И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2001 МАТЕМАТИКА № 2 (465)

УДК 517.977

А.В. АРГУЧИНЦЕВ, О.А. КРУТИКОВА

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ГЛАДКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Одним из достаточно распространенных приемов решения обратных задач математической физики является сведение этих задач к задачам оптимального управления. Управляющими воздействиями можно считать определяемые коэффициенты, элементы правых частей или начально-краевых условий уравнений с частными производными. Однако в ряде реальных проблем неизвестные параметры являются функциями, обладающими достаточной степенью гладкости. Это требование вытекает из физического смысла исследуемых задач. Вместе с тем, достаточно мощные методы оптимального управления, основанные на использовании принципа максимума Л.С.Понтрягина, его следствий и модификаций, ориентированы на классы разрывных управлений. Поэтому актуальной является проблема разработки методов решения задач оптимального управления в классе гладких управляющих воздействий с учетом таких ограничений на управления, которые характерны для обратных задач математической физики.

В предлагаемой работе развивается одно из направлений данного подхода на примере задачи оптимального управления начально-краевыми условиями полулинейной гиперболической системы первого порядка.

Особенностью этого класса задач является несправедливость в них условий оптимальности вида классического (поточечного) принципа максимума Л.С. Понтрягина. На этот факт было обращено внимание, например, в [1], где специальным образом сконструирован контрпример для простейшего варианта гиперболических систем. В [2] доказан дифференциальный (линеаризованный) принцип максимума. В работе [3] получено неклассическое условие оптимальности вида вариационного принципа максимума. Оптимальное граничное управление доставляет максимум в специальных задачах управления начальными условиями системы обыкновенных дифференциальных уравнений, построенной на характеристиках исходной гиперболической системы.

В данной работе задача оптимального управления начально-краевыми условиями полулинейных гиперболических уравнений рассматривается в классе гладких управляющих воздействий, стесненных поточечными (амплитудными) или интегральными ограничениями. Именно такой класс функций характерен для обратных задач математической физики. Задача исследуется с помощью нестандартных внутренних вариаций допустимых управлений. В работе [4] этот тип вариаций был использован для получения необходимых условий оптимальности в задаче оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Применение внутренних вариаций для исследуемого класса задач приводит к новому условию оптимальности и позволяет построить конструктивный вариант метода улучшения допустимых управлений. Численная реализация метода проведена для иллюстративного примера определения начального профиля волны по известным данным наблюдений в конечный момент времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 99-01-00400, 00-01-81130) и программы “Университеты России — фундаментальные исследования” (проект 990345).

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления системой полулинейных гиперболических уравнений

$$\frac{\partial x}{\partial t} + A(s,t)\frac{\partial x}{\partial s} = f(x,s,t), \tag{1}$$
$$(s,t) \in P, \quad P = S \times T, \quad S = [s_0, s_1], \quad T = [t_0, t_1].$$

Здесь $x = x(s,t)$ — n-мерная вектор-функция, $A(s,t)$ — квадратная матрица размерности $n \times n$. Без ограничения общности можно считать, что система (1) записана в инвариантном виде, т. к. произвольную систему полулинейных гиперболических уравнений можно преобразовать к инвариантной форме ([5], с. 25–28). Поэтому в дальнейшем матрицу $A(s,t)$ будем считать диагональной.

Дополнительно предположим, что диагональные элементы $a_i(s,t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $A(s,t)$ знакопостоянны в прямоугольнике P. Пусть для определенности $a_i(s,t) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$; $a_i(s,t) = 0$, $i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m_2$; $a_i(s,t) < 0$, $i = m_2 + 1, m_2 + 2, \ldots, n$. Составим две диагональные подматрицы: $A^+(s,t)$ размерности $m_1 \times m_1$ и $A^-(s,t)$ размерности $(n - m_2) \times (n - m_2)$ из положительных и отрицательных диагональных элементов матрицы A соответственно. Из вектора состояния $x = x(s,t)$ выделим два подвектора: $x^+ = x^+(s,t)$ и $x^- = x^-(s,t)$, соответствующих положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A

$$x^+ = (x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \quad x^- = (x_{m_2+1}, x_{m_2+2}, \ldots, x_n).$$

Рассмотрим начально-краевые условия для системы (1)

$$\begin{aligned} x^+(s_0,t) &= M(t)x^-(s_0,t) + g^{(1)}(t), \quad t \in T, \\ x^-(s_1,t) &= N(t)x^+(s_1,t) + g^{(2)}(t), \quad t \in T, \end{aligned} \tag{2}$$

$$x(s,t_0) = p(u(s),s), \quad s \in S. \tag{3}$$

Здесь $M(t)$ и $N(t)$ — прямоугольные матрицы размерности соответственно $m_1 \times (n - m_2)$ и $(n - m_2) \times m_1$, $u = u(s)$ — r-мерная вектор-функция управления.

Идею подхода сначала изложим лишь для стартовых управлений $u = u(s)$. Возможны два типа ограничений на управляющие воздействия:

поточечные (ограничения в каждой точке отрезка)

$$u(s) \in U \subset E^r, \quad s \in S, \tag{4}$$

и интегральные

$$\int_S \Phi_j(u(s))ds \le L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{5}$$

где подинтегральные функции удовлетворяют дополнительному условию

$$\Phi_j(\lambda u) = \lambda^\alpha \Phi_j(u), \quad \alpha \ge 1.$$

Цель задачи состоит в минимизации функционала

$$J(u) = \int_S \varphi(x(s,t_1),s)ds + \iint_P F(x,s,t)ds\,dt. \tag{6}$$

Задача оптимального управления (1)–(6) рассматривается при следующих предположениях:

1) диагональные элементы $a_i = a_i(s,t), i = 1, 2, \ldots, n$, матрицы A непрерывны и непрерывно дифференцируемы в P;

2) вектор-функции $p(u,s)$, $g^{(1)}(u^{(1)}(t),t)$ и $g^{(2)}(u^{(2)}(t),t)$ непрерывны, непрерывно дифференцируемы по своим переменным и имеют ограниченные производные по u;

3) вектор-функция $f = f(x, s, t)$ и скалярные функции $F = F(x, s, t)$, $\varphi = \varphi(x, s)$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные и ограниченные частные производные по компонентам вектора состояния;

4) стартовое управление $u = u(s)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке S;

5) элементы матриц $M(t)$, $N(t)$ и функции $g^{(1)}(t)$, $g^{(2)}(t)$ непрерывно дифференцируемы на T.

При сделанных предположениях можно, вообще говоря, гарантировать лишь существование кусочно-непрерывного решения начально-краевой задачи (1)–(3). При этом компоненты вектор-функции состояния будут дифференцируемы вдоль соответствующих характеристик системы гиперболических уравнений ([5], с. 53–59; [6], с. 467–469).

Решение будет существовать в классе непрерывных функций, если предположить, что начально-краевые условия (2)–(3) согласованы, т. е.

$$\begin{aligned} p^+(u(s_0), s_0) &= M(t)p^-(u(s_0), s_0) + g^{(1)}(t_0), \\ p^-(u(s_1), s_1) &= N(t)p^+(u(s_1), s_1) + g^{(2)}(t_0). \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь компоненты p^+ и p^- вектор-функции p соответствуют положительным и отрицательным диагональным элементам матрицы A. Требование согласованности начально-краевых условий (7) налагает, вообще говоря, дополнительные ограничения на допустимые управления, которые необходимо учитывать при реализации численных методов. Для существования классического решения задачи (1)–(3) необходимы более жесткие предположения о согласованности начально-краевых условий до первого порядка включительно.

Принципиальной особенностью исследуемой задачи является то, что допустимые управления принадлежат классу непрерывно дифференцируемых функций. Соответственно не применимы методы оптимального управления, основанные на идее игольчатой вариации. В силу наличия ограничений на управляющие воздействия в данной задаче трудно применить также и методы классического вариационного исчисления.

2. Внутренние вариации

Идея предполагаемого подхода основана на применении нестандартных внутренних вариаций допустимых управлений. Варьируемое управление строится по правилу

$$u_\varepsilon(s) = u(s + \varepsilon\delta(s)) \tag{8}$$

для ограничений (4) или

$$u_\varepsilon(s) = \lambda(s)u(s + \varepsilon\delta(s)), \quad \lambda(s) = (1 + \varepsilon\dot{\delta}(s))^{\frac{1}{\alpha}}, \tag{9}$$

для ограничений (5). Здесь $\varepsilon \in [0, 1]$ — параметр, характеризующий малость вариации; $\lambda(s)$ выбрана таким образом, чтобы функция $u_\varepsilon(s)$ была допустимой, т. е. удовлетворяла интегральным ограничениям (5); $\delta(s)$ — непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$s_0 \le s + \delta(s) \le s_1, \quad s \in S,$$

для варианта (8) или

$$\begin{gathered} s_0 \le s + \delta(s) \le s_1, \quad s \in S, \\ |\dot{\delta}| \le 1, \quad \delta(s_0) = \delta(s_1) = 0 \end{gathered}$$

для варианта (9).

На допустимых процессах $\{u, x\}$ и $\{\widetilde{u} = u + \Delta u,\ \widetilde{x} = x + \Delta x\}$ рассмотрим формулу приращения целевого функционала

$$\Delta_u J(u) = \int_S \Delta\varphi(x(s, t_1), s)ds + \iint_P \Delta F(x, s, t)ds\,dt.$$

Проделаем ряд достаточно стандартных операций, обычно используемых при выводе необходимых условий оптимальности первого порядка:

— добавим нулевое слагаемое

$$\iint_P \langle \psi(s,t), \Delta x_t + A(s,t)\Delta x_s - \Delta f(x,s,t)\rangle ds\, dt,$$

где $\psi(s,t)$ — пока произвольная вектор-функция;

— применим к данному слагаемому формулу интегрирования по частям; если вектор-функции состояния не являются непрерывно дифференцируемыми, то необходимо применить обобщенный вариант формулы интегрирования по частям, в котором оператор в левой части (1) понимается в смысле дифференцирования компонент вектора состояния вдоль соответствующих характеристик ([7], сс. 10, 37);

— представим приращение $\Delta\varphi(x(s,t_1),s)$ по формуле Тейлора первого порядка;

— введем скалярные функции

$$H(x,s,t) = \langle \psi(s,t), f(x,s,t)\rangle - F(x,s,t),$$
$$h(u(s),s) = \langle \psi(s,t_0), p(u(s),s)\rangle;$$

— представим приращение $\Delta H(x,s,t) = H(\widetilde{x},s,t) - H(x,s,t)$ также по формуле Тейлора первого порядка;

— потребуем, чтобы функция $\psi = \psi(s,t)$ удовлетворяла сопряженной задаче

$$\psi_t + (A^T\psi)_s = -H_x(x,s,t),$$
$$\psi(s,t_1) = -\varphi_x(x(s,t_1),s), \quad s \in S;$$
$$\psi^+(s_1,t) = N_1(t)\psi^-(s_1,t), \quad \psi^-(s_0,t) = M_1(t)\psi^+(s_0,t), \quad t \in T,$$
$$N_1(t) = -(A^+)^{-1}N^TA^-, \quad M_1(t) = -(A^-)^{-1}M^TA^+.$$

Тогда формула приращения примет вид

$$\Delta J(u) = -\int_S \Delta_u h(u(s),s)ds + \eta,$$
$$\eta = \int_S o_\varphi(\|\Delta x(s,t_1)\|)ds - \iint_P o_H(\|\Delta x(s,t)\|)ds\, dt.$$

Выбирая варьируемое управление по правилу (8), получим

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_S \langle h_u, \dot{u}(s)\rangle \delta(s)ds + \eta_1, \tag{10}$$

где

$$\eta_1 = \eta - \int_S \langle h_u, o(\varepsilon)\rangle ds - \int_S o(\|\Delta u\|)ds.$$

Для оценки остаточного члена η_1 используется тот факт, что функция $\Delta x = \Delta x(s,t)$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с однородными условиями на боковых границах

$$\begin{gathered}\Delta x_t + A(s,t)\Delta x_s = \Delta f(x,s,t),\\ \Delta x(s,t_0) = \Delta p(u(s),s), \quad s \in S,\\ \Delta x^+(s_0,t) = M(t)\Delta x^-(s_0,t), \quad \Delta x^-(s_1,t) = N(t)\Delta x^+(s_1,t), \quad t \in T.\end{gathered} \tag{11}$$

Переходя к интегральному варианту задачи (11), в котором интегрирование осуществляется вдоль характеристик системы, получим оценку

$$\|\Delta x(s,t)\| \sim \varepsilon, \quad (s,t) \in P. \tag{12}$$

Таким образом, окончательный вариант формулы приращения имеет вид

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_S \delta(s) \langle h_u, \dot{u}(s) \rangle ds + o(\varepsilon).$$

Сформулируем необходимое условие оптимальности.

Теорема 1. *Пусть процесс* $\{u, x\}$ *является оптимальным в задаче* (1)–(4), (6). *Тогда всюду на отрезке* S *выполняется условие*

$$\langle h_u, \dot{u}(s) \rangle = 0, \quad s \in S. \tag{13}$$

Замечание. Если условия (2)-(3) на боковых границах прямоугольника P являются также управляемыми, т. е. имеют вид

$$x^+(s_0, t) = M(t)x^-(s_0, t) + g^{(1)}(u^{(1)}(t), t), \quad t \in T,$$
$$x^-(s_1, t) = N(t)x^+(s_1, t) + g^{(2)}(u^{(2)}(t), t), \quad t \in T,$$

то аналогичными рассуждениями можно получить условия оптимальности

$$\langle h^{(1)}_{u^{(1)}}, \dot{u}^{(1)}(t) \rangle = 0, \quad \langle h^{(2)}_{u^{(2)}}, \dot{u}^{(2)}(t) \rangle = 0, \quad t \in T,$$

где

$$h^{(1)}(u^{(1)}(t), t) = \langle A^+ \psi^+(s_0, t), g^{(1)}(u^{(1)}(t), t) \rangle,$$
$$h^{(2)}(u^{(2)}(t), t) = \langle A^- \psi^-(s_1, t), g^{(2)}(u^{(2)}(t), t) \rangle.$$

При этом под допустимыми понимаются гладкие управления $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, удовлетворяющие условиям типа включения

$$u^{(1)}(t) \in U^{(1)} \subset E^{r_1}, \quad u^{(2)}(t) \in U^{(2)} \subset E^{r_2}, \quad t \in T.$$

Рассмотрим теперь случай интегральных ограничений на функцию $u(s)$. Для задачи (1)–(3), (5)–(6) формула приращения (10) примет вид

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_S \langle h_u, \dot{u}(s)\delta(s) \rangle ds - \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_S \langle h_u, u(s)\dot{\delta}(s) \rangle ds + \eta_1.$$

Ко второму слагаемому применим формулу интегрирования по частям, учитывая дополнительные ограничения на функцию $\delta(s)$: $\delta(s_0) = \delta(s_1) = 0$.

Поскольку в данном случае также справедлива оценка вида (12), то окончательно имеем

$$\Delta J(u) = -\varepsilon \int_S \left(\langle h_u, \dot{u}(s) \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle h_u, u \rangle_s \right) \delta(s) ds + o(\varepsilon).$$

Теорема 2. *Пусть процесс* $\{u, x\}$ *является оптимальным в задаче* (1)–(3), (5)–(6). *Тогда всюду на отрезке* S *выполняется условие*

$$\langle h_u, \dot{u}(s) \rangle - \frac{1}{\alpha} \langle h_u, u \rangle_s = 0, \quad s \in S.$$

3. Схема численного метода

Полученные результаты позволяют построить методы улучшения допустимых гладких управлений. Остановимся подробнее на алгоритмах, использующих необходимое условие оптимальности в форме (13).

Введем скалярную функцию

$$\omega(u(s),s)=\langle h_u,\dot u(s)\rangle.$$

Пусть задано начальное приближение из класса допустимых функций $u^0=u^0(s)$ и с помощью метода вычислено $u^k(s), k=1,2,\ldots$ При этом управлении вычисляются решения $x^k=x^k(s,t)$, $\psi^k=\psi^k(s,t)$ исходной и сопряженной систем гиперболических уравнений, строится $\omega_k(s)=\omega(u^k(s),s)$. Если $\omega_k(s)=0$, $s\in S$, то управление $u^k(s)$ удовлетворяет необходимому условию оптимальности, и алгоритм заканчивает свою работу. В противном случае выделим области

$$\Omega_k^+=\{s\in S:\omega_k(s)>0\},\quad \Omega_k^-=\{s\in S:\omega_k(s)<0\}.$$

Определим гладкую функцию

$$\delta_k(s)=\begin{cases}\alpha_k(s)>0, & s\in\Omega_k^+;\\ \beta_k(s)<0, & s\in\Omega_k^-;\\ 0, & s\notin\Omega_k^+\bigcap\Omega_k^-.\end{cases}\tag{14}$$

Построим однопараметрическое семейство управлений $u_\varepsilon^k(s)=u^k(s+\varepsilon\delta_k(s))$ и решим задачу одномерной минимизации

$$\varepsilon_k: J(u^k_{\varepsilon_k})=\min_{\varepsilon\in[0,1]}J(u^k_\varepsilon).$$

Следующее приближение находится по формуле

$$u^{k+1}=u^k_{\varepsilon_k},\quad k=0,1,2,\ldots$$

Сформулируем утверждение о сходимости метода.

Теорема 3. *Пусть в дополнение к сделанным ранее предположениям на параметры задачи*

1) *целевой функционал $J(u)$ ограничен снизу на множестве допустимых процессов;*
2) *вектор-функции $\varphi_x(x(s,t_1),s)$, $F_x(x,s,t)$ и матричная функция $f_x(x,s,t)$ удовлетворяют условию Липшица по x с одной константой для всех допустимых процессов;*
3) *вектор-функция $p_u(u(s),s)$ удовлетворяет условию Липшица по u для всех допустимых управлений;*
4) *допустимые управления принадлежат классу непрерывно дифференцируемых функций, производная которых удовлетворяет условию Липшица с одной константой.*

Тогда последовательность управлений, генерируемая методом, является релаксационной

$$J(u^{k+1})<J(u^k),\quad k=0,1,2,\ldots,$$

и сходится в смысле

$$\mu(u^k)=\int_S\delta_k(s)\omega_k(s)ds\to 0,\quad k\to\infty.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться тем фактом, что при сделанных предположениях из формулы приращения (10) вытекает оценка

$$J(u^{k+1})-J(u^k)\le-\varepsilon\mu(u^k)+L\varepsilon^2,\quad L>0.$$

Конкретные варианты метода отличаются способами конструирования функций $\delta_k(s)$. В частности, в изложенном ниже примере функция, определяющая вариацию, выбрана в виде

$$\delta_k(s)=\frac{(s-s_0)(s_1-s)\omega_k(s)}{(s_1-s_0)\max\limits_{s\in S}\omega_k(s)}.$$

Такой способ выбора функции обеспечивает ее допустимость и выполнение (14), однако требует дополнительных предположений о бесконечной дифференцируемости управлений, согласованности начально-краевых условий и неизменности управлений на концах отрезка ($\delta(s_0) = \delta(s_1) = 0$). Отметим, что если для начального приближения условия согласования (7) выполнены, то последнее требование обеспечивает выполнение условий согласования на любой итерации.

В качестве иллюстративного примера рассмотрим задачу восстановления начального профиля волны по известным характеристикам волны в конечный момент времени.

4. Иллюстративный пример

Рассмотрим систему гиперболических уравнений первого порядка линеаризованной теории "мелкой воды" ([5], с. 569–572; [8])

$$\eta_t + h_0(s)v_s = -\dot{h}_0(s)v, \quad v_t + g\eta_s = 0,$$
$$\eta(s,t_0) = u(s), \quad v(s,t_0) = q(s).$$

Здесь $\eta(s,t)$ — профиль волны, $v(s,t)$ — массовая скорость частиц воды, $h_0(s)$ — профиль дна, $q(s)$ — известная функция, $t \in [t_0,t_1]$, $s \in [s_0,s_1]$. Неизвестное управление $u(s)$ — начальный профиль волны.

Предположим, что в конечный момент времени известен профиль волны — функция $\overline{\eta}(s)$, $s \in S$. Тогда данная обратная задача математической физики может быть интерпретирована как задача минимизации функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_S (\eta(u,s,t_1) - \overline{\eta}(s))^2 ds.$$

Приведем модель "мелкой воды" к инвариантной форме

$$x_{1t} + \sqrt{gh_0(s)}x_{1s} = -a(s)(x_1 - x_2), \quad x_{2t} - \sqrt{gh_0(s)}x_{2s} = -a(s)(x_1 - x_2), \tag{15}$$
$$x_1(s,t_0) = \sqrt{g}u(s) + \sqrt{h_0(s)}q(s), \quad x_2(s,t_0) = \sqrt{g}u(s) - \sqrt{h_0(s)}q(s), \quad x_1(s_0,t) = x_2(s_1,t) = 0.$$

Здесь

$$x_1(s,t) = \sqrt{g}\eta(s,t) + \sqrt{h_0(s)}v(s,t), \quad x_2(s,t) = \sqrt{g}\eta(s,t) - \sqrt{h_0(s)}v(s,t),$$
$$a(s) = \frac{\sqrt{g}\dot{h}_0(s)}{4\sqrt{h_0(s)}}.$$

Тогда

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_S \left(\frac{x_1(s,t) + x_2(s,t)}{2\sqrt{g}} - \overline{\eta}(s)\right)^2 ds. \tag{16}$$

Необходимое условие оптимальности имеет вид

$$(\psi_1(s,t_0) + \psi_2(s,t_0))\dot{u}(s) = 0$$

в случае поточечных ограничений или

$$(\alpha - 1)(\psi_1(s,t_0) + \psi_2(s,t_0))\dot{u}(s) - (\psi_{1s} + \psi_{2s})u(s) = 0$$

в случае интегральных ограничений, где $\psi(s,t)$ — решение сопряженной задачи

$$\begin{gathered}
\psi_{1t} + \sqrt{gh_0(s)}\psi_{1s} = -a(s)(\psi_1(s,t) - \psi_2(s,t)),\\
\psi_{2t} - \sqrt{gh_0(s)}\psi_{2s} = -a(s)(\psi_1(s,t) - \psi_2(s,t)),\\
\psi_1(s,t_1) = \psi_2(s,t_1) = -\frac{1}{2\sqrt{g}}(\eta(s,t_1,u) - \overline{\eta}(s,t_1)), \quad s \in S,\\
\psi_1(s_1,t) = \psi_2(s_0,t) = 0, \quad t \in T.
\end{gathered}$$

Построим характеристическую разностную сетку, узлы которой являются пересечением характеристик, задаваемых уравнениями

$$\begin{aligned}
\frac{ds_1(\xi,\tau;t)}{dt} &= \sqrt{gh_0(s_1(\xi,\tau;t))}, \quad s_1(\xi,\tau;\tau) = \xi,\\
\frac{ds_2(\xi,\tau;t)}{dt} &= -\sqrt{gh_0(s_2(\xi,\tau;t))}, \quad s_2(\xi,\tau;\tau) = \xi.
\end{aligned} \tag{17}$$

Разобьем отрезок $T = [t_0, t_1]$ на N равных частей $[t^i, t^{i+1}]$, положив $t^i = t_0 + ih, i = 0, 1, \ldots, N$, $h = (t_1 - t_0)/N$. Пусть $s = s_1(s_0, t_0; t)$ — характеристика системы (15), определенная из первого уравнения (17). Тогда в качестве узлов $s^j \in S = [s_0, s_1]$ выберем точки

$$s^j = s_1(s_0, t_0; t_0 + jh), \quad j = 0, 1, \ldots, M,$$

причем M удовлетворяет условию $s^{M-1} < s_1 \leq s^M$. Заметим, что такое построение возможно для любого конечного $[s_0, s_1]$, т. к. функция $h_0 = h_0(s)$ не зависит от времени и определена всюду на числовой оси $s \in (-\infty, +\infty)$.

Из способа построения разностной сетки с узлами (s^j, t^i), $j = 0, 1, \ldots, M$, $i = 0, 1, \ldots, N$, очевидно, что она строится однозначно для любого заданного числа $N > 0$. При практической реализации способа построения характеристической разностной сетки применялся широко известный метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности.

Интегрируя уравнения (15) вдоль характеристик по формуле трапеций, будем иметь разностную схему

$$\begin{aligned}
{x_1}_j^i &= {x_1}_{j-1}^{i-1} - \frac{h}{2}[a_{j-1}({x_1}_{j-1}^{i-1} - {x_2}_{j-1}^{i-1}) + a_j({x_1}_j^i - {x_2}_j^i)],\\
{x_2}_j^i &= {x_2}_{j+1}^{i-1} - \frac{h}{2}[a_{j+1}({x_1}_{j+1}^{i-1} - {x_2}_{j+1}^{i-1}) + a_j({x_1}_j^i - {x_2}_j^i)],
\end{aligned}$$

где $a_j = a(s^j)$, $x_j^i = x(s^j, t^i)$, $i = 0, 1, \ldots, N$, $j = 0, 1, \ldots, M$.

Рассматривая данные выражения неявной разностной схемы как систему двух линейных алгебраических уравнений относительно ${x_1}_j^i$, ${x_2}_j^i$, можно получить явные формулы перерасчета разностного решения на i-м слое по заданным значениям на $(i-1)$-м слое. Для сопряженной задачи разностная схема метода характеристик аналогична.

В таблице 1 приведены результаты численных расчетов для задачи (15), (16) с поточечными ограничениями на управление при следующих данных: $h_0(s) = 100 + s$; $t_0 = 0$ (начальный момент времени), $t_1 = 1$ (конечный момент времени), $s_0 = -35$, $s_1 = 100$ (границы известного профиля волны в конечный момент времени), $N = 200$ (число слоев по времени). Получены значения $s_n = -7.0049$, $s_k = 57.7786$ — границы неизвестного профиля волны в начальный момент времени. Число узлов на нижнем слое $L = 186$.

Таблица 1

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	-7.0049	0	0	0
15	-2.68659	0.182966	0.389368	0.182907
30	2.04893	0.272162	0.743661	0.274374
45	6.89694	0.167753	0.960149	0.167696
60	11.8575	-0.134343	0.984524	-0.134399
75	16.9305	-0.538783	0.798495	-0.540512
90	22.116	-0.880605	0.430033	-0.694118
105	27.414	-0.998669	-0.0461359	-0.694401
120	32.8245	-0.822188	-0.520343	-0.693876
135	38.3475	-0.422877	-0.871755	-0.42353
150	43.983	0.00697698	-0.999951	-0.00739731
165	49.7311	0.253858	-0.856537	-0.00476781
186	57.9673	0	0	-0.000141325
Значение $J(u)$		$7.9e{-}33$	12.6049	0.353959

Здесь $u^*(s)$ — оптимальное управление, $u^0(s) = \sin\frac{2\pi(s-s_n)}{s_k-s_n}$ — начальное управление, $u^k(s)$ — управление, полученное за 124 итерации приведенным выше методом.

Заметим, что на результаты вычислений большое влияние оказывает выбор начального приближения. Во-первых, необходимо выбирать только такие начальные приближения, которые охватывают все допустимые значения из U, т. к. при реализации метода новых значений функции $u(s)$ не возникает, а пересортировываются уже имеющиеся. Во-вторых, у полученных с помощью данного метода управлений наблюдаются некоторые участки постоянства (в нашем случае — это узлы 81–124 и 150–186).

Таблица 2

N	s	$u^*(s)$	$u^0(s)$	$u^k(s)$
1	-7.0049	0	0	0
15	-2.68659	0.182966	-0.756446	0.183264
30	2.04893	0.272162	0.862138	0.262831
45	6.89694	0.167753	0.304083	0.167746
60	11.8575	-0.134343	-0.981848	-0.097254
75	16.9305	-0.538783	-0.175942	-0.538753
90	22.116	-0.880605	0.964541	-0.880567
105	27.414	-0.998669	0.445312	-0.983553
120	32.8245	-0.822188	-0.724738	-0.822158
135	38.3475	-0.422877	-0.917979	-0.422807
150	43.983	0.00697698	-0.0990014	0.00698626
165	49.7311	0.253858	0.758125	0.256037
186	57.9673	0	0	0.00199347
Значение $J(u)$		$7.9e{-}33$	12.2178	0.00073

Численные эксперименты показывают, что этого можно избежать, применяя сильно осциллирующие начальные приближения. Например, при $u^0(s) = \sin\frac{20\pi(s-s_n)}{s_k-s_n}$ (табл. 2) заданная точность решения задачи достигается после 30 итераций и полученное управление очень близко к оптимальному на всей области определения.

Литература

1. Wolfersdorf L. *A counterexample to the maximum principle of Pontryagin for a class of distributed parameter systems* // Z. angew. Math. und Mech. – 1980. – Bd. 6. – № 4. – S. 204.

2. Brokate M. *Necessary optimality conditions for the control of semilinear hyperbolic boundary value problems* // SIAM J. Control and Optim. – 1987. – V. 25.– № 5. – P. 1353–1369.
3. Аргучинцев А.В. *Неклассическое условие оптимальности в задаче управления граничными условиями полулинейной гиперболической системы* // Изв. вузов. Математика. – 1994.– № 1. – С. 3–11.
4. Забелло Л.Я. *Об условиях оптимальности в нелинейных инерционных управляемых системах с запаздыванием* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т.26. – № 8. – С. 1309–1315.
5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. *Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1978. – 687 с.
6. Курант Р. *Уравнения с частными производными.* – М.: Мир, 1964. – 830 с.
7. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения.* Ч. 2. *Оптимальное управление.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 151 с.
8. Аргучинцев А.В., Терлецкий В.А. *К решению обратной проблемы цунами в рамках двумерной модели методами оптимального управления* // Исследов. цунами. – 1990. – № 4. – С. 52–57.

Иркутский государственный университет

Поступила
03.07.2000