ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 6 (541)

УДК 517.956

О.А. КОЩЕЕВА

ОБ УСЛОВИЯХ ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТАРШИМИ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Речь идет об уравнениях вида

$$u_{(m_1,\dots,m_n)}(x)+\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(i_1,\dots,i_n)}(x)u_{(i_1,\dots,i_n)}(x)=f(x), \tag{1}$$

где $x=(x_1,\dots,x_n)$ — точки некоторой области D евклидова пространства, m_k, i_k, $k=\overline{1,n}$, — целые неотрицательные числа, $u_{(i_1,\dots,i_n)}(x)=\frac{\partial^{i_1+\dots+i_n}u(x)}{\partial x_1{}^{i_1}\dots\partial x_n{}^{i_n}}$, $\Big[\sum\limits_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum\limits_{i_n=0}^{m_n}\Big]=\sum\limits_{i_1+\dots+i_n\le r-1}$, $r=m_1+\dots+m_n$.

Уравнения (1) встречаются в приложениях: фильтрация жидкости в пористых средах [1], поглощение почвенной влаги корнями растений ([2], с. 262), интегральные представления преобразований дифференциальных операторов ([3], с. 5–13), теория аппроксимации и отображений ([4], сс. 63, 109) и др. Обзор многих результатов имеется в монографии [5]. В данной статье приводятся условия на коэффициенты в (1), обеспечивающие возможность понижения порядка уравнения. При этом не будем писать в уравнении аргумент x и будем использовать обозначения

$$(x_1,\dots,t,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{j-1},t,x_{j+1},\dots,x_n),$$
$$(i_1,\dots,k,\dots,i_n)=(i_1,\dots,i_{j-1},k,i_{j+1},\dots,i_n),$$
$$\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_j=0}^{k}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]=\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_j=0}^{k}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big],$$
$$a^{(i_1,\dots,i_{j-1},k,i_{j+1},\dots,i_n)}=a^{(i_1,\dots,k,\dots,i_n)},\quad u_{(i_1,\dots,i_{j-1},k,i_{j+1},\dots,i_n)}=u_{(i_1,\dots,k,\dots,i_n)}.$$

1. Сначала найдем условия, позволяющие представить (1) в виде системы двух уравнений, одно из которых содержит дифференцирование искомой функции лишь по одной независимой переменной.

Теорема 1. *Пусть при некотором* j $(1\le j\le n)$ *таком, что* $m_j>1$, *коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям* $\frac{\partial^{i_j}a^{(i_1,\dots,i_n)}}{\partial x_j^{i_j}}$, $f\in C(D)$, $i_k=\overline{0,m_k}$, $k=\overline{1,n}$. *Если выполнены тождества*

$$a^{(i_1,\dots,i_n)}-C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}-\sum_{i=i_j}^{m_j-1}a^{(m_1,\dots,i,\dots,m_n)}C_i^{i_j}\frac{\partial^{i-i_j}}{\partial x_j^{i-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}\equiv 0, \tag{2}$$

$i_k=\overline{0,m_k}$, $k\ne j$, $i_j=\overline{0,m_j-1}$, $i_1+\dots+i_{j-1}+i_{j+1}+\dots+i_n<r-m_j$, *то уравнение* (1) *принимает вид*

$$u_{(m_1,\dots,0,\dots,m_n)}+\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,0,\dots,i_n)}=v,$$

где функция v является решением уравнения

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v + \sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v = f. \tag{3}$$

Доказательство. Преобразуем (1) с помощью правила Лейбница следующим образом:

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}\Big(u_{(m_1,\dots,0,\dots,m_n)} + \Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,0,\dots,i_n)}\Big) +$$
$$+\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(i_1,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,i_n)} -$$
$$-\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]\sum_{i_j=0}^{m_j-1} C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,i_n)} = f.$$

Если ввести функцию

$$v = u_{(m_1,\dots,0,\dots,m_n)} + \Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,0,\dots,i_n)}, \tag{4}$$

то уравнение (1) запишется в виде

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v + \Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\Big(a^{(i_1,\dots,i_n)} - C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}\Big)u_{(i_1,\dots,i_n)} +$$
$$+\sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}u_{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)} = f. \tag{5}$$

Из (4) находим

$$u_{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)} = \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}\Big(v - \Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,0,\dots,i_n)}\Big) =$$
$$= \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v - \Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]\sum_{i=0}^{i_j} C_{i_j}^{i}\frac{\partial^{i_j-i}}{\partial x_j^{i_j-i}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,i,\dots,i_n)}.$$

Подставив это выражение в (5), получим

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v + \sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v +$$
$$+\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\Big(a^{(i_1,\dots,i_n)} - C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}\Big)u_{(i_1,\dots,i_n)} -$$
$$-\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\sum_{i=0}^{i_j}\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}C_{i_j}^{i}\frac{\partial^{i_j-i}}{\partial x_j^{i_j-i}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}u_{(i_1,\dots,i,\dots,i_n)} = f.$$

В последней сумме поменяем порядок суммирования и переобозначим индексы суммирования:

$$\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\sum_{i=0}^{i_j} a_{i_j,\,i} = \sum_{i=0}^{m_j-1}\sum_{i_j=i}^{m_j-1} a_{i_j,\,i} = \sum_{i_j=0}^{m_j-1}\sum_{i=i_j}^{m_j-1} a_{i,\,i_j}.$$

Тогда уравнение (5) (а значит, и (1)) запишется в виде

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-1}a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v+$$
$$+\Big[\sum_{i_1=0}^{m_1}\cdots\sum_{i_{j-1}=0}^{m_{j-1}}\sum_{i_{j+1}=0}^{m_{j+1}}\cdots\sum_{i_n=0}^{m_n}\Big]\sum_{i_j=0}^{m_j-1}\Big(a^{(i_1,\dots,i_n)}-C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}-$$
$$-\sum_{i=i_j}^{m_j-1}a^{(m_1,\dots,i,\dots,m_n)}C_i^{i_j}\frac{\partial^{i-i_j}}{\partial x_j^{i-i_j}}a^{(i_1,\dots,m_j,\dots,i_n)}\Big)u_{(i_1,\dots,i,\dots,i_n)}=f.$$

Очевидно, если выполняются условия (2), то для функции v получим уравнение (3). $\square$

Если (3) решается в квадратурах, то для функции u получим уравнение (4), в котором отсутствует дифференцирование по переменной x_j, т. е. порядок исходного уравнения будет понижен на m_j единиц.

Количество тождеств в условиях (2) для фиксированного j равно

$$N=[(m_1+1)\dots(m_{j-1}+1)(m_{j+1}+1)\dots(m_n+1)-1]m_j.$$

Всего имеется n вариантов тождеств вида (2). При этом в каждом случае порядок уравнения будет понижен на соответствующее значение m_j.

Таким образом, при выполнении тождеств (3) задача понижения порядка уравнения в частных производных сводится к задаче отыскания решения уравнения высшего порядка с дифференцированием лишь по одной из переменных. Теория обыкновенных линейных дифференциальных уравнений не переносится дословно на случай (3). В частности, теорема о том, что вронскиан m_j решений или тождественно равен нулю, или в нуль не обращается, уже не имеет места. Действительно, достаточно рассмотреть решения $v_1=\exp(x_1x_2)$, $v_2=\exp(x_1x_2^2)$ уравнения $\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}v-x_2(x_2+1)\frac{\partial}{\partial x_1}v+x_2^3v=0$, вронскиан которых равен

$$W(x_1,x_2)=x_2(x_2-1)\exp[x_2(x_2+1)x_1].$$

Этот пример приведен в [6], там же предложена некоторая модификация указанной общей теории, делающая ее пригодной и для (3). Для нас же основным является вопрос о разрешимости (3) в квадратурах.

2. Будем искать условия разрешимости, предполагая, что

$$\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\in C(D),\quad i_j=\overline{0,m_j-1}. \tag{6}$$

Теорема 2. *Пусть существует такая функция* $c\equiv c(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$, *что коэффициенты уравнения* (3) *удовлетворяют* (6) *и имеют вид*

$$a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\equiv C_{m_j}^{i_j}\frac{\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}k}{k},\quad i_j=\overline{0,m_j-2}, \tag{7}$$

причем $k\equiv k(x_1,\dots,x_n)=c\exp\Big[\int\frac{a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}}{m_j}dx_j\Big]$. *Тогда решение* (3) *дается формулой*

$$v=\frac{\int\cdots\int(kf)\underbrace{dx_j\dots dx_j}_{m_j}+\sum\limits_{s=0}^{m_j-1}x_j^sA_s}{k}, \tag{8}$$

где $A_s\equiv A_s(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$, $s=\overline{0,m_j-1}$, — *произвольные непрерывные функции.*

Доказательство. Действительно, умножим обе части уравнения (3) на функцию $k = k(x_1, \dots, x_n)$:

$$k\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v + \sum_{i_j=0}^{m_j-1} k a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v = kf. \tag{9}$$

Выражение, стоящее в левой части уравнения (9), является точной производной порядка m_j по переменной x_j от функции kv при условиях

$$ka^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)} \equiv C_{m_j}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-i_j}}{\partial x_j^{m_j-i_j}}k, \quad i_j = \overline{0, m_j-1},$$

которые в силу (7) имеют место. Если $i_j = m_j - 1$, то это тождество примет вид

$$ka^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)} \equiv m_j\frac{\partial}{\partial x_j}k.$$

Отсюда

$$\int \frac{a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}}{m_j}dx_j = \ln|k| + \gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n).$$

В качестве γ можно, очевидно, взять любую непрерывную функцию.

Положим $\gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \equiv -\ln c(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, отсюда, в частности, следует

$$k = c(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)\exp\left[\int \frac{a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}}{m_j}dx_j\right],$$

что совпадает с предположением теоремы. Таким образом, уравнение (9) при условиях (7) принимает вид $\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}(kv) = kf$. Проинтегрировав его m_j раз по переменной x_j, получим (8). □

Теорема 3. *Если коэффициенты уравнения* (3) *удовлетворяют условиям* (6) *и выполняются тождества*

$$a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)} \equiv C_{m_j-1}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-1-i_j}}{\partial x_j^{m_j-1-i_j}}a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}, \quad i_j = \overline{0, m_j-2}, \tag{10}$$

то его решение v находится из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x_j}v + a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}v = \int\cdots\int f \underbrace{dx_j \dots dx_j}_{m_j-1} + \sum_{s=0}^{m_j-2} x_j^s A_s, \tag{11}$$

где $A_s \equiv A_s(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$, $s = \overline{0, m_j-2}$, — произвольные непрерывные функции.

Доказательство. Убедиться в справедливости этого утверждения можно на основе тождеств

$$\sum_{i_j=0}^{m_j-1} a^{(m_1,\dots,i_j,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v \equiv \frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}\left(a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}v\right),$$

выполняющихся при условиях (10). Это следует из соотношений

$$\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}\left(a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}v\right) = \sum_{i_j=0}^{m_j-1} C_{m_j-1}^{i_j}\frac{\partial^{m_j-1-i_j}}{\partial x_j^{m_j-1-i_j}}a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v.$$

При выполнении условий (10) уравнение (3) примет вид

$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v + \frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}\left(a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}v\right) = f$$

или, что то же самое,
$$\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}v+a^{(m_1,\ldots,m_j-1,\ldots,m_n)}v\right)=f.$$

Проинтегрировав это уравнение m_j-1 раз по переменной x_j, получим утверждение теоремы. Очевидно, линейное дифференциальное уравнение (11) решается в квадратурах.

Теорема 4. *Если коэффициенты уравнения* (3) *удовлетворяют условиям* (6) *и выполняются тождества*
$$\sum_{k=1}^{m_j-t-1}(-1)^k C_{k+t}^t\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\ldots,k+t,\ldots,m_n)}\equiv 0,\quad t=\overline{0,m_j-2},$$
то его решение находится из уравнения (11).

Доказательство может быть построено на идее последовательного понижения порядка рассматриваемого уравнения на единицу с привлечением метода математической индукции. Перепишем уравнение (3) в виде
$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v+\sum_{i_j=1}^{m_j-1}a^{(m_1,\ldots,i_j,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v+a^{(m_1,\ldots,0,\ldots,m_n)}v=f.$$

Учитывая, что
$$a^{(m_1,\ldots,i_j,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{(m_1,\ldots,i_j,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j-1}}{\partial x_j^{i_j-1}}v\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,i_j,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j-1}}{\partial x_j^{i_j-1}}v,\quad i_j\geq 1,$$
перепишем его
$$\frac{\partial^{m_j}}{\partial x_j^{m_j}}v+\sum_{i_j=1}^{m_j-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(a^{(m_1,\ldots,i_j,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j-1}}{\partial x_j^{i_j-1}}v\right)-\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,i_j,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j-1}}{\partial x_j^{i_j-1}}v\right)+a^{(m_1,\ldots,0,\ldots,m_n)}v=f.$$

Сделав замену индекса суммирования i_j на i_j+1 и совершив некоторые очевидные преобразования, представим его следующим образом:
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-2}a^{(m_1,\ldots,i_j+1,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v\right)-\sum_{i_j=1}^{m_j-2}\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,i_j+1,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v-$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,1,\ldots,m_n)}v+a^{(m_1,\ldots,0,\ldots,m_n)}v=f.$$

Далее, учитывая
$$\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,i_j+1,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,i_j+1,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j-1}}{\partial x_j^{i_j-1}}v\right)-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}a^{(m_1,\ldots,i_j+1,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j-1}}{\partial x_j^{i_j-1}}v,\quad i_j\geq 1,$$
запишем его в виде
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-2}a^{(m_1,\ldots,i_j+1,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v-\sum_{i_j=0}^{m_j-3}\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,i_j+2,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v\right)+$$
$$+\sum_{i_j=1}^{m_j-3}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}a^{(m_1,\ldots,i_j+2,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v+$$
$$+\left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}a^{(m_1,\ldots,2,\ldots,m_n)}-\frac{\partial}{\partial x_j}a^{(m_1,\ldots,1,\ldots,m_n)}+a^{(m_1,\ldots,0,\ldots,m_n)}\right)v=f.\quad (12)$$

Затем, применяя ко второй строке (12) только что изложенный прием, получим некоторый аналог (12). Продолжая эту процедуру, окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-2}a^{(m_1,\dots,i_j+1,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v+\dots+$$

$$+(-1)^k\sum_{i_j=0}^{m_j-1-k}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j^{k-1}}a^{(m_1,\dots,i_j+k,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v+\ldots+$$

$$+(-1)^{m_j}\frac{\partial^{m_j-2}}{\partial x_j^{m_j-2}}a^{(m_1,\dots,m_j-1,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v\Bigg)+\sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,i_j+1,\dots,m_n)}v=f$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{k=1}^{m_j-1}\sum_{i_j=0}^{m_j-1-k}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j^{k-1}}a^{(m_1,\dots,i_j+k,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,k,\dots,m_n)}v=f.$$

Изменим порядок суммирования в двойной сумме

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Bigg(\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-2}\sum_{k=1}^{m_j-1-i_j}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j^{k-1}}a^{(m_1,\dots,i_j+k,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,k,\dots,m_n)}v=f. \quad (13)$$

Таким образом, при выполнении тождества

$$\sum_{k=0}^{m_j-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,k,\dots,m_n)}\equiv 0 \quad (14)$$

порядок уравнения понижается на единицу путем интегрирования (13) по переменной x_j:

$$\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-2}\sum_{k=1}^{m_j-1-i_j}(-1)^{k-1}\frac{\partial^{k-1}}{\partial x_j^{k-1}}a^{(m_1,\dots,i_j+k,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\int f\,dx_j+c_1,$$

где $c_1\equiv c_1(x_1,\dots,x_{j-1},x_{j+1},\dots,x_n)$ — произвольная непрерывная функция. Сделав замену индекса суммирования k на $k+1$, имеем

$$\frac{\partial^{m_j-1}}{\partial x_j^{m_j-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-2}\sum_{k=0}^{m_j-i_j-2}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,i_j+k+1,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\int f\,dx_j+c_1. \quad (15)$$

Порядок уравнения понижен на единицу. Выясним, как будет выглядеть условие понижения порядка на единицу для уравнения (15), играющее роль (14). Обозначим $f_1=\displaystyle\int f\,dx_j+c_1$. Коэффициент уравнения при производной порядка i_j имеет вид

$$\sum_{l=0}^{m_j-i_j-2}(-1)^l\frac{\partial^l}{\partial x_j^l}a^{(m_1,\dots,i_j+l+1,\dots,m_n)}.$$

Записывая условие (14) для (15), получим

$$\sum_{k=0}^{m_j-2}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\Bigg(\sum_{l=0}^{m_j-k-2}(-1)^l\frac{\partial^l}{\partial x_j^l}a^{(m_1,\ldots,k+l+1,\ldots,m_n)}\Bigg)\equiv 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{m_j-2}\sum_{l=0}^{m_j-k-2}(-1)^{k+l}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^{k+l}}a^{(m_1,\ldots,k+l+1,\ldots,m_n)}\equiv 0.$$

Сделаем замену индекса суммирования $r=k+l$

$$\sum_{k=0}^{m_j-2}\sum_{r=k}^{m_j-2}(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}a^{(m_1,\ldots,r+1,\ldots,m_n)}\equiv 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{m_j-2}(k+1)(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\ldots,k+1,\ldots,m_n)}\equiv 0. \qquad (16)$$

При выполнении этого тождества получим уравнение, аналогичное (15), порядок которого равен m_j-2,

$$\frac{\partial^{m_j-2}}{\partial x_j^{m_j-2}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-3}\sum_{k=0}^{m_j-3-i_j}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\Bigg(\sum_{l=0}^{m_j-i_j-k-3}(-1)^l\frac{\partial^l}{\partial x_j^l}a^{(m_1,\ldots,i_j+k+l+2,\ldots,m_n)}\Bigg)\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=$$
$$=\int f_1dx_j+c_2,$$

где $c_2\equiv c_2(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)$ — произвольная непрерывная функция. Преобразовав левую часть этого уравнения, запишем его в форме

$$\frac{\partial^{m_j-2}}{\partial x_j^{m_j-2}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-3}\sum_{k=0}^{m_j-3-i_j}\sum_{l=0}^{m_j-i_j-k-3}(-1)^{k+l}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^{k+l}}a^{(m_1,\ldots,i_j+k+l+2,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\int f_1dx_j+c_2.$$

Сделаем замену индекса суммирования $r=k+l$

$$\frac{\partial^{m_j-2}}{\partial x_j^{m_j-2}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-3}\sum_{k=0}^{m_j-3-i_j}\sum_{r=k}^{m_j-i_j-3}(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}a^{(m_1,\ldots,i_j+r+2,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\int f_1dx_j+c_2.$$

Учитывая, что

$$\sum_{r=k}^{m_j-i_j-3}(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}a^{(m_1,\ldots,i_j+r+2,\ldots,m_n)}=(k+1)(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\ldots,i_j+k+2,\ldots,m_n)},$$

последнее соотношение запишем в форме

$$\frac{\partial^{m_j-2}}{\partial x_j^{m_j-2}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-3}\sum_{k=0}^{m_j-3-i_j}(k+1)(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\ldots,i_j+k+2,\ldots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\int f_1dx_j+c_2.$$

Обозначим $f_2=\int f_1dx_j+c_2$, $f_t=\int f_{t-1}dx_j+c_t$, $t\geq 2$. Для дальнейших рассуждений будем использовать равенство

$$\sum_{k=1}^{n+1}k(k+1)\ldots(k+i)=\frac{(n+1)\ldots(n+i+2)}{i+2},\quad n,i\in\mathbf{N}, \qquad (17)$$

которое нетрудно доказать индукцией по n, i. Уравнение, порядок которого понижен на t единиц при помощи изложенного метода, будет иметь вид

$$\frac{\partial^{m_j-t}}{\partial x_j^{m_j-t}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-t-1}\sum_{k=0}^{m_j-i_j-t-1}(-1)^k\frac{(k+1)\dots(k+t-1)}{(t-1)!}\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,i_j+k+t,\dots,m_n)}\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=$$
$$=\int f_t dx_j,\quad (18)$$

а соответствующее условие, достаточное для понижения порядка этого уравнения на единицу, задается равенством

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1}(-1)^k\frac{(k+1)(k+2)\dots(k+t)}{t!}\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}a^{(m_1,\dots,k+t,\dots,m_n)}\equiv 0. \quad (19)$$

Для доказательства этого опять используем метод математической индукции. При $t=1$ утверждение справедливо, т.к. уравнение (18) совпадает с (15), а условие (19) — с тождеством (16). Условие понижения порядка уравнения (18) на единицу, аналогичное (16), примет вид

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\left(\sum_{l=0}^{m_j-k-t-1}(-1)^l\frac{(l+1)\dots(l+t-1)}{(t-1)!}\frac{\partial^l}{\partial x_j^l}a^{(m_1,\dots,l+k+t,\dots,m_n)}\right)\equiv 0$$

или

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1}\sum_{l=0}^{m_j-k-t-1}(-1)^{k+l}\frac{(l+1)\dots(l+t-1)}{(t-1)!}\frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^{k+l}}a^{(m_1,\dots,l+k+t,\dots,m_n)}\equiv 0.$$

Сделаем замену индекса суммирования $r=k+l$

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1}\sum_{r=k}^{m_j-t-1}(-1)^r\frac{(r-k+1)\dots(r-k+t-1)}{(t-1)!}\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}a^{(m_1,\dots,r+t,\dots,m_n)}\equiv 0.$$

Изменим порядок суммирования

$$\sum_{r=0}^{m_j-t-1}\left(\sum_{k=0}^{r}\frac{(r-k+1)\dots(r-k+t-1)}{(t-1)!}\right)(-1)^r\frac{\partial^r}{\partial x_j^r}a^{(m_1,\dots,r+t,\dots,m_n)}\equiv 0.$$

Используя формулу (17), вычислим

$$\sum_{k=0}^{r}\frac{(r-k+1)\dots(r-k+t-1)}{(t-1)!}=\frac{(r+1)\dots(r+t-1)+\dots+1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(t-1)}{(t-1)!}=$$
$$=\frac{(r+1)\dots(r+t-1)(r+t)}{t(t-1)!}=\frac{(r+1)\dots(r+t)}{t!}.$$

Тогда условие понижения порядка совпадет с (19). Выясним вид уравнения, в соответствии с (15), порядок которого понижен на $t+1$,

$$\frac{\partial^{m_j-t-1}}{\partial x_j^{m_j-t-1}}v+\sum_{i_j=0}^{m_j-t-2}\sum_{k=0}^{m_j-t-i_j-2}(-1)^k\frac{\partial^k}{\partial x_j^k}\left(\sum_{l=0}^{m_j-i_j-k-t-2}(-1)^l\frac{(l+1)\dots(l+t-1)}{(t-1)!}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\partial^l}{\partial x_j^l}a^{(m_1,\dots,i_j+k+l+t+1,\dots,m_n)}\right)\frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}}v=\int f_t dx_j+c_{t+1},$$

где $c_{t+1} \equiv c_{t+1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$,

$$\frac{\partial^{m_j-t-1}}{\partial x_j^{m_j-t-1}}v + \sum_{i_j=0}^{m_j-t-2} \sum_{k=0}^{m_j-t-i_j-2} \sum_{l=0}^{m_j-i_j-k-t-2} (-1)^{k+l} \frac{(l+1)\ldots(l+t-1)}{(t-1)!} \times$$
$$\times \frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^{k+l}} a^{(m_1,\ldots,i_j+k+l+t,\ldots,m_n)} \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}} v = f_{t+1}.$$

Сделаем замену индекса суммирования $r = k + l$ и изменим порядок суммирования, тогда

$$\sum_{k=0}^{m_j-t-i_j-2} \sum_{l=0}^{m_j-i_j-k-t-2} (-1)^{k+l} \frac{(l+1)\ldots(l+t-1)}{(t-1)!} \frac{\partial^{k+l}}{\partial x_j^{k+l}} a^{(m_1,\ldots,i_j+k+l+t+1,\ldots,m_n)} =$$
$$= \sum_{k=0}^{m_j-t-i_j-2} \sum_{r=0}^{m_j-i_j-t-2} (-1)^{r} \frac{(r-k+1)\ldots(r-k+t-1)}{(t-1)!} \frac{\partial^{r}}{\partial x_j^{r}} a^{(m_1,\ldots,i_j+r+t+1,\ldots,m_n)} =$$
$$= \sum_{r=0}^{m_j-t-i_j-2} \left(\sum_{k=0}^{r} \frac{(r-k+1)\ldots(r-k+t-1)}{(t-1)!} \right) (-1)^{r} \frac{\partial^{r}}{\partial x_j^{r}} a^{(m_1,\ldots,i_j+r+t+1,\ldots,m_n)} =$$
$$= \sum_{r=0}^{m_j-t-i_j-2} \frac{(r+1)\ldots(r+t)}{t!} (-1)^{r} \frac{\partial^{r}}{\partial x_j^{r}} a^{(m_1,\ldots,i_j+r+t+1,\ldots,m_n)}.$$

Уравнение, порядок которого понижен на $t + 1$, есть

$$\frac{\partial^{m_j-t-1}}{\partial x_j^{m_j-t-1}}v + \sum_{i_j=0}^{m_j-t-2} \sum_{k=0}^{m_j-t-i_j-2} (-1)^{k} \frac{(k+1)\ldots(k+t)}{t!} \frac{\partial^{k}}{\partial x_j^{k}} a^{(m_1,\ldots,i_j+k+t+1,\ldots,m_n)} \frac{\partial^{i_j}}{\partial x_j^{i_j}} v = f_{t+1}.$$

Оно соответствует (18), где вместо t взято $t + 1$. При $t = m_j - 1$ получим линейное уравнение первой степени

$$\frac{\partial}{\partial x_j}v + a^{(m_1,\ldots,m_j-1,\ldots,m_n)}v = \int \cdots \int f \underbrace{dx_j \ldots dx_j}_{m_j-1} + \sum_{s=0}^{m_j-2} x_j^s A_s,$$

разрешимое в квадратурах. Таким образом, для того чтобы решить уравнение с помощью данного метода, достаточно выполнения следующих условий:

$$\sum_{k=0}^{m_j-1} (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} a^{(m_1,\ldots,k,\ldots,m_n)} \equiv 0,$$
$$\sum_{k=0}^{m_j-t-1} (-1)^k \frac{(k+1)\ldots(k+t)}{t!} \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} a^{(m_1,\ldots,k+t,\ldots,m_n)} \equiv 0, \quad t = \overline{1, m_j-2}.$$

Компактнее оба эти условия записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{m_j-t-1} (-1)^k C_{k+t}^t \frac{\partial^k}{\partial x_j^k} a^{(m_1,\ldots,k+t,\ldots,m_n)} \equiv 0, \quad t = \overline{0, m_j-2}. \quad \square$$

3. Применяя изложенные рассуждения к конкретным уравнениям вида (1), получим условия их разрешимости в квадратурах. Например, для уравнения пятого порядка

$$u_{(3\,2)} + a^{(3\,1)}u_{(3\,1)} + a^{(3\,0)}u_{(3\,0)} + a^{(2\,2)}u_{(2\,2)} + a^{(1\,2)}u_{(1\,2)} + a^{(0\,2)}u_{(0\,2)} + a^{(2\,1)}u_{(2\,1)} +$$
$$+ a^{(2\,0)}u_{(2\,0)} + a^{(1\,1)}u_{(1\,1)} + a^{(1\,0)}u_{(1\,0)} + a^{(0\,1)}u_{(0\,1)} + a^{(0\,0)}u_{(0\,0)} = f \quad (20)$$

применение теорем 2–4 приводит к двенадцати наборам тождеств, при выполнении любого из которых уравнение (20) решается в квадратурах.

Литература

1. Шхануков М.Х. *О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 4. – С. 689–699.
2. Нахушев А.М. *Уравнения математической биологии.* — М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.
3. Фаге М.К., Нагнибида Н.И. *Проблема эквивалентности обыкновенных линейных дифференциальных операторов.* – Новосибирск: Наука, 1987. – 280 с.
4. Бондаренко Б.А. *Базисные системы полиномиальных и квазиполиномиальных решений уравнений в частных производных.* – Ташкент: ФАН, 1987. – 146 с.
5. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Казанск. матем. об-во, 2001. – 226 с.
6. Жегалов В. И. *Об одной системе уравнений смешанного типа высшего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1975. — № 6. – С. 25–35.

Казанский государственный университет

Поступила
05.09.2005