$$

Тогда система (1) примет вид

$$L_0\mathbf{U} \equiv \mathbf{U}_{\xi\eta} + a\mathbf{U}_\xi + b\mathbf{U}_\eta + c\mathbf{U} = 0, \tag{14}$$

где

$$a(\xi,\eta) = \frac{1}{4K}\left(A + B\sqrt{-K} - \frac{K'}{2\sqrt{-K}}\right), \quad c(\xi,\eta) = \frac{C}{4K},$$
$$b(\xi,\eta) = \frac{1}{4K}\left(A - B\sqrt{-K} + \frac{K'}{2\sqrt{-K}}\right).$$

Область D_1 отобразится в область Δ_1, ограниченную отрезками $A_1E(\eta = \xi)$, $EC_1(\eta = e)$ и $C_1A_1(\xi = a_1)$, а область D_2 — в область Δ_2, ограниченную отрезками $EA_2(\eta = \xi)$, $A_2C_2(\eta = a_2)$ и $C_2E(\xi = e)$. При этом за образами точек E, A_1, A_2, C_1 и C_2 оставлены те же обозначения прообразов.

Пусть $\alpha = a\beta$, $\beta = \exp(\int b\,d\xi)$, $\alpha^* = b\beta^*$, $\beta^* = \exp(\int a\,d\eta)$, $h_i = a_\xi + ab - c_{ii}$, $h_i^* = b_\eta + ab - c_{ii}$. Функции $a(\xi,\eta)$, $a_\xi(\xi,\eta)$, $b(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\overline{\Delta}_1$, кроме, быть может, отрезка $\overline{A_1E}$, и удовлетворяют одному из условий

$$(A_1) \qquad \alpha(\xi,\eta) - \int_{a_1}^{\xi}\left(|\alpha_t| + \beta\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2}\right)dt > 0, \quad a_1 < \xi < \eta \le e,$$

$$(B_1) \qquad \alpha(\xi,\eta) - \int_{a_1}^{\xi}\beta\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(h_i^2 + \sum_{k\ne i}^{n} c_{ik}^2\right)}dt > 0, \quad a_1 < \xi < \eta \le e.$$

Функции $b(\xi,\eta)$, $b_\eta(\xi,\eta)$, $a(\xi,\eta)$, $c(\xi,\eta)$ непрерывны в $\overline{\Delta}_2$, кроме, быть может, отрезка $\overline{EA_2}$, и удовлетворяют одному из условий

$$(A_2) \qquad \alpha^*(\xi,\eta) + \int_{\eta}^{a_2}\left(|\alpha_t^*| + \beta^*\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n} c_{ik}^2}\right)dt < 0, \quad e \le \xi < \eta < a_2,$$

$$(B_2) \qquad \alpha^*(\xi,\eta) + \int_{\eta}^{a_2}\beta^*\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(h_i^{*2} + \sum_{k\ne i}^{n} c_{ik}^2\right)}dt < 0, \quad e \le \xi < \eta < a_2.$$

Определение 1. *Регулярным* в Δ_i, $i = 1, 2$, решением системы (14) назовем функцию $\mathbf{U}(\xi,\eta)$, удовлетворяющую условиям 1) $\mathbf{U}(\xi,\eta) \in C(\overline{\Delta}_i) \wedge C^1(\Delta_i)$, $\mathbf{U}_{\xi\eta} \in C(\Delta_i)$; 2) $L_0\mathbf{U}(\xi,\eta) \equiv 0$, $(\xi,\eta) \in \Delta_i$; 3) производная $\mathbf{U}_\eta$ $(\mathbf{U}_\xi)$ непрерывна на $\overline{\Delta}_1 \setminus \overline{A_1E}$ $(\overline{\Delta}_2 \setminus \overline{A_2E})$.

Лемма 4. *Пусть* 1) *коэффициенты системы* (14) *в области* Δ_i, $i = 1, 2$, *обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию* (A_i) *или* (B_i); 2) $\mathbf{U}(\xi, \eta)$ — *регулярное в* Δ_i *решение системы* (14), *равное нулю на характеристике* A_iC_i; 3) $\max\limits_{\overline{\Delta}_i} |\mathbf{U}(\xi, \eta)| = |\mathbf{U}(Q)| > 0$. *Тогда максимум* $|\mathbf{U}(Q)|$ *достигается только на отрезке* $\overline{A_iE} \setminus A_i$.

Доказательство леммы проводится аналогично [10], [11].

Следствие 1. Если

$$\alpha(\xi, \eta) - \int_{a_1}^{\xi} \beta(t, \eta) \sum_{i=1}^{n} \Big(|h_i| + \sum_{k \neq i}^{n} |c_{ik}| \Big) dt > 0, \quad a_1 < \xi < \eta \leq e, \tag{15}$$

и

$$\alpha^*(\xi, \eta) + \int_{\eta}^{a_2} \beta^*(t, \eta) \sum_{i=1}^{n} \Big(|h_i^*| + \sum_{k \neq i}^{n} |c_{ik}| \Big) dt < 0, \quad e \leq \xi < \eta < a_2,$$

то для системы (14) справедлива лемма 4.

Действительно, пусть выполнено неравенство (15). Тогда

$$\alpha(\xi, \eta) - \int_{a_1}^{\xi} \beta(t, \eta) \Big[\sum_{i=1}^{n} \Big(h_i^2 + \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2 \Big) \Big]^{\frac{1}{2}} dt \geq \alpha(\xi, \eta) - \int_{a_1}^{\xi} \beta(t, \eta) \sum_{i=1}^{n} \Big(|h_i| + \sum_{k \neq i}^{n} |c_{ik}| \Big) dt > 0,$$

что влечет справедливость леммы 4.

Следствие 2. Если

$$\begin{gathered} h_i = a_\xi + ab - c_{ii} = a_\xi + ab - c_0 = h, \\ \alpha(\xi, \eta) - \int_{a_1}^{\xi} \beta \left(|h| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2} \right) dt > 0, \quad a_1 < \xi < \eta \leq e, \end{gathered} \tag{16}$$

и

$$\begin{gathered} h_i^* = b_\eta + ab - c_{ii} = b_\eta + ab - c_0 = h^*, \\ \alpha^*(\xi, \eta) + \int_{\eta}^{a_2} \beta^* \left(|h^*| + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2} \right) dt < 0, \quad e \leq \xi < \eta < a_2, \end{gathered} \tag{17}$$

то лемма 4 также справедлива.

Замечание 1. Если в (16), (17) $h \geq 0$ в области Δ_1, $h^* \geq 0$ в области Δ_2, то неравенства в этих условиях равносильны соответственно следующим:

$$\alpha(a_1, \eta) + \int_{a_1}^{\xi} \beta \left(c_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2} \right) dt > 0, \quad a_1 < \xi < \eta \leq e,$$

$$\alpha^*(\xi, a_2) - \int_{\eta}^{a_2} \beta^* \left(c_0 - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{k \neq i}^{n} c_{ik}^2} \right) dt < 0, \quad e \leq \xi < \eta < a_2.$$

4. Экстремальные свойства модуля решений в смешанной области

Определение 2. *Регулярным* в D решением системы (1) назовем функцию $\mathbf{U}(x,y)$, удовлетворяющую условиям (2), (3) и, кроме того, производная $\mathbf{U}_\eta$ ($\mathbf{U}_\xi$) непрерывна на множестве $\overline{D}_1 \setminus \overline{A_1E}$ ($\overline{D}_2 \setminus \overline{A_2E}$).

Теорема 1. *Пусть* 1) $C(x,y)$ *— неположительно определенная матрица в* D_+; 2) *выполнено условие* 3) *леммы* 3; 3) *коэффициенты системы* (1) *в областях* D_1 *и* D_2 *в характеристических координатах* (ξ,η) *удовлетворяют соответственно условиям* (A_1) *и* (A_2) *или* (B_1) *и* (B_2); 4) $\mathbf{U}(x,y)$ *—- регулярное в* D *решение системы* (1), *равное нулю на характеристиках* A_1C_1 *и* A_2C_2; 5) $\max\limits_{\overline{D}}|\mathbf{U}(x,y)| = |\mathbf{U}(Q)| > 0$. *Тогда максимум* $|\mathbf{U}(Q)|$ *достигается только на кривой* Γ.

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}}|\mathbf{U}(x,y)| = |\mathbf{U}(Q)| > 0$. Поскольку выполнены условия леммы 4, то точка $Q \in \overline{D}_+$. В силу леммы 1 точка $Q \notin D_+$. Тогда $Q \in \Gamma \cup A_1E \cup EA_2 \cup E$. Пусть $Q \in A_1E$, т. е. $Q = (x_0, 0)$, $a_1 < x_0 < e$. В этой точке из леммы 4 следует, что $\partial|\mathbf{U}(x_0, 0-0)|/\partial y \geq 0$, а это согласно лемме 2 противоречит неравенству $\partial|\mathbf{U}(x_0, 0+0)|/\partial y < 0$. Если точка $Q \in EA_2$, то, рассуждая аналогично, получим противоречие. Следовательно, $Q \in \Gamma \cup E$. Допустим, что $Q \notin \Gamma$. Тогда $Q \equiv E$. В этом случае E является единственной точкой изолированного глобального положительного максимума функции $|\mathbf{U}(x,y)|$. Линии уровня $|\mathbf{U}(x,y)| = r$ функции $|\mathbf{U}(x,y)|$, где $r \in (0, |\mathbf{U}(Q)|)$, в малой окрестности точки E будут располагаться в области D_+ в виде концентрических линий вокруг точки E с концами на $A_1E \cup EA_2$. Докажем это. Допустим противное, т. е. в малой окрестности точки E на оси $y = 0$ существуют точки x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2 < e$ и $|\mathbf{U}(x_1, 0)| = |\mathbf{U}(x_2, 0)|$. Тогда возможна линия уровня $|\mathbf{U}(x,y)| = |\mathbf{U}(x_2, 0)| = d > 0$. Функция $|\mathbf{U}(x, 0)|$ в некоторой точке $x_0 \in (x_1, x_2)$ имеет положительный максимум $|\mathbf{U}(x_0, 0)| = \max\limits_{x_1 \leq x \leq x_2}|\mathbf{U}(x, 0)|$. Пусть G_+ — область, ограниченная отрезком E_1E_2 оси $y = 0$, $E_1 = (x_1, 0)$, $E_2 = (x_2, 0)$ и линией уровня $|\mathbf{U}(x,y)| = d$, такая, что $|\mathbf{U}(x,y)| \geq d$ при всех $(x,y) \in \overline{G}_+$. В силу принципа экстремума для эллиптических уравнений $\max\limits_{\overline{G}_+}|\mathbf{U}(x,y)| = |\mathbf{U}(x_0, 0)|$. Далее из точки E_2 проведем характеристику системы (1) до пересечения с характеристикой A_1C_1 в точке C и рассмотрим область G_-, ограниченную линиями A_1C, CE_2 и E_2A_1. По лемме 4 $\max\limits_{\overline{G}_-}|\mathbf{U}(x,y)| > 0$ достигается на отрезке $\overline{A_1E_2}$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что этот макмимум достигается в точке $(x_0, 0)$. Тогда $\partial|\mathbf{U}(x_0, 0+0)|/\partial y < 0$ по лемме 2, а с другой стороны, $\partial|\mathbf{U}(x_0, 0-0)|/\partial y \geq 0$ на основании леммы 4. Из полученного противоречия следует, что в малой окрестности точки E функция $|\mathbf{U}(x, 0)|$ при $x \to e$ монотонно возрастает к значению $|\mathbf{U}(Q)|$.

Пусть $[b_1, e)$, где $a_1 \leq b_1 < e$, промежуток оси $y = 0$, где $|\mathbf{U}(x, 0)|$ возрастает при $x \to e - 0$. Покажем, что $\partial|\mathbf{U}(x, 0)|/\partial y \geq 0$ при всех $x \in [b_1, e)$. Пусть ξ — любая точка из $[b_1, e)$. Из точки $K = (\xi, 0)$ опустим перпендикуляр с концом в точке $N \in D_1$, через точку N проведем характеристику системы (1) до пересечения с характеристикой A_1C_1 в точке M. Обозначим через H область, ограниченную характеристиками NM, MA_1 и отрезками A_1K, KN. Аналогично лемме 4 можно показать, что $\max\limits_{\overline{H}}|\mathbf{U}(x,y)| > 0$ достигается только на отрезке $\overline{A_1K}$, а именно, — в точке K. Тогда в этой точке $\partial|\mathbf{U}(\xi, 0-0)|/\partial y \geq 0$. Следовательно, $\partial|\mathbf{U}(x, 0-0)|/\partial y = \partial|\mathbf{U}(x, 0+0)|/\partial y \geq 0$ на $[b_1, e)$ в силу произвольности точки $\xi \in [b_1, e)$. Аналогично показывается, что существует отрезок $(e, b_2]$, где $e < b_2 < a_2$, такой, что $\partial|\mathbf{U}(x, 0-0)|/\partial y \geq 0$ при всех $x \in (e, b_2]$. Тогда $\partial|\mathbf{U}(x, 0-0)|/\partial y = \partial|\mathbf{U}(x, 0+0)|/\partial y \geq 0$ при всех $x \in (b_1, e) \cup (e, b_2)$. С другой стороны, в силу леммы 2 на (b_1, e) или на (e, b_2) найдется точка x_1 такая, что $\partial|\mathbf{U}(x_1, 0)|/\partial y < 0$, а это противоречит неравенству $\partial|\mathbf{U}(x, 0)|/\partial y \geq 0$ на $[b_1, e) \cup (e, b_2]$. Следовательно, максимум не достигается в точке E и точка $Q \in \Gamma$.

Следствие 3. а) Если выполнены условия теоремы 1, то $|\mathbf{U}(x,y)| \leq \max\limits_{\overline{\Gamma}}|\mathbf{U}(x,y)|$ для всех $(x,y)\in\overline{D}$.

б) Если коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям теоремы 1 и в классе регулярных в D решений системы (1) существует решение задачи G, то оно единственно.

Определение 3. *Обобщенным* в области D решением системы (1) назовем функцию $\mathbf{U}(x,y)$, если существует последовательность регулярных в области D решений $\{\mathbf{U}_p(x,y)\}$ системы (1), равномерно сходящаяся к $\mathbf{U}(x,y)$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1) *и* 2) *теоремы* 1 *и* $\mathbf{U}(x,y)$ *— обобщенное в области D решение системы* (1), *равное нулю на характеристиках A_1C_1, A_2C_2. Тогда если $\max\limits_{\overline{D}}|\mathbf{U}(x,y)|>0$, то этот максимум достигается на кривой $\overline{\Gamma}$.*

Доказательство. Пусть $\max\limits_{\overline{D}}|\mathbf{U}(x,y)|=|\mathbf{U}(Q)|=M>0$ и $Q\notin\overline{\Gamma}$. Тогда $Q\in\overline{D}\backslash\overline{\Gamma}$. Положим $E=\{(x,y)\in\overline{D}\setminus\overline{\Gamma}\,\big|\,|\mathbf{U}(x,y)|=M\}$. Множество E замкнуто и не имеет общих точек с кривой $\overline{\Gamma}$. Поскольку множества $\overline{\Gamma}$ и E замкнуты, ограничены и не имеют общих точек, то расстояние между ними больше нуля. Поэтому существует простая кривая σ, лежащая в области D_+, с концами в точках A_1 и A_2 такая, что $\overline{\sigma}\cap E=\emptyset$ и $E\subset D_\sigma$, где D_σ — область, ограниченная кривой σ и характеристиками системы (1). Так как $\mathbf{U}(x,y)$ — обобщенное решение системы (1), равное нулю на $A_1C_1\cup A_2C_2$, то существует последовательность регулярных в D решений $\{\mathbf{U}_p(x,y)\}=\{(u_1^p,u_2^p,\dots,u_n^p)\}$ системы (1) таких, что $\mathbf{U}_p(x,y)=0$ на $\overline{A_1C_1}\cup\overline{A_2C_2}$ и $\{\mathbf{U}_p(x,y)\}$ в $\overline{D}$ равномерно сходится к $\mathbf{U}(x,y)$. Поскольку в области D_σ выполнены условия теоремы 1, то $\max\limits_{\overline{D}_\sigma}|\mathbf{U}_p(x,y)|$ достигается на кривой $\overline{\sigma}$.

Пусть $\max\limits_{\overline{\sigma}}|\mathbf{U}(x,y)|=M_0$. Ясно, что $M_0<M$. Обозначим $\varepsilon=(M-M_0)/2$. В силу равномерной сходимости последовательности $\{\mathbf{U}_p(x,y)\}$ в $\overline{D}_\sigma$ для взятого $\varepsilon>0$ существует такой номер p_0, что для всех $p>p_0$, и $(x,y)\in\overline{D_\sigma}$ выполняется условие

$$|\mathbf{U}(x,y)|-\varepsilon<|\mathbf{U}_p(x,y)|<|\mathbf{U}(x,y)|+\varepsilon.$$

Отсюда $\max\limits_{\overline{D}_\sigma}|\mathbf{U}_p(x,y)|>(M+M_0)/2$ при $p>p_0$ на E, а $|\mathbf{U}_p(x,y)|<(M+M_0)/2$ при $p>p_0$ на кривой $\overline{\sigma}$. Следовательно, $\max\limits_{\overline{D}_\sigma}|\mathbf{U}_p(x,y)|$ при $p>p_0$ не достигается на кривой $\overline{\sigma}$, что противоречит теореме 1. □

Следствие 4. а) Если выполнены условия теоремы 2, то $|\mathbf{U}(x,y)|\le\max\limits_{\overline{\Gamma}}|\mathbf{U}(x,y)|$ для всех $(x,y)\in\overline{D}$.

б) Если коэффициенты системы (1) удовлетворяют условиям теоремы 2 и в классе обобщенных в D решений системы (1) существует решение задачи G, то оно единственно.

5. Примеры

Справедливость изложенной выше теории продемонстрируем на некоторых уравнениях, которые были изучены в [14], [15].

Пример 1. В области D рассмотрим задачу Геллерстедта для уравнения смешанного типа

$$\operatorname{sgn} y\cdot\omega_{xx}+\omega_{yy}+M\omega_x-\lambda\omega=0,\tag{18}$$

где M — вещественная постоянная. Пусть $\operatorname{Re}\omega=u_1$, $\operatorname{Im}\omega=u_2$, $\lambda=\alpha+i\beta$. Тогда задача Геллерстедта для уравнения (18) равносильна задаче (2)–(5) для системы

$$\begin{aligned}&\operatorname{sgn} y\cdot u_{1xx}+u_{1yy}+Mu_{1x}-\alpha u_1+\beta u_2=0,\\&\operatorname{sgn} y\cdot u_{2xx}+u_{2yy}+Mu_{2x}-\beta u_1-\alpha u_2=0.\end{aligned}\tag{19}$$

При $\alpha \geq 0$, $(x,y) \in D_+$, $M < -\sqrt{2(\alpha+\sqrt{2}|\beta|)}$, $(x,y) \in D_1 \cup D_2$, коэффициенты системы (19) удовлетворяют условиям теоремы 1.

Пример 2. Для уравнения смешанного типа с комплексным спектральным параметром

$$\operatorname{sgn} y \cdot \omega_{xx} + \omega_{yy} - \lambda\omega = 0, \tag{20}$$

где $\lambda = \alpha + i\beta$, $\omega = u_1 + iu_2$, в области D поставим задачу Геллерстедта. Она равносильна задаче (2)–(5) для системы

$$\operatorname{sgn} y \cdot \mathbf{U}_{xx} + \mathbf{U}_{yy} + C\mathbf{U} = 0, \tag{21}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta \\ -\beta & -\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} = (u_1, u_2).$$

В характеристических координатах (ξ,η) система (21) примет вид

$$[1 - \operatorname{sgn}(\eta-\xi)](\mathbf{U}_{\xi\xi} + \mathbf{U}_{\eta\eta}) - 2[1 + \operatorname{sgn}(\eta-\xi)]\mathbf{U}_{\xi\eta} + C\mathbf{U} = 0, \tag{22}$$

а области D, D_+, D_1 и D_2 соответственно отображаются в области Δ, Δ_+, Δ_1 и Δ_2. Заметим, что коэффициенты системы (22) в областях Δ_1 и Δ_2 не удовлетворяют условиям (A_1), (A_2) и (B_1), (B_2) ни при одном значении параметра λ. Однако при некоторых ограничениях на λ справедлива следующая

Теорема 3. *Если в классе регулярных в D решений уравнения* (20) *существует решение задачи Геллерстедта, то оно единственно при всех λ, удовлетворяющих условию*

$$|\alpha| < \frac{\pi^2}{(t_2-t_1)^2} - \sqrt{2}|\beta|, \tag{23}$$

где $t_2 = \max\limits_{\overline{\Delta}}(\xi-\eta) = \max\limits_{\overline{D}} 2y$, $t_1 = \min\limits_{\overline{\Delta}}(\xi-\eta) = \min\limits_{\overline{D}} 2y$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}(\xi,\eta)$ — регулярное в Δ решение системы (22), равное нулю на A_1C_1 и A_2C_2. Введем новую функцию $v(\xi,\eta) = \mathbf{U}(\xi,\eta)\exp[-g(\xi,\eta)]$, которая является решением системы

$$\begin{gathered} v_{\xi\xi} + v_{\eta\eta} + 2g_\xi v_\xi + 2g_\eta v_\eta + v\left(g_{\xi\xi} + g_{\eta\eta} + g_\xi^2 + g_\eta^2 + \frac{C}{2}\right) = 0, \quad \xi > \eta; \\ v_{\xi\eta} + g_\eta v_\xi + g_\xi v_\eta + v\left(g_{\xi\eta} + g_\xi g_\eta - \frac{C}{4}\right) = 0, \quad \xi < \eta. \end{gathered} \tag{24}$$

Наложив на коэффициенты системы (24) условия (16), (17) и условие 1) леммы 1, получим неравенство (23), при котором существует функция g и для системы (21) справедливы условия теоремы 1. $\square$

Пример 3. В области D рассмотрим уравнение

$$\omega_{xx} + \operatorname{sgn} y \cdot \omega_{yy} - \lambda\omega = 0, \tag{25}$$

где λ — комплексный параметр, $\operatorname{Re}\omega = u_1$, $\operatorname{Im}\omega = u_2$, $\lambda = \alpha + i\beta$. Аналогично примеру 2 можно показать, что при выполнении условия (23) для уравнения (25) справедлива теорема 1.

Пример 4. В области D рассмотрим систему вида

$$\operatorname{sgn} y \cdot |y|^n \mathbf{U}_{xx} + \mathbf{U}_{yy} + a_0|y|^{\frac{n-1}{2}}\mathbf{U}_x + C(x,y)\mathbf{U} = 0, \tag{26}$$

где $n > 0$, $a_0 = \mathrm{const}$, $C(x,y) = (C_{ik}(x,y))$, $i,k = \overline{1,m}$, $m \geq 2$, — квадратная матрица.

Теорема 4. *Если* 1) $n > 0$, $|a_0| < \frac{n}{2}$; 2) $\mathbf{U}(x,y)$ *— регулярное в* D *решение системы* (26), *равное нулю на характеристиках* A_1C_1 *и* A_2C_2; 3) $C(x,y)$ *— неположительно определенная матрица в* D_+; 4) *коэффициенты* $C_{ik}(\xi,\eta)$ *в области* D_1 *удовлетворяют неравенствам*

$$h_i = \frac{(n-2a_0)^2 + 4(n-2a_0)}{16(-y)^{n+2}} + \frac{C_{ii}}{4(-y)^n} \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} C_{ii} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k\neq i}^{m} |C_{ik}| \leq \frac{1-m}{16y^2}[(n-2a_0)^2 + 4(n-2a_0)],$$

а в области D_2 *— неравенствам*

$$h_i^* = \frac{(n+2a_0)^2 + 4(n+2a_0)}{16(-y)^{n+2}} + \frac{C_{ii}}{4(-y)^n} \geq 0;$$

$$\sum_{i=1}^{m} C_{ii} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{k\neq i}^{m} |C_{ik}| \leq \frac{1-m}{16y^2}[(n+2a_0)^2 + 4(n+2a_0)],$$

то $\max\limits_{\overline{D}} |\mathbf{U}(x,y)|$ *достигается только на* Γ.

6. Об условной разрешимости задачи Геллерстедта

В дальнейшем предположим, что $K(y) = \operatorname{sgn} y|y|^m$, $m = \text{const} \geq 0$, $A(x,y), B(x,y) \in C^1(\overline{D}_+) \wedge C^1(\overline{D}_i)$, $C_{ik}(x,y) \in C(\overline{D}_+ \cup \overline{D}_i)$, $i = 1,2$, и выполняются условия теоремы о принципе максимума; Γ — кривая из класса Ляпунова, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ, s — длина дуги кривой Γ, отсчитываемая от точки A_2, S — длина кривой Γ; Γ_0 — “нормальная” кривая системы (1), заданная уравнением $(x - (a_2 + a_1)/2)^2 + 4y^{m+2}/(m+2)^2 = (a_2 + a_1)^2/4$; D_0 — область, ограниченная кривыми Γ_0, A_1C_1, C_1E, EC_2, C_2A_2, $\Phi(x,y) = \Phi(x(s), y(s)) = \Phi(s)$, $0 \leq s \leq S$.

Определение 4. Регулярное в D решение системы (1), удовлетворяющее условиям (4)–(5), назовем *регулярным решением задачи* G для системы (1).

Определение 5. Равномерный в $\overline{D}$ предел последовательности регулярных решений задачи G назовем *обобщенным решением задачи* G.

Теорема 5. *Пусть в области* D *при условии, когда кривая* Γ *оканчивается в точках* A_1 *и* A_2 *сколь угодно малыми дугами “нормальной” кривой, существует регулярное решение задачи* G *для системы* (1) *при* $\Phi(s) \in C[0,S]$ *и функции* $\Psi(x)$ *достаточно гладкой* (*т. е. функция* $\Psi(x)$ *такова, что при достаточно гладкой функции* $\Phi(s)$ *выполнено условие теоремы* 5) *на* $[a_1, \frac{a_1+e}{2}] \cup [\frac{a_2+e}{2}, a_2]$, $\Psi(a_1) = \Psi(a_2) = \Phi(0) = \Phi(S) = 0$. *Тогда существует единственное обобщенное решение* $\mathbf{U}(x,y)$ *задачи* G *с граничными данными* $\mathbf{U} = \Phi$ *на* Γ *и* $\mathbf{U} = \Psi$ *на* $A_1C_1 \cup A_2C_2$ *при произвольном подходе кривой* Γ *к оси* $y = 0$, *за исключением случаев, когда в достаточно малых окрестностях концов кривой* Γ *производная* dx/ds *меняет знак и* $dy/ds = 0$.

Предварительно установим следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 5. *Если* $\mathbf{U}(x,y) \in C(\overline{D}_+) \wedge C^2(D_+)$, $\mathbf{U} = 0$ *на кривой* Γ, *то для* $(x,y) \in D_+ \cup \Gamma$ *справедлива оценка*

$$|\mathbf{U}(x,y)| \leq \theta \max_{a_1 \leq x \leq a_2} |\mathbf{U}(x,0)|, \quad 0 < \theta < 1.$$

Лемма 6. *Если* $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$, $\Phi_0(x) \in C[a_1,a_2]$, $\Psi(x) \in C^3[a_1, \frac{a_1+e}{2}] \cup [\frac{a_2+e}{2}, a_2]$, $\Phi_0(0) = \Psi(0)$, *то существует обобщенное решение* $\mathbf{U}(x,y)$ *задачи* G *с граничными данными* $\mathbf{U} = \Phi_0$ *на* Γ_0 *и* $\mathbf{U} = \Psi$ *на* $A_1C_1 \cup A_2C_2$.

Доказательство. Пусть $\{\Phi_{0p}(x)\} = \{(\varphi_{01}^p, \varphi_{02}^p, \dots, \varphi_{0n}^p)\}$ — последовательность гладких вектор-функций таких, что $\Phi_0(x) = \lim\limits_p \Phi_{0p}(x)$ равномерно на сегменте $[a_1, a_2]$ и $\Phi_{0p}(0) = \Phi_0(0)$. По условию теоремы 5 существует регулярное в D_0 решение $\mathbf{U}_p(x,y)$ задачи G с краевыми данными $\mathbf{U}_p = \Phi_{0p}$ на Γ_0 и $\mathbf{U}_p = \Psi$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$. На основании следствия из теоремы 1 в $\overline{D}_0$ получаем оценку

$$|\mathbf{U}_p(x,y) - \mathbf{U}_q(x,y)| \le \max_{\overline{\Gamma}_0} |\Phi_{0p} - \Phi_{0q}|.$$

Отсюда вытекает, что в $\overline{D}_0$ последовательность $\{\mathbf{U}_p(x,y)\} = \{(u_1^p, u_2^p, \dots, u_n^p)\}$ регулярных решений задачи G равномерно сходится. Пусть $\lim\limits_p \mathbf{U}_p(x,y) = \mathbf{U}(x,y)$. Предельная функция $\mathbf{U}(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}_0$, $\mathbf{U} = \Phi_0$ на Γ_0 и $\mathbf{U} = \Psi$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$.

При $\Psi = 0$ для этой функции справедлива оценка

$$|\mathbf{U}(x,y)| \le \max_{\overline{\Gamma}_0} |\Phi_0(x)|. \tag{27}$$

Лемма 7. *Пусть $D_{0+} \cup \Gamma_0 \subset D_+$. Если $\Phi(s) \in C[0,S]$ и $\Psi(x) \in C^3[a_1, \frac{a_1+e}{2}] \cup [\frac{a_2+e}{2}, a_2]$, то существует обобщенное решение задачи G с граничными данными $\mathbf{U} = \Phi$ на Γ и $\mathbf{U} = \Psi$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$.*

Доказательство. Для построения такого решения применим альтернирующий метод типа Шварца. В областях D_+ и D_0 построим две последовательности решений системы (1). В силу леммы 6 в области D_0 существует обобщенное решение $\mathbf{Z}_0 = (z_1^0, z_2^0, \dots, z_n^0)$ задачи G с данными $\mathbf{Z}_0 = 0$ на кривой Γ_0 и $\mathbf{Z}_0 = \Psi$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$.

В области D_+ существует решение задачи Дирихле для системы (1) с данными $\mathbf{U}_0 = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $\mathbf{U}_0 = \mathbf{Z}_0$ на отрезке $\overline{A_1A_2}$ [16]. Пусть $\mathbf{Z}_p(x,y)$ — обобщенное решение задачи G в области D_0 для системы (1) с граничными данными $\mathbf{Z}_p(x,y) = \mathbf{U}_{p-1}(x,y)$ на $\overline{\Gamma}_0$ и $\mathbf{Z}_p = \Psi$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$, где $p = 1, 2, \dots$, $\mathbf{U}_p(x,y)$ — решение задачи Дирихле для системы (1) в области D_+ с данными $\mathbf{U}_p = \Phi$ на $\overline{\Gamma}$ и $\mathbf{U}_p = \mathbf{Z}_p$ на $\overline{A_1A_2}$. Докажем, что последовательности $\{\mathbf{U}_p(x,y)\}$ и $\{\mathbf{Z}_p(x,y)\}$ равномерно сходятся в $\overline{D}_+$ и $\overline{D}_0$. Действительно,

$$|\mathbf{U}_{p+1} - \mathbf{U}_p| \le \max_{a_1 \le x \le a_2} |\mathbf{Z}_{p+1}(x,0) - \mathbf{Z}_p(x,0)| \le \max_{\overline{D}_0} |\mathbf{Z}_{p+1}(x,y) - \mathbf{Z}_p(x,y)|. \tag{28}$$

С другой стороны, в силу оценки (27) и леммы 5

$$|\mathbf{Z}_{p+1}(x,y) - \mathbf{Z}_p(x,y)| \le \max_{\overline{\Gamma}_0} |\mathbf{U}_p - \mathbf{U}_{p-1}| \le \theta \max_{a_1 \le x \le a_2} |\mathbf{U}_p(x,0) - \mathbf{U}_{p-1}(x,0)| \le \theta \max_{\overline{D}_0} |\mathbf{Z}_p - \mathbf{Z}_{p-1}|.$$

Продолжая это рассуждение, получим

$$|\mathbf{Z}_{p+1} - \mathbf{Z}_p| \le \theta^p \max_{\overline{D}_0} |\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_0|. \tag{29}$$

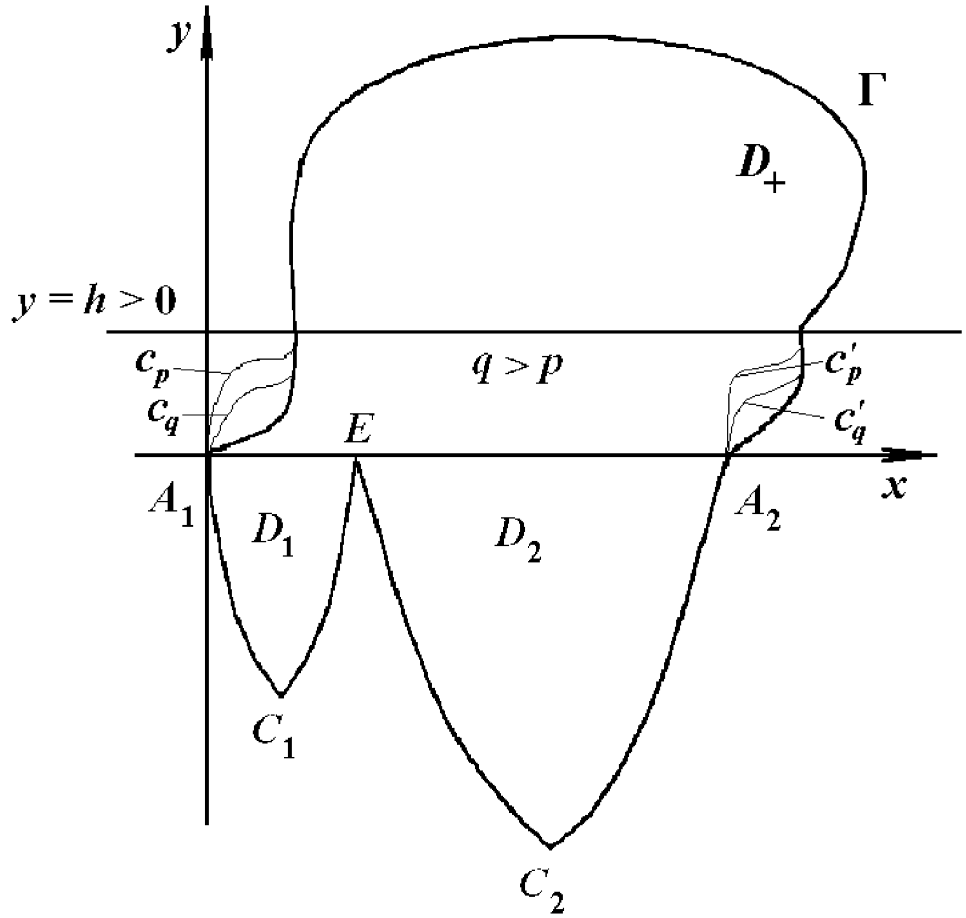
Из оценок (28) и (29) вытекает

$$|\mathbf{U}_{p+1} - \mathbf{U}_p| \le \theta^p \max_{\overline{D}_0} |\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_0|. \tag{30}$$

Тогда из (29) и (30) следует, что $\lim\limits_p \mathbf{U}_p(x,y) = \mathbf{U}(x,y)$ равномерно в $\overline{D}_0$ и $\lim\limits_p \mathbf{Z}_p(x,y) = \mathbf{Z}(x,y)$ равномерно в $\overline{D}_+$.

Очевидно, $\mathbf{Z}(x,y) \equiv \mathbf{U}(x,y)$ в $\overline{D}_{0+}$. Следовательно, функция $\mathbf{U}(x,y)$ является "аналитическим" продолжением функции $\mathbf{Z}(x,y)$ и регулярным решением системы (1) в области D_+. Кроме того, $|\mathbf{U}(x,y)| \le \max\limits_{\overline{\Gamma}} |\Phi(x)|$ при $\Psi = 0$.

Доказательство теоремы 5. Пусть кривая Γ подходит к оси $y = 0$, как, например, указано на рисунке



1. Пусть $\mathbf{U} = \Psi = 0$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$ и $\Phi(s) = 0$ при $y < h$. Построим последовательность дуг Γ_p, $p = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих условиям

1) Γ и Γ_p совпадают при $y \geq h$;
2) Γ_p оканчивается в точках A_1 и A_2 малыми дугами c_p и c'_p "нормальных" кривых;
3) Γ_p — гладкая кривая из класса Ляпунова;
4) дуги c_p и c'_p стягиваются в точки A_1 и A_2 соответственно при $p \to \infty$.

Пусть D_p — область, ограниченная дугой Γ_p и характеристиками A_1C_1, C_1E и EC_2, C_2A_2. На кривой Γ_p определим функцию $\Phi_p(s)$ следующим образом:

$$\Phi_p(s) = \begin{cases} \Phi(s), & y \geq h; \\ 0, & y < h. \end{cases}$$

По условию в области D_p существует регулярное решение $\mathbf{U}_p(x, y)$ задачи G с граничными условиями $\mathbf{U}_p = \Phi_p$ на Γ_p и $\mathbf{U}_p = \Psi = 0$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$.

Пусть $\mathbf{Z}(x, y) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ — обобщенное решение задачи G в области D^*, равное нулю на $A_1C_1 \cup A_2C_2$, где $D_1^* \equiv D_1$, $D_2^* \equiv D_2$, $D_+^* \supset D_+ \cup \Gamma$. Можно найти постоянную M, не зависящую от p такую, что на кривой Γ_p имеет место неравенство $M|\mathbf{Z}| - |\mathbf{U}_p| \geq 0$. Тогда

$$M|\mathbf{Z}| - |\mathbf{U}_p| \geq 0 \quad \text{в} \quad \overline{D}_p. \tag{31}$$

Пусть $G_p = D_p \cap D$ и положим

$$\mathbf{V}_p(x,y) = \begin{cases} \mathbf{U}_p(x,y), & (x,y) \in \overline{D}_p; \\ 0, & (x,y) \in \overline{D} \setminus \overline{D}_p. \end{cases}$$

Оценим $|\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_p|$, где $q > p$, в D. Пусть K_p и K'_p — два круга с центрами в точках A_1 и A_2, внутри которых содержатся соответственно дуги c_p и c'_p, причем радиусы этих кругов стремятся к нулю при $p \to \infty$. Положим $\varepsilon_p = \max\limits_{\overline{K}_p \cup \overline{K}'_p} |\mathbf{Z}(x,y)|$. Тогда из (31) вытекает, что на границе G_p при $y \geq 0$ $|\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_p| = |\mathbf{U}_q - \mathbf{U}_p| \leq 2M|\mathbf{Z}| \leq 2M\varepsilon_p$. Поэтому всюду в $\overline{G}_p$ справедлива оценка $|\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_p| \leq 2M\varepsilon_p$.

Для точек $(x,y) \in \overline{D} \cup \overline{D}_q \setminus \overline{D}_p$ $|\mathbf{V}_q| \leq M\varepsilon_p$, а для $(x,y) \in \overline{D} \setminus \overline{D}_q$ $\mathbf{V}_p(x,y) = \mathbf{V}_q(x,y) = 0$. Тогда $|\mathbf{V}_q - \mathbf{V}_p| \leq 2M\varepsilon_p$ для $(x,y) \in \overline{D}$. Поскольку $\varepsilon_p \to 0$ при $p \to \infty$, то из последней оценки следует, что последовательность $\{\mathbf{V}_p(x,y)\} = \{(v_1^p, v_2^p, \ldots, v_n^p)\}$ равномерно сходится в $\overline{D}$. Тогда $\lim\limits_p \mathbf{V}_p(x,y) = \lim\limits_p \mathbf{U}_p(x,y) = \mathbf{U}(x,y)$. Ясно, что $\mathbf{U}(x,y)$ принимает на Γ значения $\Phi(s)$, а на характеристиках A_1C_1 и A_2C_2 функция $\mathbf{U} = 0$. В области D_+ функция $\mathbf{U}(x,y)$ удовлетворяет системе (1) и непрерывна в $\overline{D}$. При этом справедлива оценка

$$|\mathbf{U}(x,y)| \leq \max_{\overline{\Gamma}} |\Phi|. \tag{32}$$

2. Пусть $\Phi(s)$ непрерывна на $[0,S]$ и $\Phi(0) = \Phi(S) = 0$. Построим последовательность $\{\Phi_p(s)\}$ непрерывных функций, исчезающих в достаточно малых окрестностях точек $s = 0$ и $s = S$ таких, что $\lim\limits_p \Phi_p(s) = \Phi(s)$ равномерно на $[0,S]$. По функциям $\Phi_p(s)$ в силу п. 1 построим последовательность $\{\mathbf{U}_p(x,y)\}$ решений задачи G. Тогда из (32) следует $|\mathbf{U}_q - \mathbf{U}_p| \leq \max\limits_{\overline{\Gamma}} |\Phi_q - \Phi_p|$. Отсюда следует, что в $\overline{D}$ существует равномерный предел $\lim\limits_p \mathbf{U}_p(x,y) = \mathbf{U}(x,y)$.

В области D_+ функция $\mathbf{U}$ удовлетворяет системе (1), $\mathbf{U} = \Phi$ на Γ, $\mathbf{U} = 0$ на AC и $\mathbf{U}(x,y)$ непрерывна в $\overline{D}$. Кроме того, имеет место оценка $|\mathbf{U}(x,y)| \leq \max\limits_{\overline{\Gamma}} |\Phi|$.

3. Пусть $\Psi(x) \neq 0$, D^* — область из п. 1 с границей $\partial D^* = \Gamma^* \cup A_1C_1 \cup C_1E \cup EC_2 \cup C_2A_2$, причем $D_0 \cup \Gamma_0 \subset D^*$. По лемме 7 существует обобщенное решение $\mathbf{U}^*(x,y)$ задачи G, непрерывное в $\overline{D}^*$ с граничными данными $\mathbf{U}^* = 0$ на Γ^* и $\mathbf{U}^* = \Psi$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$.

Пусть $\Phi^*(s) = \mathbf{U}^*$ на Γ. Тогда решение искомой задачи G для области D определяется по формуле $\mathbf{U}(x,y) = \mathbf{U}^*(x,y) + \widetilde{\mathbf{U}}(x,y)$, где $\widetilde{\mathbf{U}}(x,y)$ — решение задачи G в области D с граничными условиями $\widetilde{\mathbf{U}}(x,y) = \Phi(s) - \Phi^*(s)$ на Γ, $\widetilde{\mathbf{U}} = 0$ на $A_1C_1 \cup A_2C_2$.

Решение $\widetilde{\mathbf{U}}(x,y)$ задачи G существует, что было показано в пп. 1, 2.

Замечание 2. Ранее альтернирующий метод типа Шварца был применен для доказательства теорем существования задачи Трикоми для уравнений Лаврентьева–Бицадзе [16], Трикоми [17] и общего уравнения смешанного типа [18].

Литература

1. Майоров И.В. *Об одной нелинейной системе уравнений смешанного типа* // ДАН СССР. – 1968. – Т. 183. – № 2. – С. 280–283.
2. Диденко В.П. *О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного типа* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 144. – № 4. – С. 709–712.
3. Диденко В.П. *О некоторых системах дифференциальных уравнений смешанного и смешанно-составного типов* // Дифференц. уравнения. – 1966. – Т. 2. – № 1. – С. 33–46.
4. Диденко В.П. *Об обобщенной разрешимости граничных задач для системы дифференциальных уравнений смешанного типа* // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8. – № 1. – С. 24–29.
5. Ганеев Р.М. *Задача типа Геллерстедта для системы уравнений смешанного типа* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – Вып. 13. – С. 70–79.

6. Ганеев Р.М. *Задача Трикоми для систем уравнений смешанного типа* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1977. – Вып. 13. – С. 42–51.
7. Теут О.М. *Одна краевая задача для системы уравнений смешанного типа.* – В сб.: Краевые задачи теории функций комплексного переменного. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1962. – С. 40–58.
8. Чекмарев Т.В. *Задачи с граничными условиями для некоторых систем уравнений различных типов*: Автореф. дис. ... докт. физ.-матем. наук. – Казань, 1973. – 322 с.
9. Жегалов В.И. *Об одной системе смешанного типа высшего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 25–35.
10. Сабитов К.Б. *Экстремальные свойства модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа* // ДАН СССР. – 1990. – Т. 310. – № 1. – С. 33–36.
11. Сабитов К.Б., Идрисов Р.Г. *Принцип максимума модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа и его применения* // Сб. науч. тр. СФ АН РБ "Дифференциальные уравнения и их приложения в физике". – Стерлитамак, 1999. – С. 58–68.
12. Берс Л., Джон Р., Шехтер М. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1966. – 351 с.
13. Солдатов А.П. *Решение одной краевой задачи теории функций со смещением*// Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10. – № 1. – С. 143–152.
14. Моисеев Е.И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 150 с.
15. Пономарев С.М. *Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева–Бицадзе*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – М., 1981. – 149 с.
16. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
17. Бабенко К.И. *К теории уравнений смешанного типа*: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. – М., 1952. – 195 с.
18. Сабитов К.Б. *К вопросу о существовании решения задачи Трикоми* // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28. – № 12. – С. 2092–2101.

Стерлитамакский государственный педагогический институт

Стерлитамакский филиал Академии наук Республики Башкортостан

Поступила
20.10.2000