ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 10 (449)

УДК 517.583 : 517.962.2

С.Д. СИМОНЖЕНКОВ

О РЕКУРСИВНОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

Введение

В работе решается задача о массовом вычислении интегралов

$$S_{mn} = \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-1/2} (\sin t)^{2m+p} (\cos t)^{2n+q} dt,$$

$$F_{mn} = (-1)^m \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-n-1/2} \cos 2mt \, dt$$

при заданных $-1 < p, q \leq 1$, $0 < k < 1$, где m, n — целые неотрицательные числа, верхние границы изменения которых равны соответственно M и N. Так как при больших M, N для вычисления интегралов потребуется много машинного времени, то предлагается способ, основанный на получении интегралов из разностных уравнений, которым они удовлетворяют относительно одного индекса при фиксированном другом.

Заметим, что интегралы S_{mn}, F_{mn}, а также родственные им, получаемые заменой $\pi/2$ на π или 2π и выражения $1 - k^2 \sin^2 t$ на $1 - k^2 \cos t$ или $1 - 2k \cos t + k^2$, часто встречаются в анализе и приложениях. Так, интегралы S_{mn} использовались в релятивистской физике [1], интегралы F_{mn} — в теории крыла [2]. Кроме того, интегралы $F_{mn} = F_{mn}(k)$ связаны с коэффициентами Лапласа

$$L_{mn} = L_{mn}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2)^{-n-1/2} \cos mt \, dt, \quad 0 < \alpha < 1,$$

играющими важную роль в небесной механике. Имеет место равенство

$$\pi(1+\alpha)^{2n+1} L_{nm}(\alpha) = 4F_{mn}(k),$$

позволяющее одни интегралы находить через другие. Здесь параметры α, k связаны между собой соотношениями

$$k = 2\alpha^{1/2}/(1+\alpha) \Leftrightarrow \alpha = (1-k')/(1+k'), \quad k' = (1-k^2)^{1/2}.$$

Отметим, что интегралы S_{mn} выражаются через гипергеометрическую функцию Гаусса ${}_2F_1(a, b; c; z)$ ([3], с. 403); аналогичная связь F_{mn} с ${}_2F_1$ указана ниже. При малых значениях параметра k (модуля) соответствующие гипергеометрические ряды сходятся достаточно быстро. Вычислительная проблема возникает, когда k близко к единице. В таких случаях возможно использование соответствующих асимптотических формул при $k \to 1$ [1], [4]. Однако их практическая реализация ввиду громоздкости не всегда легко осуществима.

В данной работе предлагается способ вычисления интегралов S_{mn} при целых p, q и интегралов F_{mn} в случае большого модуля ($k^2 > 1/2$) на основе следующих разностных уравнений:

$$(2m+2n+p+q+1)y_{m+1} - [(2m+p)(1+x) + (2n+q)x]y_m + (2m+p-1)xy_{m-1} = 0, \quad (1)$$

$$(2n+2m+p+q+1)z_{n+1} - [(2n+q)(1+x) + (2m+p)x]z_n + (2n+q-1)xz_{n-1} = 0, \quad (2)$$

$$(m-n+1/2)y_{m+1} - 2mxy_m + (m+n-1/2)y_{m-1} = 0, \quad (3)$$

$$(n^2 - 1/4)z_{n+1} - n(n-1/2)(1+x)z_n + (n^2 - n + 1/4 - m^2)xz_{n-1} = 0. \quad (4)$$

Здесь x — действительный параметр, причем в (1) и (3) предполагается, что $n = \mathrm{const}$, $m = 1, 2, \ldots$, а в (2) и (4) — наоборот.

Будет использована следующая терминология. Говорят, что решение $\{f_n\}$разностного уравнения

$$y_{n+1} + a_n y_n + b_n y_{n-1} = 0, \quad n \geq 1,$$

является минимальным, если $f_n \neq 0$ при любом n и $f_n = o(g_n)$ $(n \to \infty)$ для любого другого решения $\{g_n\}$, линейно независимого с $\{f_n\}$. В этом случае решение $\{g_n\}$ называется доминантным.

Известно, что нахождение минимального решения из разностного уравнения прямой рекурсией (т.е. в сторону возрастания n на основе начальных значений f_0 и f_1) — процесс численно неустойчивый. Наоборот, доминантное решение благополучно находится прямой рекурсией.

В настоящее время разработан ряд эффективных методов поиска минимального решения. Простейший из них — алгоритм Миллера изложен напр., в ([4], с. 403; [5], с. 206; [6]).

Формулировка результатов

1. При постоянном n последовательность $\{S_{mn}\}$ является минимальным решением уравнения (1) с параметром $x = k^{-2}$. Асимптотическим поведением при $m \to \infty$ является $S_{m+1,n}/S_{mn} \sim 1$.

2. Если $k^2 > 1/2$, то при постоянном m последовательность $\{S_{mn}\}$ является доминантным решением уравнения (2) с $x = 1 - k^{-2}$. При этом

$$S_{m,n+1}/S_{mn} \sim 1 \quad (n \to \infty).$$

3. При $n = \mathrm{const}$ последовательность $\{F_{mn}\}$ образует минимальное решение уравнения (3), в котором $x = 2k^{-2} - 1$, причем асимптотически при $m \to \infty$ $F_{m+1,n}/F_{mn} \sim \alpha$, где α указано выше.

4. Если $m = \mathrm{const}$, то $\{F_{mn}\}$ — доминантное решение уравнения (4), в котором $x = (1-k^2)^{-1}$; при этом $F_{m,n+1}/F_{mn} \sim x$ $(n \to \infty)$.

Доказательство. Покажем сначала, что указанная в каждом случае последовательность является решением соответствующего уравнения. В утверждениях 1 и 2 это вытекает из рекуррентных формул для неопределенных интегралов, аналогичных S_{mn} ([7], с. 207). В случае 3 это следует из рекуррентной формулы для чебышевских коэффициентов функции $f(x) = (1-k^2x^2)^{-\omega}$ с $\omega = n+1/2$ ([4], с. 34). Наконец, тот факт, что $\{F_{mn}\}$ — решение (4) с $x = (1-k^2)^{-1}$, вытекает из равенства ([4], с. 34)

$$\int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 t)^{-\omega} \cos 2mt \, dt = (\pi/2)(-1)^m (k^2/4)^m (\omega)_m \, {}_2F_1(m+\omega, m+1/2; 2m+1; k^2)$$

при $\omega = n + 1/2$ и соотношения смежности для ${}_2F_1$ ([5], с. 372, формула 15.2.10).

Минимальность или доминантность решений устанавливается на основе теоремы Перрона [8] об асимптотическом поведении решений разностных уравнений Пуанкаре. Например, в случае 2 соответствующее характеристическое уравнение $t^2 - (1+x)t + x = 0$ имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = x$. По теореме Перрона уравнение (2) имеет пару линейно независимых решений $\{z_n^i\}$, $i = 1, 2$, с асимптотиками $z_{n+1}^i/z_n^i \sim t_i$ $(n \to \infty)$. По условию $k^2 > 1/2$, поэтому $|t_2| < |t_1|$. Следовательно, решение $\{z_n^1\}$ доминантное, $\{z_n^2\}$ — минимальное. Решение $\{S_{mn}\}$ не может быть минимальным хотя бы потому, что $S_{mn} > 0$, а $x < 0$. Поэтому оно доминантное и имеет то же асимптотическое поведение, что и $\{z_n^1\}$.

Информация, заключенная в утверждениях 1–4, может быть полезной в решении задачи о построении матриц

$$S = (S_{mn}), \quad F = (F_{mn}), \quad m = 0, 1, \ldots, M, \quad n = 0, 1, \ldots, N.$$

Предлагается следующая вычислительная схема: сначала следует построить два начальных столбца матриц (нулевой и первый), а затем — восстановить строки прямой рекурсией согласно (2) и (4).

Построение начальных столбцов матрицы S. Ограничимся наиболее часто встречающимся на практике случаем, когда параметры p, q целые, т.е. принимают значения 0 или 1. Наблюдения показывают, что тогда интегралы S_{mn} являются элементарными функциями от модуля или линейно выражаются через полные эллиптические интегралы $K(k)$, $E(k)$ соответственно первого и второго рода. Последние подробно затабулированы, для их вычисления существуют эффективные алгоритмы, поэтому будем считать, что при заданном k величины $K(k)$ и $E(k)$ известны.

Будучи значениями минимального решения, элементы нулевого или первого столбцов могут быть найдены с помощью алгоритма Миллера. Но с ростом k растет стартовый номер для вычисления пробных значений в алгоритме Миллера, что делает его малоэффективным (этот алгоритм "работает" тем лучше, чем меньше k). Поэтому элементы нулевого столбца предлагается находить в виде

$$S_{m0} = fa_m + gb_m, \tag{5}$$

где f, g — некоторые функции от k, $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ — решения уравнения (1) с $n = 0$. Вид f, g и начальные значения даны в следующей таблице, в которой $x = k^{-2}$.

p	q	f	g	a_0	a_1	b_0	b_1
0	0	$K(k)$	$E(k)$	1	x	0	$-x$
0	1	$\arcsin k/k$	$(1-k^2)^{1/2}$	1	$x/2$	0	$-x/2$
1	0	$\operatorname{arcth} k/k$	1	1	$(1+x)/2$	0	$-x/2$
1	1	k^{-2}	$k^{-2}(1-k^2)$	1	$2x/3$	-1	$-(2x+1)/3$

Оказывается, что во всех случаях оба решения $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ являются доминантными и поэтому могут быть найдены устойчивой прямой рекурсией по начальным значениям в таблице. Аналогично (5) можно восстановить и первый столбец, но в силу равенства

$$S_{m1} = S_{m0} - S_{m+1,0}, \quad m \geq 0, \tag{6}$$

достаточно ограничиться нуль-столбцом.

Таким образом, начальные столбцы матрицы S следует находить так: согласно (5) вычислить $S_{00}, S_{01}, \ldots, S_{M0}$ и дополнительно найти $S_{M+1,0}$, а затем по формуле (6) вычислить элементы первого столбца.

Построение начальных столбцов матрицы F. Так как при значениях k, близких к единице, параметр α также близок к единице, то из утверждения 3 усматривается неэффективность алгоритма Миллера при вычислении $F_{00}, \ldots, F_{M0}$ для больших k. В духе вышеизложенного начальные столбцы матрицы F предлагается восстанавливать следующим образом. Сначала найти F_{m0} как линейную комбинацию

$$K(k)a_m + E(k)b_m, \quad m = 0, 1, \ldots, M, \tag{7}$$

где $\{a_m\}$, $\{b_m\}$ — доминантные решения уравнения (3) с $n = 0$, $x = 2k^{-2} - 1$, имеющие начальные значения $a_0 = 1$, $a_1 = x$; $b_0 = 0$, $b_1 = -x - 1$. Затем вычислить F_{m1} согласно (7), где на этот раз $a_0 = 0$, $a_1 = -x - 1$; $b_0 = (x+1)/(x-1)$, $b_1 = xb_0$.

Таким образом, в решении рассмотренной задачи о построении матриц S и F неоднократно реализовывается одна и та же идея, используемая и ранее (напр., [9]): минимальное решение разностного уравнения отыскивается как линейная комбинация двух его доминантных решений. Это позволяет избежать, в отличие о работ [2], [10], численной неустойчивости при использовании прямой рекурсии.

Численные примеры. Они просчитывались по программе на Турбо Паскале 7.0 в варианте extended с целью избежать переполнения при вычислении доминантных решений для "малых" k (k^2 близко к 1/2).

Пример 1. Требуется с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$ вычислить серию интегралов

$$S_{m0} = \int_0^{\pi/2} (1 - 0.75 \sin^2 t)^{-1/2} \sin^{2m} t \, dt, \quad m = 0, \dots, 10.$$

Имеем случай $M = 10$, $N = 0$, $p = 0$, $q = 0$. Значения полных эллиптических интегралов брались из соответствующих таблиц ([5], сс. 424, 425) по входному модулярному углу 60°. Результаты согласуются с вычислениями интегралов по формуле Симпсона с указанной точностью. Например,

$$S_{10,0} = 0.5232216390.$$

Пример 2. С той же точностью найти интегралы

$$F_{m0} = (-1)^m \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \alpha \sin^2 t)^{-1/2} \cos 2mt \, dt, \quad m = \overline{0, 10}, \quad \alpha = 80^\circ.$$

Здесь $M = 10$, $N = 0$, а модуль довольно велик: $k^2 = 0.9698463103\ldots$ Предварительно с помощью повышающего преобразования Ландена были найдены

$$K(k) = 3.1533852518\ldots, \quad E(k) = 1.0401143957\ldots,$$

а потом — искомые интегралы. Например,

$$F_{10,0} = 0.0194775796.$$

Литература

1. Vibiral B. *Lösung einiger Integrale in der relativistischen Physik* // Applikace mat. – 1969. – V. 14. – № 2. – P. 115–119.
2. Siekman J. *Concerning an integral occuring in aerofoil theory* // SIAM Rev. – 1961. – V. 3. – № 2. – P. 243–246.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
4. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* – М.: Мир, 1980. – 608 с.
5. *Справочник по специальным функциям.* Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
6. Gautschi W. *Computational aspects of three-term recurrence relations* // SIAM Rev. – 1967. – V. 9. – № 1. – P. 24–92.
7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Элементарные функции.* – М.: Наука, 1981. – 797 с.
8. Гельфонд А.О. *Исчисление конечных разностей.* – М.: Наука, 1967. – 375 с.
9. O'Reilly T. *Computing derivatives and integrals of the error function* // Amer. J. Phys. – 1973. – V. 41. – № 9. – P. 1109–1110.
10. Герасимов Е.А., Винников Е.Л. *О вычислении коэффициентов Лапласа* // Тр. гос. астроном. ин-та. – 1991. – Т. 62. – С. 66–83.

Омский государственный
педагогический университет

Поступила
28.10.1996