

Э.Х. ГИМАДИ, В.В. ЗАЛЮБОВСКИЙ, П.И. ШАРЫГИН

ЗАДАЧА УПАКОВКИ В ПОЛОСУ: АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД

1. Введение

Задача упаковки в полосу (ЗУП) формулируется следующим образом. Пусть имеется полубесконечная полоса ширины W и список прямоугольных предметов $S = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$. Предмет $a_i \in S$ имеет ширину $w_i \leq W$ и высоту h_i . Требуется упаковать все предметы из списка S в полосу минимальной высоты. Упакованные предметы не должны перекрывать друг друга, их стороны должны быть параллельны сторонам полосы, вращение предметов не допускается. В литературе эта задача встречается также под названием “двумерная ортогональная задача упаковки”.

Нетрудно заметить, что частными случаями рассматриваемой задачи являются известные NP -трудные задачи упаковки в контейнеры (при $h_i \equiv \text{const}$, $i = 1, \dots, n$) и задача многопроцессорного расписания (при $w_i \equiv \text{const}$, $i = 1, \dots, n$). В силу этого задача упаковки в полосу также NP -трудна.

Имеется множество работ, посвященных анализу наихудшего поведения приближенных алгоритмов для решения ЗУП [1]. Гораздо меньшее количество статей содержит анализ среднего поведения таких алгоритмов. В настоящей статье для исследования поведения приближенного алгоритма на списках со случайными значениями w_i и h_i применяется асимптотически точный подход, предложенный в [2]. Предполагается знакомство читателя с работой [3].

В разделе 2 приводятся основные определения, обозначения и формулируются некоторые предварительные утверждения. Раздел 3 содержит формулировку и доказательство основных утверждений, касающихся условий асимптотической точности предложенного алгоритма для ЗУП. В разделе 4 рассматривается обобщение ЗУП, связанное с введением частичного порядка на множестве предметов. Раздел 5 посвящен исследованию связи ЗУП с задачей календарного планирования с нескладируемым ограниченным ресурсом.

2. Основные определения и предварительные сведения

Напомним ряд определений, содержащихся в [3].

Пусть имеется некоторый алгоритм \mathcal{A} для решения оптимизационной задачи на минимум. Обозначим через $F_{\mathcal{A}}(S)$, $F^*(S)$ значения целевых функций на решении индивидуальной задачи S , получаемом с помощью алгоритма \mathcal{A} , и оптимальном решении соответственно. Будем говорить, что алгоритм \mathcal{A} удовлетворяет оценкам $(\varepsilon_n, \delta_n)$ на классе задач \mathcal{K}_n размерности n , если для всех $S \in \mathcal{K}_n$ выполнено неравенство

$$Pr\{F_{\mathcal{A}}(S) > (1 + \varepsilon_n)F^*(S)\} \leq \delta_n.$$

Алгоритм \mathcal{A} называется *асимптотически точным* на классе задач \mathcal{K} , если существуют такие последовательности (ε_n) , (δ_n) , что для любого n алгоритм \mathcal{A} удовлетворяет оценкам $(\varepsilon_n, \delta_n)$ на подмножестве $\mathcal{K}_n \subset \mathcal{K}$ задач размерности n и при этом $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $\delta_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проектов 96-01-01591 и 97-01-00890).

Параметры ε_n и δ_n можно рассматривать как оценки *относительной погрешности* и *вероятности несрабатывания* алгоритма соответственно.

Неотрицательную функцию f целочисленного аргумента $r \in I_b = \{1, 2, \dots, B\}$ будем называть *b -асимметричной* (*b -симметричной*), если $f(r) \leq f(b-r)$ (соответственно $f(r) = f(b-r)$) при $r = 1, \dots, \lfloor b/2 \rfloor$ и $f(r) = 0$ при $r > b$.

Нетрудно заметить, что класс B -асимметричных функций включает в себя B -симметричные функции, неубывающие функции, функции с постоянным значением на сегменте $[1, B]$.

Функцию f будем называть *B -регулярной* при $B = 2^Q$, Q целое, если она представима в виде суммы 2^k -симметричных функций $f^{(k)}$, $k \in I_Q$,

$$f(r) = \sum_{k=1}^Q f^{(k)}(r), \quad r \in I_B.$$

В [3] показано, что разложение B -регулярной функции f на 2^k -симметричные составляющие может быть записано в виде

$$f(r) = \sum_{k=k_r}^Q f^{(k)}(r), \quad r \in I_B,$$

где

$$k_B = Q; \quad k_r = \min\{k \mid r < 2^k\} = \lceil \log_2(r+1) \rceil, \quad 1 \leq r < B.$$

Такое разложение будем называть *каноническим*.

Будем называть *b -связкой* предмет веса b либо пару предметов с весами r и $b-r$ при $r = 1, \dots, \lfloor b/2 \rfloor$.

В [3] предложен приближенный алгоритм \mathcal{A}_1 упаковки предметов в контейнеры. В случае $B = 2^Q$, Q целое, алгоритм \mathcal{A}_1 последовательно для $k = Q, Q-1, \dots, 1$ образует список 2^k -связок и упаковывает этот список в контейнеры по принципу алгоритма NFD (“следующий пригодный с предварительным упорядочением по невозрастанию”). Предметы подписка $S' \subset S$, не вошедшие в полностью заполненные контейнеры, алгоритм \mathcal{A}_1 упаковывает с помощью NF -алгоритма (“следующий пригодный”). Описание алгоритмов NFD и NF можно найти в [1].

В случае B -асимметричных списков, а также при $B \neq 2^Q$, Q целое, используется упрощенная версия алгоритма \mathcal{A}_1 : сначала заполняем контейнеры B -связками, а оставшиеся предметы $a_i \in S'$ размещаем с помощью NF -алгоритма.

Для решения задач упаковки в контейнеры со случайными весами предметов в [3] применяется *модифицированный приближенный алгоритм* $\tilde{\mathcal{A}}_1$, который использует решение, полученное с помощью алгоритма \mathcal{A}_1 для некоторого *оценочного* списка \tilde{S} при условии, что он мажорирует исходный список S .

Далее считаем, что класс \mathcal{K}_n^2 состоит из задач упаковки двумерных предметов (прямоугольников) в полосу со следующей моделью формирования случайного списка S : производится серия n независимых испытаний, в каждом из которых очередной предмет a_i , $i = 1, \dots, n$, принимает свои размеры — ширину w_i и высоту h_i — в соответствии с одинаковой дискретной функцией распределения

$$p_{wh} = Pr\{w_i = w, h_i = h\} \geq 0, \quad w = 1, \dots, W, \quad h = 1, \dots, H, \quad \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H p_{wh} = 1.$$

Введем обозначения:

$S_h = \{a_i \mid h_i = h, i = 1, \dots, n\}$ — подсписок, состоящий из предметов высоты h , $h = 1, \dots, H$;
 (Δ_{wh}) — матрица с компонентами $\Delta_{wh} = 2(n \ln np_{wh}(1-p_{wh}))^{1/2}$, где $w = 1, \dots, W$, $h = 1, \dots, H$;

\mathcal{A}_2 — алгоритм, состоящий в последовательном применении к подпискам S_1, \dots, S_H описанного ранее алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}_1$ решения одномерной задачи упаковки в контейнеры (при этом под весом предмета понимается его ширина);

$\beta_p = \frac{1}{WH} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H whp_{wh}$ — отношение математического ожидания площади прямоугольника, задаваемого размерами предмета, к максимально возможной площади предмета;

$F_{\tilde{\mathcal{A}}_1}^h$ — количество контейнеров, полученное в результате применения алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}_1$ к списку S_h , $h = 1, \dots, H$;

$F_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = \sum_{h=1}^H hF_{\tilde{\mathcal{A}}_1}^h$ — высота полосы, полученная в результате упаковки предметов списка S с помощью алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}_2$.

Говорим, что алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}_2$ срабатывает применительно к конкретной реализации случайного списка S , если для всех $w = 1, \dots, W$, $h = 1, \dots, H$ выполнено неравенство

$$|\chi_S(w, h) - np_{wh}| \leq \Delta_{wh}, \quad (1)$$

где $\chi_S(w, h)$ — число предметов ширины w и высоты h в списке S .

Матрицу назовем W -регулярной (W -асимметричной, W -симметричной, неубывающей), если W -регулярна (W -асимметрична, W -симметрична, неубывающая) каждая строка матрицы. Напомним, что в случае W -регулярной матрицы предполагаем, что $W = 2^Q$, Q целое.

3. Условия асимптотической точности

Лемма 1. *Если $WH = o(n/\ln n)$, то вероятность несрабатывания алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}_2$ ограничена величиной $o\left(\frac{1}{n \ln n}\right)$.*

Доказательство. Обозначив через \bar{A}_{wh} событие, противоположное (1), имеем

$$\delta_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = Pr\left\{\bigcup_{w=1}^W \bigcup_{h=1}^H \bar{A}_{wh}\right\} \leq \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H Pr(\bar{A}_{wh}).$$

При оценивании вероятности несрабатывания алгоритма понадобятся неравенства для вероятностей больших отклонений суммы $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ независимых случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n , распределенных по закону Бернулли

$$Pr\{\xi_i = 1\} = p; \quad Pr\{\xi_i = 0\} = 1 - p, \quad i = 1, \dots, n.$$

При $\Delta = o(n^{2/3})$ справедливо неравенство [3]

$$Pr\{|S_n - np| \geq \Delta\} \leq c \exp\left(-\frac{\Delta^2}{2np(1-p)}\right),$$

где $c = 2(1 + o(1))$. Воспользовавшись этим неравенством (поскольку $\Delta_{wh} = o(n^{2/3})$), с учетом условия леммы получим

$$\begin{aligned} \delta_{\tilde{\mathcal{A}}_2} &\leq c \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \exp\left(-\frac{\Delta_{wh}^2}{2np_{wh}(1-p_{wh})}\right) = c \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \exp\left(-\frac{4n \ln np_{wh}(1-p_{wh})}{2np_{wh}(1-p_{wh})}\right) = \\ &= c \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \frac{1}{n^2} = \frac{CWH}{n^2} = \frac{o(n/\ln n)}{n^2} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right). \quad \square \end{aligned}$$

Теорема 1. *Если матрица (p_{wh}) W -асимметрична, то при $WH = o(n/\ln n)$ алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}_2$ приводит к асимптотически точному решению ЗУП из класса \mathcal{K}_n^2 ; при этом справедливы следующие оценки вероятности несрабатывания и относительной погрешности:*

$$\delta_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad \varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = O\left(\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}}\right).$$

Доказательство. Оценка $\delta_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ следует из леммы 1. Отсюда с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, $\tilde{\mathcal{A}}_2$ имеет дело со списком S , в котором для всяких $w = 1, \dots, W$ и $h = 1, \dots, H$ выполнены неравенства

$$[np_{wh} + \Delta_{wh}] \leq \chi_S(w, h) \leq [np_{wh} + \Delta_{wh}] \quad (2)$$

и в качестве оценочного может быть взят список \tilde{S} с характеристической функцией $\chi_S(w, h) = [np_{wh} + \Delta_{wh}]$. Взятый в таком виде оценочный список является W -асимметричным [3].

Для вычисления относительной погрешности $\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}^* / F_S^* - 1$ понадобятся оценки величин F_S^* и $F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}^*$ соответственно снизу и сверху.

Оптимальное значение целевой функции F_S^* для ЗУП со списком S не меньше, чем $\sum_{h=1}^H h \sum_{w>B/2} \chi_S(w, h)$ плюс (в случае четных W) $\sum_{h=1}^H h \chi_S(B/2, h)/2$. Отсюда

$$F_S^* \geq \sum_{h=1}^H h \left(\sum_{w>W/2} \chi_S(w, h) + \chi_S\left(\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, h\right) \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \right)$$

и с учетом (2)

$$F_S^* \geq \sum_{h=1}^H h \left(\sum_{w>W/2} (np_{wh} - \Delta_{wh}) + (np_{\lfloor W/2 \rfloor, h} - \Delta_{\lfloor W/2 \rfloor, h}) \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \right).$$

Для оценивания сверху величины $F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}^*$ воспользуемся свойствами оценочности списка \tilde{S} и его W -асимметричности

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}^* &= \sum_{h=1}^H h F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}^h \leq \sum_{h=1}^H h \left(\sum_{w>W/2} \chi_{\tilde{S}}(w, h) + \left[\chi_{\tilde{S}}\left(\left\lfloor \frac{W}{2} \right\rfloor, h\right) \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \right] \right) \leq \\ &\leq \sum_{h=1}^H h \left(\sum_{w>W/2} (np_{wh} + \Delta_{wh}) + (np_{\lfloor W/2 \rfloor, h} + \Delta_{\lfloor W/2 \rfloor, h}) \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \right) + 1. \end{aligned}$$

Для величины $\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2}$ имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} &= \frac{F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}^*}{F_S^*} - 1 \leq \frac{2 \sum_{h=1}^H h \left(\sum_{w>W/2} \Delta_{wh} + \Delta_{\lfloor W/2 \rfloor, h} \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} + \frac{1}{2} \right)}{\sum_{h=1}^H h \left(\sum_{w>W/2} (np_{wh} - \Delta_{wh}) + (np_{\lfloor W/2 \rfloor, h} - \Delta_{\lfloor W/2 \rfloor, h}) \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \right)} \leq \\ &\leq \frac{\sum_{h=1}^H h \left(2 \sum_{w \geq W/2} \Delta_{wh} + 1 \right)}{\sum_{h=1}^H h \left(n \left(\sum_{w>W/2} p_{wh} + p_{\lfloor W/2 \rfloor, h} \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \right) - \sum_{w \geq W/2} \Delta_{wh} \right)}. \end{aligned}$$

В силу W -асимметричности функции p_{wh} для всякого $h = 1, \dots, H$ справедливы неравенства

$$\sum_{w>W/2} p_{wh} + p_{\lfloor \frac{W}{2} \rfloor, h} \left\{ \frac{W+1}{2} \right\} \geq \frac{1}{2}.$$

Кроме того,

$$\sum_{w \geq W/2} \Delta_{wh} \leq \sum_{w=1}^W \Delta_{wh} = 2\sqrt{n \ln n} \sum_{w=1}^W \sqrt{p_{wh}(1-p_{wh})} \leq 2\sqrt{W n \ln n}.$$

С учетом последних соотношений имеем

$$\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} \leq \frac{\sum_{h=1}^H (4\sqrt{Wn \ln n} + 1)h}{\sum_{h=1}^H \left(\frac{n}{2} - 2\sqrt{Wn \ln n}\right)h} = \frac{8\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}} \left(1 + \frac{1}{4\sqrt{Wn \ln n}}\right)}{1 - 4\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}}} \leq \frac{8\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{Wn \ln n}}\right)}{1 - 4\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}}}.$$

Таким образом, $\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = O\left(\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}}\right)$. По условию теоремы имеем

$$\frac{W}{n/\ln n} \leq \frac{WH}{n/\ln n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

т. е. $W = o(n/\ln n)$ и $\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. \square

Теорема 2. Если матрица (p_{wh}) W -регулярна, то при

$$WH/\beta_p = o(n/\ln n) \quad (3)$$

алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}_2$ приводит к асимптотически точному решению задачи упаковки предметов в полосу из класса \mathcal{K}_n^2 ; при этом справедливы оценки качества алгоритма

$$\delta_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad \varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = O\left(\sqrt{\frac{WH/\beta_p}{n/\ln n}}\right).$$

Доказательство. С учетом соотношения (3) и леммы 1 для вероятности несрабатывания $\tilde{\mathcal{A}}_2$ имеем

$$\delta_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Итак, с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \rightarrow \infty$, алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}_2$ имеет дело со списком S , в котором для всяких $w = 1, \dots, W$ и $h = 1, \dots, H$

$$\lceil np_{wh} - \Delta_{wh} \rceil \leq \chi_S(w, h) \leq \lfloor np_{wh} + \Delta_{wh} \rfloor.$$

Определим список \tilde{S} по его характеристической функции

$$\chi_{\tilde{S}}(w, h) = \lfloor \varphi(p_{wh}^{(Q)}) \rfloor + \sum_{k=k_w}^{Q-1} \lceil \varphi(p_{wh}^{(k)}) \rceil, \quad w = 1, \dots, W, \quad h = 1, \dots, H,$$

где

$$\varphi(x) = nx + 2(nx \ln x)^{1/2},$$

$$k_w = \begin{cases} \min\{k \mid w < 2^k\} = \lceil \log_2(w+1) \rceil & \text{при } 1 \leq w < W, \\ Q & \text{при } w = W, \end{cases}$$

а $\{p_{wh}^{(k)}, w = 1, \dots, W\}$, $k = 1, \dots, Q$, — совокупность 2^k -симметричных составляющих в каноническом разложении W -регулярной строки матрицы (p_{wh}) .

Убеждаемся, что список \tilde{S} является оценочным:

$$\begin{aligned} \chi_S(w, h) &\leq \lfloor np_{wh} + \Delta_{wh} \rfloor \leq \lfloor np_{wh} + 2(n \ln np_{wh})^{1/2} \rfloor = \left\lfloor n \sum_{k=k_w}^Q p_{wh}^k + 2 \left(n \ln n \sum_{k=k_w}^Q p_{wh}^k \right)^{1/2} \right\rfloor \leq \\ &\leq \left\lfloor n \sum_{k=k_w}^Q p_{wh}^k + 2(n \ln n)^{1/2} \sum_{k=k_w}^Q (p_{wh}^k)^{1/2} \right\rfloor = \left\lfloor \sum_{k=k_w}^Q \varphi(p_{wh}^{(Q)}) \right\rfloor \leq \chi_{\tilde{S}}(w, h). \end{aligned}$$

Лемма 2. В условиях доказываемой теоремы справедливы оценки

$$\begin{aligned} F_S^* &\geq nH\beta_p(1 - 2\hat{\varepsilon}_n), \\ F_{\tilde{\mathcal{A}}_2} &\leq nH\beta_p(1 + 2\hat{\varepsilon}_n + \hat{\varepsilon}_n^2/\ln n), \end{aligned}$$

$$\text{где } \hat{\varepsilon}_n = \left(\frac{WH/\beta_p}{n/\ln n}\right)^{1/2}.$$

Доказательство. Оценка снизу

$$\begin{aligned} F_S^* &\geq \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh\chi_S(w, h) > \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh(np_{wh} - \Delta_{wh}) \geq \\ &\geq nH\beta_p - \frac{2\sqrt{n\ln n}}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh\sqrt{p_{wh}} \geq \\ &\geq nH\beta_p - \frac{2\sqrt{n\ln n}}{W} \left(\sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh \cdot \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H whp_{wh} \right)^{1/2} \geq \\ &\geq nH\beta_p - 2H\sqrt{n\ln n}\sqrt{WH\beta_p} = nH\beta_p(1 - 2\hat{\varepsilon}_n). \end{aligned}$$

Оценка сверху

$$\begin{aligned} F_{\tilde{\mathcal{A}}_2} &= \sum_{h=1}^H F_{\tilde{\mathcal{A}}_1}^h \leq \sum_{h=1}^H h \left[\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w\chi_{\tilde{S}}(w, h) \right] \leq \\ &\leq \sum_{h=1}^H h \left(1 + \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w \left(\sum_{k=k_w}^Q \varphi(p_{wh}^{(k)}) + Q - k_w \right) \right) = \\ &= \sum_{h=1}^H h \left(1 + \frac{S_1}{W} + \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w \sum_{k=k_w}^Q \left(np_{wh}^{(k)} + 2(n\ln np_{wh}^{(k)}(1 - p_{wh}^{(k)}))^{1/2} \right) \right) \leq \\ &\leq \sum_{h=1}^H h \left(W + \frac{n}{W} \sum_{w=1}^W wp_{wh} + \frac{2\sqrt{n\ln n}}{W} \sum_{w=1}^W w\sqrt{(Q - k_w + 1)p_{wh}} \right) \leq \\ &\leq WH^2 + nH\beta_p + \frac{2\sqrt{n\ln n}}{W} S, \end{aligned}$$

$$\text{где } S_1 = \sum_{w=1}^W w(Q - k_w) \leq W^2/4;$$

$$\begin{aligned} S &= \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh\sqrt{(Q - k_w + 1)p_{wh}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H whp_{wh} \cdot \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh(Q - k_w + 1) \right)^{1/2} \leq WH\sqrt{WH\beta_p}, \end{aligned}$$

откуда

$$F_{\tilde{\mathcal{A}}_2} \leq nH\beta_p + 2\sqrt{n\ln n}H\sqrt{WH\beta_p} + WH^2 = nH\beta_p(1 + 2\hat{\varepsilon}_n + \hat{\varepsilon}_n^2/\ln n). \quad \square$$

Продолжим доказательство теоремы. Оценим относительное отклонение значения целевой функции $F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}$, полученного в результате работы алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}_2$, от оптимального значения F_S^* ,

$$\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = \frac{F_{\tilde{\mathcal{A}}_2}}{F_S^*} - 1 \leq \frac{nH\beta_p(1 + 2\hat{\varepsilon}_n + \hat{\varepsilon}_n^2/\ln n)}{nH\beta_p(1 - 2\hat{\varepsilon}_n)} - 1 = \frac{4\hat{\varepsilon}_n + \hat{\varepsilon}_n^2/\ln n}{1 - 2\hat{\varepsilon}_n} = O(\hat{\varepsilon}_n).$$

Поскольку $\hat{\varepsilon}_n = \sqrt{\frac{WH/\beta_p}{n/\ln n}}$, то $\varepsilon_{\tilde{\mathcal{A}}_2} = O\left(\sqrt{\frac{WH/\beta_p}{n/\ln n}}\right) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. \square

4. Учет частичного порядка

Рассмотрим теперь класс задач упаковки в полосу двумерных предметов, на множестве которых задан частичный порядок \prec в виде ориентированного графа без контуров. Пусть алгоритм \mathcal{A}_2^\prec состоит в последовательном применении алгоритма $\tilde{\mathcal{A}}_2$ к подмножествам правильного разбиения списка $S = \{a_i \mid i = 1, \dots, n\}$, т.е. такого разбиения (S^λ) , $\lambda = 1, \dots, \Lambda$, что из $a_i \prec a_j$, $a_i \in S^{\lambda'}$, $a_j \in S^{\lambda''}$ следует $1 \leq \lambda' < \lambda'' \leq \Lambda$. Класс \mathcal{K}_n^\prec случайных списков образуем с помощью схемы n последовательных независимых испытаний: на i -м шаге предмет a_i принимает вес $w_i = w$, длину $h_i = h$ и помещается в подмножество S^{λ_i} согласно дискретному распределению

$$p_{wh\lambda} = Pr\{w_i = w, h_i = h, \lambda_i = \lambda\} \geq 0,$$

$$w = 1, \dots, W; \quad h = 1, \dots, H; \quad \lambda = 1, \dots, \Lambda; \quad \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} p_{wh\lambda} = 1.$$

Будем говорить, что список S обладает некоторым свойством, если им обладает вектор $(p_{1h\lambda}, p_{2h\lambda}, \dots, p_{Wh\lambda})$ для всех $h = 1, \dots, H$; $\lambda = 1, \dots, \Lambda$.

Проведем вероятностный анализ алгоритма \mathcal{A}_2^\prec для W -регулярных списков. Обозначим

$$\delta_{wh\lambda} = 2(np_{wh\lambda}(1 - p_{wh\lambda}) \ln n)^{1/2}.$$

Считаем, что алгоритм \mathcal{A}_2^\prec срабатывает на конкретной реализации случайного списка S , если для всякой тройки индексов w, h, λ осуществилось событие $A_{wh\lambda}$, т.е. выполнено неравенство

$$|\chi_S(w, h, \lambda) - np_{wh\lambda}| < \Delta_{wh\lambda}. \quad (4)$$

В алгоритме \mathcal{A}_2^\prec будем использовать оценочный список с характеристической функцией вида

$$\chi_S^\prec(w, h, \lambda) = \lfloor \varphi(p_{wh\lambda}^{(Q)}) \rfloor + \sum_{k=k_w}^{Q-1} \lceil \varphi(p_{wh\lambda}^{(k)}) \rceil,$$

$w = 1, \dots, W$; $h = 1, \dots, H$; $\lambda = 1, \dots, \Lambda$; где выделенные для любой пары (h, λ) векторы $(p_{1h\lambda}^k, p_{2h\lambda}^k, \dots, p_{Wh\lambda}^k)$, $k = 1, \dots, Q$, — суть 2^k -симметричные составляющие в каноническом разложении W -регулярного вектора $(p_{1h\lambda}, p_{2h\lambda}, \dots, p_{Wh\lambda})$.

Теорема 3. Алгоритм \mathcal{A}_2^\prec на классе \mathcal{K}_n^\prec с W -регулярными случайными списками предметов при

$$WH\Lambda/\beta_p = o(n/\ln n) \quad (5)$$

асимптотически точен с оценками

$$\delta_{\mathcal{A}_2^\prec} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad \varepsilon_{\mathcal{A}_2^\prec} = O\left(\sqrt{\frac{WH\Lambda/\beta_p}{n \ln n}}\right),$$

где

$$\beta_p = \frac{1}{WH} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H whp_{wh}, \quad p_{wh} = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} p_{wh\lambda}.$$

Доказательство проводим по той же схеме, что и в теореме 2.

$$\begin{aligned} \delta_{\mathcal{A}_2^\prec} &= Pr\left\{ \bigcup_{w,h,\lambda} \bar{A}_{wh\lambda} \right\} \leq \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} Pr(\bar{A}_{wh\lambda}) \leq \\ &\leq C_1 \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \exp\left(-\frac{4n \ln np_{wh\lambda}(1 - p_{wh\lambda})}{2np_{wh\lambda}(1 - p_{wh\lambda})}\right) \leq \frac{C_1 WH\Lambda}{n^2} \leq \\ &\leq \frac{C_1 WH\Lambda}{n^2 \beta_p} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\bar{A}_{wh\lambda}$ — событие, противоположное (4).

$$\begin{aligned}
F_S^* &\geq \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} wh \chi_S(w, h, \lambda) > \frac{1}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} wh (np_{wh\lambda} - \Delta_{wh\lambda}) \geq \\
&\geq nH\beta_p - \frac{2\sqrt{n \ln n}}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} wh \sqrt{p_{wh\lambda}} \geq \\
&\geq nH\beta_p - \frac{2\sqrt{n \ln n}}{W} \left(\sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} wh \cdot \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} wh p_{wh\lambda} \right)^{1/2} \geq \\
&\geq nH\beta_p - \frac{2\sqrt{n \ln n}}{W} \left(WH\beta_p \frac{\Lambda W^2 H^2}{2} \right)^{1/2} = nH\beta_p (1 - \sqrt{2\varepsilon_n^{\prec}}),
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\varepsilon_n^{\prec} &= \left(\frac{WH\Lambda/\beta_p}{n/\ln n} \right)^{1/2} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \\
F_{A_2^{\prec}} &\leq \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{h=1}^H h \left[\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w \chi_{\bar{S}}(w, h, \lambda) \right] \leq \\
&\leq \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{h=1}^H h \left(\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w \left(\sum_{k=k_w}^{Q-1} [\varphi(p_{wh\lambda}^{(k)})] + [\varphi(p_{wh\lambda}^{(Q)})] \right) + 1 \right) \leq \\
&\leq \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{h=1}^H h \left(\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w \left(\sum_{k=k_w}^Q \varphi(p_{wh\lambda}^{(k)}) + Q - k_w \right) + 1 \right) \leq \\
&\leq \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{h=1}^H h \left(\frac{1}{W} \sum_{w=1}^W w \left(np_{wh\lambda}^{(k)} + \sum_{k=k_w}^Q 2(n \ln np_{wh\lambda}^{(k)})^{1/2} \right) \right) + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{h=1}^H h \left(1 + \frac{S_1}{W} \right) \leq \\
&\leq \frac{n}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh p_{wh} + \frac{2}{W} \sqrt{n \ln n} \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh ((Q - k_w + 1) p_{wh\lambda})^{1/2} + \\
&+ \frac{\Lambda H(H+1)}{2} \left(1 + \frac{W}{4} \right) \leq nH\beta_p + \Lambda W H^2 + \frac{2\sqrt{n \ln n}}{W} \sum_{w=1}^W \sum_{h=1}^H wh p_{wh} ((Q - k_w + 1) \Lambda p_{wh})^{1/2} = \\
&= nH\beta_p + \Lambda W H^2 + \frac{2\sqrt{\Lambda n \ln n}}{W} \cdot S \leq nH\beta_p + \Lambda W H^2 + 2H \sqrt{\Lambda W H \beta_p n \ln n} = \\
&= nH\beta_p (1 + 2\varepsilon_n^{\prec} + (\varepsilon_n^{\prec})^2 / \ln n), \\
\varepsilon_{A_2^{\prec}} &= \frac{F_{A_2^{\prec}}}{F_S^*} - 1 = \frac{nH\beta_p (1 + 2\varepsilon_n^{\prec} + (\varepsilon_n^{\prec})^2 / \ln n)}{1 - \sqrt{2\varepsilon_n^{\prec}}} \leq \\
&\leq \frac{3.5\varepsilon_n^{\prec} (1 + (\varepsilon_n^{\prec})^2 / (3.5 \ln n))}{1 - 1.5\varepsilon_n^{\prec}} = O(\varepsilon_n^{\prec}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad \square
\end{aligned}$$

Замечание. Скорректируем условие асимптотической точности алгоритма \mathcal{A}_2^{\prec} на случай весов, принимающих значения в целочисленном сегменте $[1, R]$, $R \leq W$. Условие (5) заменяется на менее жесткие соотношения

$$\frac{\Lambda H R}{\beta_p} = o\left(\frac{n}{\ln n}\right), \quad \frac{\Lambda H W}{R \beta_p} = o(n),$$

или

$$\Lambda H R / \beta_p = o(n / \mu_n), \tag{6}$$

где $\mu_n = \max\{\frac{1}{R}, \frac{R \ln n}{W}\}$. При этом $\varepsilon_{\mathcal{A}_2^\zeta} = O(\sqrt{\frac{RH\Lambda/\beta_p}{n/\ln n}})$.

Понятно, что при $R = W$ условия (5) и (6) совпадают, а при $R < W$ класс асимптотически точно решаемых задач становится шире. Действительно, при $R \leq \sqrt{W/\ln n}$ имеем $\gamma_n = 1/R \geq \sqrt{\ln n/W}$, а при $R \geq \sqrt{W/\ln n}$ имеем $\gamma_n = (R \ln n)/W \geq \sqrt{\ln n/W}$ и, таким образом, если $R < W$, то $\sqrt{W/\ln n} \leq \gamma_n < \ln n$.

Приведем без доказательства аналог теоремы 1 для класса \mathcal{K}_n^ζ .

Теорема 4. Алгоритм \mathcal{A}_2^ζ на классе \mathcal{K}_n^ζ с W -асимметричными случайными списками предметов при

$$WH\Lambda = o(n/\ln n)$$

асимптотически точен с оценками

$$\delta_{\mathcal{A}_2^\zeta} = o\left(\frac{1}{n \ln n}\right), \quad \varepsilon_{\mathcal{A}_2^\zeta} = O\left(\sqrt{\frac{W}{n/\ln n}}\right).$$

5. Связь с задачей календарного планирования

Рассмотрим частный случай задачи календарного планирования (ЗКП) в условиях ограниченных ресурсов, формулировку которой можно найти в [5]. Предполагаем, что выполнены следующие условия:

- имеется ограниченный нескладируемый ресурс одного вида, интенсивность выделения которого постоянна на всем протяжении времени выполнения проекта;
- на множестве работ не задано отношение предшествования;
- начальные и директивные сроки выполнения работ отсутствуют, интенсивность потребляемого работой ресурса постоянна на всем протяжении времени выполнения работы.

Если каждой работе сопоставить прямоугольник, ширина и высота которого равны соответственно интенсивности потребления ресурса и длительности выполнения работы, то задачу нахождения допустимого расписания можно интерпретировать как укладку прямоугольников в полубесконечную полосу, ширина которой равна интенсивности выделения ресурса. При этом каждый исходный прямоугольник разрешается разрезать горизонтальными линиями на полосы, которые будем называть *ломтиками*. Во всякой допустимой укладке совокупность вертикальных проекций ломтиков образует отрезок, равный высоте прямоугольника. Допускаются также горизонтальные смещения ломтиков. Очевидно, эта задача является NP -трудной. Действительно, если мы рассмотрим ЗКП, в которой длительности всех работ равны, то полученная задача будет эквивалентна задаче упаковки в контейнеры.

Из приведенной постановки легко заметить, что без разбиения прямоугольников на ломтики предложенная ЗКП в точности совпадает с ЗУП. Разрешение перемещения ломтиков позволяет в ряде случаев построить из оптимального решения ЗУП (которое, очевидно, является допустимым решением ЗКП) еще более короткое расписание для ЗКП. Следовательно, решение ЗКП можно рассматривать как нижнюю оценку для ЗУП. Решение ЗУП в свою очередь является верхней оценкой для ЗКП. Представляет несомненный интерес отношение оптимальных значений целевых функций ЗУП и ЗКП.

Обозначим оптимальные значения функционалов ЗУП и ЗКП на списке предметов S через $\text{ЗУП}(S)$ и $\text{ЗКП}(S)$ соответственно. Пусть

$$\rho = \sup_S \frac{\text{ЗУП}(S)}{\text{ЗКП}(S)}.$$

Из доказательства верхней оценки для $\text{ЗУП}(S)$, полученной в [7] с помощью алгоритма NFDH, имеем оценку $\rho \leq 3$.

С другой стороны, в [5] содержится пример списка работ, в котором $\rho \geq 6/5$. В работе [6] этот результат усилен следующим образом. Рассмотрим список из 9 предметов, представленных

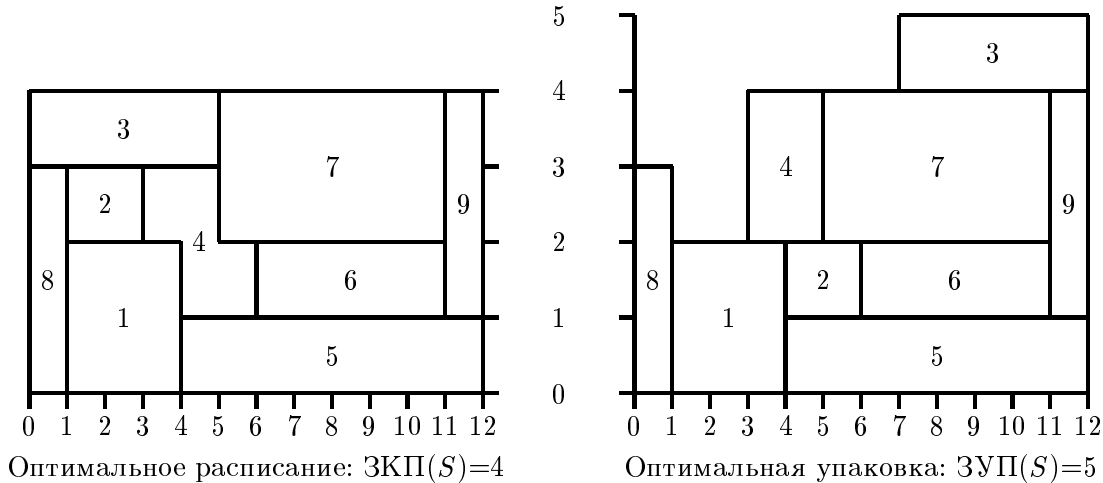
в нижеследующей таблице при упаковке их в полосу с шириной $W = 12$. В [6] доказано, что минимальные высоты полос в ЗКП и ЗУП равны соответственно 4 и 5. Отличие минимальных значений целевых функций обеих задач для рассматриваемого списка составляет 25 процентов. На рисунке представлены точные решения обеих задач.

Таким образом, справедливы неравенства

$$\frac{5}{4} \leq \rho \leq 3.$$

| Предмет | Ширина | Высота | Время |
|---------|--------|--------|-------|
| 1 | 3 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 1 | 2 |
| 3 | 5 | 1 | 3 |
| 4 | 2 | 2 | 1 |
| 5 | 8 | 1 | 0 |
| 6 | 5 | 1 | 1 |
| 7 | 6 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 3 | 0 |
| 9 | 1 | 3 | 1 |

Обозначим через $\tilde{\mathcal{K}}_n^2$ класс задач календарного планирования с постоянным по времени однотипным нескладируемым ограниченным ресурсом и работами — прямоугольниками в случае отсутствия директивных событий. Если на множестве работ дополнительно задано отношение частичного порядка, то такой класс задач будем обозначать через $\mathcal{K}_n^<$. Соответствующие приближенные алгоритмы обозначим через $\tilde{\mathcal{A}}_2$ и $\mathcal{A}_2^<$.



Непосредственно из формулировок задач следует

Лемма 3. *Задача упаковки в полосу является оценочной сверху для ЗКП из класса $\mathcal{K}_n^<$.*

Тем не менее, из теорем 2 и 3, полученных для ЗУП с W -регулярными случайными списками, вытекают следующие утверждения для упомянутого частного случая ЗКП.

Теорема 5. *В случае W -регулярных случайных списков из класса $\mathcal{K}_n^<$ алгоритм $\tilde{\mathcal{A}}_2$ при*

$$WH/\beta_p = o(n/\ln n)$$

приводит к асимптотически точному решению ЗКП.

Теорема 6. В случае W -регулярных случайных списков из класса $\mathcal{K}_n^{\leftarrow}$ алгоритм A_2^{\leftarrow} при

$$WH\Lambda/\beta_p = o(n/\ln n)$$

приводит к асимптотически точному решению ЗКП.

Литература

1. Coffman E.G., Garey M.R., Johnson D.S. *Approximation algorithms for bin-packing. — An updated survey* // Algorithm Design for Computer System Design. CISM courses and lectures. — 1984. — № 284. — P. 49–106.
2. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. *Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации* // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1975. — Вып. 31. — С. 35–42.
3. Гимади Э.Х., Залюбовский В.В. *Задача упаковки в контейнеры: асимптотически точный подход* // Изв. вузов. Математика. — 1997. — № 12. — С. 25–33.
4. Frederickson G.N. *Probabilistic analysis for simple one- and two-dimensional bin packing algorithms* // Information Processing Letters. — 1980. — V. 11. — № 4–5. — P. 156–161.
5. Гимади Э.Х. *О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов* // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988. — Т. 10. — С. 89–115.
6. Шарыгин П.И. *Оценки приближенного решения одной задачи календарного планирования* // Дискретный анализ и исследование операций. — 1995. — Т. 2. — № 1. — С. 57–67.
7. Coffman E.G., Garey M.R., Johnson D.S., Tarjan R.E. *Performance bounds for level-oriented two-dimensional packing algorithms* // SIAM J. Comput. — 1980. — V. 9. — № 4. — P. 808–826.

*Институт математики Сибирского отделения
Российской Академии наук*

Новосибирский государственный университет

*Поступила
23.09.1997*