ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 512.554.31

С.А. ТЮРИН

ПЕРЕСТРОЙКИ ТОРОВ В АЛГЕБРЕ ЦАССЕНХАУЗА

Введение

Как известно, в классических простых модулярных алгебрах Ли все торы сопряжены между собой относительно группы автоморфизмов. Первый пример неклассической простой алгебры Ли — алгебра Витта обладает двумя разными орбитами торов. Описание торов в простых неклассических p-алгебрах Ли получено в [1], [2]. Если вместо группы автоморфизмов взять группу, порожденную обобщенными экспоненциальными отображениями, то оказывается, что в p-алгебрах Ли картановского типа все максимальные торы сопряжены. В [3] получен такой же результат для регулярных подалгебр Картана в произвольной p-алгебре Ли. Если алгебра Ли не является p-алгеброй, то аналогичные результаты доказаны для торов, лежащих внутри максимальной подалгебры, в [4] в случае алгебры Цассенхауза и в [5] в случае любой алгебры Ли картановского типа.

Главный результат данной работы: любой тор в p-замыкании алгебры Цассенхауза может быть получен с помощью конечного числа перестроек из одного стандартного тора, лежащего внутри максимальной подалгебры.

Все основные определения и обозначения можно найти в [6]–[8].

1. Предварительные сведения

Будем применять метод перестройки торов в том виде, как он изложен в работе [5]. Суть его заключается в следующем.

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики $p>0$, K_0 — простое подполе, L — конечномерная алгебра Ли без центра, $\widetilde{L}$ — ее p-замыкание в p-алгебре Ли $\operatorname{Der} L$, T — тор в алгебре $\widetilde{L}$, θ — один из корней его присоединенного представления на L. Базис $\{t_1,\dots,t_m,t\}$ тора T выбирается так, что

1) базисные элементы тороидальны;

2) $\operatorname{Ker}\theta=\langle t_1,\dots,t_m\rangle$.

При этом $\theta(t)=k\in K_0^*$. Если Z — корневой вектор, соответствующий корню θ, то он определяет усеченное экспоненциальное отображение

$$\exp Z=\sum_{j=0}^{p-1}\frac{1}{j!}(\operatorname{ad} Z)^j.$$

Это отображение переводит тор T в абелеву подалгебру

$$\exp Z(T)=\operatorname{Ker}\theta\oplus\langle t-kZ\rangle,$$

которая не является p-подалгеброй. Ее p-замыкание содержит единственный максимальный тор, который обозначается через $e^Z(T)$. Его размерность не меньше, чем размерность тора T. Будем говорить, что тор $e^Z(T)$ получен из тора T с помощью перестройки.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01756).

2. Перестройки внутренних торов

Пусть $\mathcal{L} = W_1(n)$ — алгебра Цассенхауза, т. е. алгебра Ли специальных дифференцирований алгебры разделенных степеней $A_1(n)$, $\mathcal{L}_0$ — ее максимальная подалгебра, $\widetilde{\mathcal{L}}$ — p-замыкание алгебры $\mathcal{L}$, $\mathcal{F}$ — группа унипотентных автоморфизмов алгебры $\mathcal{L}$. Как известно ([7], [8]), $\mathcal{F}$-орбита любого внутреннего (т. е. лежащего в $\mathcal{L}_0$) тора определяется его содержанием

$$\operatorname{cont} T = f(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x^{(p^i)}$$

с точностью до эквивалентности

$$f(x) \sim \frac{f(\varepsilon x)}{\varepsilon} \quad (\varepsilon \in K^*).$$

Теорема 1. *Для любых двух внутренних торов T_1 и T_2 существует перестройка, переводящая тор T_1 в тор, принадлежащий $\mathcal{F}$-орбите тора T_2.*

Доказательство. Базисный тороидальный элемент тора T_1 имеет вид $t = \frac{y}{y'}\frac{d}{dx}$, где y — многочлен без свободного члена из алгебры разделенных степеней $A_1(n)$, и $\operatorname{cont} y = \operatorname{cont} T_1 = f$. Любой корневой вектор тора T_1, соответствующий собственному значению $k \in K_0$, имеет вид

$$Z = c\frac{y^{(k+1)}}{y'}\frac{d}{dx} \quad (-1 \le k \le p-2),$$

где c принадлежит алгебре констант $C(T_1)$ тора T_1. Нас будут интересовать только ненулевые значения k.

Если $1 \le k \le p-2$, то $Z^p = 0$, поэтому $\widehat{t} = \exp Z(t) = t - kZ = \frac{y - kcy^{(k+1)}}{y'}\frac{d}{dx}$ — тороидальный элемент. При этом $\operatorname{cont}\widehat{t} = \operatorname{cont} t$, т. к. $\operatorname{cont} y^{(k+1)} = 0$.

Заметим, что $\exp Z$ в этом случае является унипотентным автоморфизмом алгебры $\mathcal{L}$ (это утверждение является аналогом теоремы 1 из работы [4]), и группа $\mathcal{F}$ порождается такими автоморфизмами. В этом случае перестройка не изменяет $\mathcal{F}$-орбиты тора T_1.

Если $k = -1$, то $Z = \frac{c}{y'}\frac{d}{dx}$, и результат перестройки зависит от того, будет ли обратимым в алгебре $A_1(n)$ множитель c.

Рассмотрим случай, когда элемент c необратим, т. е. $c(0) = 0$. В этом случае

$$Z \in \mathcal{L}_0, \quad Z^p = c^{p-1}c_1 t, \quad \text{где} \quad c_1 = \left(\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\right)^p c \in C(T_1), \quad Z^{p^2} = 0.$$

Поэтому $\widehat{t} = (t+Z)^p = t + Z + Z^p = \frac{y + c + c^{p-1}c_1 y}{y'}\frac{d}{dx}$ — тороидальный элемент в $\mathcal{L}_0$. Перестройка, соответствующая корневому элементу Z, перевела тор $T_1 = \langle t\rangle$ в тор $\widehat{T} = \langle\widehat{t}\,\rangle$. При этом

$$\operatorname{cont}\widehat{t} = \operatorname{cont} y + \operatorname{cont} c = \operatorname{cont} t + \operatorname{cont} c.$$

Элемент c имеет вид

$$c = \phi + \left(\sum_{i=1}^{p-1} f^{(p-i)}x^{(i)}\right)\partial^p\phi \quad (\text{здесь}\ \ \partial = \tfrac{d}{dx}),$$

где ϕ принадлежит алгебре C_0 констант стандартного тора $\langle x\frac{d}{dx}\rangle$. Очевидно, $\operatorname{cont} c = \operatorname{cont}\phi$. Если взять $\phi = \operatorname{cont} T_2 - \operatorname{cont} T_1$, то $\operatorname{cont}\widehat{t} = \operatorname{cont} T_2$. Поэтому тор $\widehat{T}$ сопряжен с тором T_2 относительно группы $\mathcal{F}$. $\square$

Следствие 1. Для любого внутреннего тора T существует перестройка, которая переводит стандартный тор $T_0 = \langle x\frac{d}{dx}\rangle$ в тор, принадлежащий $\mathcal{F}$-орбите тора T.

Конкретные вычисления выглядят следующим образом. Как показано в [7], тор T сопряжен с тором $\langle D_f\rangle$, где

$$D_f = (x + f + xf^{p-1}\partial^p f)\frac{d}{dx}, \quad f = \operatorname{cont} T.$$

В качестве корневого элемента можно взять $Z = f\frac{d}{dx}$:

$$\Big[x\frac{d}{dx}, Z\Big] = -Z.$$

При этом

$$Z^p = xf^{p-1}(\partial^p f)\frac{d}{dx}, \quad Z^{p^2} = 0, \quad \exp Z\Big(x\frac{d}{dx}\Big) = (x+f)\frac{d}{dx},$$

$$\Big[(x+f)\frac{d}{dx}\Big]^p = x\frac{d}{dx} + Z + Z^p = (x + f + xf^{p-1}\partial^p f)\frac{d}{dx} = D_f.$$

Таким образом,

$$e^{f\frac{d}{dx}}\Big(\Big\langle x\frac{d}{dx}\Big\rangle\Big) = \langle D_f\rangle.$$

Учитывая, что группа $\mathcal{F}$ порождается усеченными экспоненциальными отображениями, соответствующими нильпотентным корневым векторам, получаем

Следствие 2. Любой внутренний тор можно перевести в любой другой внутренний тор с помощью конечного числа перестроек.

Рассмотрим теперь перестройку внутреннего тора $T = \langle t\rangle$, соответствующую транзитивному корневому дифференцированию

$$Z = \frac{c}{y'}\frac{d}{dx} \quad (c(0) \neq 0).$$

Обозначим $c(0) = \frac{1}{\mu}$ ($\mu \in K^*$). В этом случае $\widetilde{D} = \exp Z(t) = t + Z = \frac{c+y}{y'}\frac{d}{dx}$ — транзитивное дифференцирование. Его можно записать в виде

$$\widetilde{D} = \frac{1}{\mu}D = \frac{1}{\mu z'}\frac{d}{dx}, \quad \text{где} \quad D \equiv \frac{d}{dx} \ (\operatorname{mod} \mathcal{L}_0).$$

Уравнение $\mu z' = \frac{y'}{c+y}$ имеет решение $z = \frac{1}{\mu}\ln\big(1 + \frac{y}{c}\big)$. Если $\operatorname{cont} y = \alpha_1 x^{(p)} + \dots + \alpha_k x^{(p^k)}$, то $\operatorname{cont} z = \beta_1 x^{(p)} + \dots + \beta_k x^{(p^{k+1})}$, где

$$\beta_1 = \alpha_1 - \mu^{p-1}, \ \ \beta_2 = \alpha_2 - \alpha_1\mu^{p-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\beta_k = \alpha_k - \alpha_{k-1}\mu^{p-1}, \ \ \beta_{k+1} = -\alpha_k\mu^{p-1}.$$

Из этой системы получим коэффициенты

$$\alpha_1 = \beta_1 + \mu^{p-1}, \ \ \alpha_2 = \beta_2 + \beta_1^p\mu^{p-1} + \mu^{p^2-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_k = \beta_k + \beta_{k-1}^p\mu^{p-1} + \beta_{k-2}^{p^2}\mu^{p^2-1} + \dots + \beta_1^{p^{k-1}}\mu^{p^{k-1}-1} + \mu^{p^k-1}$$

и найдем уравнение, которому удовлетворяет μ,

$$\mu^{p^{k+1}} + (\beta_1\mu)^{p^k} + (\beta_2\mu)^{p^{k-1}} + \dots + (\beta_k\mu)^p + \beta_{k+1}\mu = 0.$$

Согласно [7] характеристическое уравнение для дифференцирования D имеет вид

$$D^{p^n} + (\beta_1 D)^{p^{n-1}} + \dots + (\beta_k D)^{p^{n-k}} + (\beta_{k+1} D)^{p^{n-k-1}} = 0.$$

В результате такой перестройки тора T получается транзитивный тор размерности $k+1$

$$e^Z(T) = \langle D^{p^{n-k-1}}, D^{p^{n-k}}, \dots, D^{p^{n-1}} \rangle = T(z).$$

Теорема 2. *Для любого транзитивного тора $T_1 \neq (0)$ в p-алгебре Ли $\widetilde{\mathcal{L}}$ существует такой внутренний тор T_2, что тор T_1 получается из тора T_2 с помощью одной перестройки.*

Доказательство. В работе [8] доказано, что любой транзитивный тор в алгебре $\widetilde{\mathcal{L}}$ имеет вид

$$T_1 = T(z) = \langle D^{p^{n-m}}, D^{p^{n-m+1}}, \dots, D^{p^{n-1}} \rangle,$$

где $D = \frac{1}{z'}\frac{d}{dx}$ — транзитивное дифференцирование, $0 < \mathrm{ht}(z) = m \leq n$, $\mathrm{cont}\, z = b_1 x^{(p)} + \dots + b_m x^{(p^m)}$ $(b_m \neq 0)$.

Если λ — любой ненулевой корень уравнения

$$\lambda^{p^m} + (b_1\lambda)^{p^{m-1}} + (b_2\lambda)^{p^{m-2}} + \dots + (b_{m-1}\lambda)^p + b_m\lambda = 0,$$

то $\exp(\lambda z) \in A_1(n)$ (т.е. является многочленом, а не рядом!). Пусть $y = \frac{\exp(\lambda z)-1}{\lambda}$. Тогда $\tau(y) = \frac{y}{y'}\frac{d}{dx} \in \mathcal{L}_0$ – тороидальное дифференцирование, $Z = \frac{1}{\lambda y'}\frac{d}{dx}$ — транзитивное корневое дифференцирование: $[\tau(y), Z] = -Z$. Кроме того,

$$\tau(y) + Z = \frac{1+\lambda y}{y'}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\lambda z'}\frac{d}{dx} = \frac{1}{\lambda}D.$$

Это означает, что внутренний тор $T_2 = \langle \tau(y) \rangle$ с помощью перестройки, соответствующей корневому элементу Z, переходит в тор

$$e^Z(T_2) = T_1.$$

Следствие 3. Любой транзитивный тор может быть получен из стандартного тора $T_0 = \langle x\frac{d}{dx} \rangle$ с помощью конечного числа перестроек.

Доказательство вытекает из этой теоремы и следствия 2 теоремы 1.

Следствие 4. Любой допустимый тор может быть получен из стандартного тора с помощью конечного числа перестроек.

Доказательство. Если T — внутренний тор, то это утверждение следствия 2 теоремы 1. Если T — внешний тор, то в работе [8] доказано, что он транзитивный, поэтому применимо следствие 1 теоремы 2. $\square$

3. Перестройки внешних торов

Дифференцирование $B = \partial^{p^{n-1}} + \dots + \partial^p + (1+x)\partial$ является тороидальным, и согласно [7] любое внешнее тороидальное дифференцирование сопряжено с B. Напомним, что алгебра констант $C(B)$ дифференцирования B изоморфна алгебре разделенных степеней высоты $n-1$

$$C(B) = \langle y^{(i)} \mid 0 \leq i \leq p^{n-1}-1 \rangle, \quad \text{где} \quad y = \ln(1+x).$$

Пусть $g(x) = \sum_{i=1}^{p^{n-1}-1} b_i x^{(i)}$, $\mathrm{cont}\, g = b_p x^{(p)} + b_{p^2} x^{(p^2)} + \dots + b_{p^{n-2}} x^{(p^{n-2})}$. Тогда многочлен вида $u = \alpha x + g(y)(1+x)$ удовлетворяет условию

$$Bu = \alpha + u.$$

Если при этом $\alpha + b_1 \neq 0$, то u' — обратимый элемент, и транзитивное дифференцирование $Z = \frac{1}{u'}\frac{d}{dx}$ удовлетворяет условию

$$[B, Z] = -Z, \tag{1}$$

т. е. является корневым вектором.

Обратно, пусть транзитивное дифференцирование Z удовлетворяет условию (1). Представим его в виде $Z = \frac{1}{u'}\frac{d}{dx}$, где $u \equiv \alpha_0 x$ по модулю старших членов ($\alpha_0 \neq 0$). Пусть $\operatorname{cont} u = \alpha_1 x^{(p)} + \alpha_2 x^{(p^2)} + \cdots + \alpha_n x^{(p^n)}$ и $\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$. Из равенства (1) следует

$$Bu = \alpha + u. \tag{2}$$

Поэтому $\frac{\alpha+u}{1+x} \in C(B)$. Пусть $\frac{\alpha+u}{1+x} = b_0 + g(y)$, где

$$g(x) = \sum_{i=1}^{p^{n-1}-1} b_i x^{(i)}, \quad \operatorname{cont} g = b_p x^{(p)} + b_{p^2} x^{(p^2)} + \cdots + b_{p^{n-2}} x^{(p^{n-2})}.$$

Из равенства $\alpha + u = (1+x)(b_0 + g(y))$ следует, что

$$\alpha_n = 0, \quad b_0 = \alpha, \quad b_1 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{n-1}, \quad b_p = -\alpha_2 - \alpha_3 - \cdots - \alpha_{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{p^{n-3}} = -\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1}, \quad b_{p^{n-2}} = -\alpha_{n-1},$$

а многочлен u имеет вид $u = \alpha x + g(y)(1+x)$.

Пусть $\operatorname{ht}(u) = k$, $\operatorname{cont} u = \alpha_1 x^{(p)} + \cdots + \alpha_k x^{(p^k)}$ ($\alpha_k \neq 0$). Напомним обозначения работы [8]: $T(u) = \langle Z^{p^{n-1}}, Z^{p^{n-2}}, \ldots, Z^{p^{n-k}} \rangle$ — транзитивный тор, $S(u) = T(u) \oplus \langle \tau(u) \rangle$ — максимальный нетранзитивный тор, где $\tau(u) = \frac{u}{u'}\frac{d}{dx}$.

Рассмотрим перестройку одномерного тора $T = \langle B \rangle$ с помощью корневого дифференцирования $Z = \frac{1}{u'}\frac{d}{dx}$, удовлетворяющего условию (1). Заметим, что тор $\langle B \rangle$ может быть получен из стандартного тора $T_0 = \langle x\frac{d}{dx} \rangle$ одной перестройкой с помощью корневого элемента $Z = \frac{d}{dx}$, т. е.

$$e^{\frac{d}{dx}}\left(\left\langle x\frac{d}{dx}\right\rangle\right) = \langle B \rangle.$$

Теорема 3. *Пусть $\widetilde{T} = e^Z(T)$. Если $\gamma = \alpha + 1 = 0$, то $\widetilde{T} = S(u)$, а если $\gamma \neq 0$, то $\widetilde{T} = T(v)$, где $v = \ln(1 + u/\gamma)$.*

Доказательство. Из условия $Z(u) = 1$ следует, что $Z^{p^i}(u) = 0$ ($i = 1, \ldots, n-1$). Поскольку

$$Z \equiv \frac{1}{\alpha_0}\frac{d}{dx} \ (\operatorname{mod} \mathcal{L}_0),$$

то $(\alpha_0 Z)^p = \partial^p - \frac{\partial^p u}{u'}\partial \equiv \partial^p - \frac{\alpha_1}{\alpha_0}\partial \ (\operatorname{mod} \mathcal{L}_0)$. Отсюда следует, что $(\alpha_0 Z)^{p^2} \equiv \partial^{p^2} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\right)^p \partial^p \ (\operatorname{mod} \mathcal{L})$, поэтому $(\alpha_0 Z)^{p^2} + (\alpha_1 Z)^p \equiv \partial^{p^2} \ (\operatorname{mod} \mathcal{L})$ и

$$(\alpha_0 Z)^{p^2} + (\alpha_1 Z)^p = \partial^{p^2} - \frac{\partial^{p^2} u}{u'}\partial \equiv \partial^{p^2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_0}\partial \ (\operatorname{mod} \mathcal{L}_0).$$

По индукции получаем систему соотношений

$$(\alpha_0 Z)^p = \partial^p - \frac{\partial^p u}{u'}\partial, \quad (\alpha_1 Z)^p + (\alpha_0 Z)^{p^2} = \partial^{p^2} - \frac{\partial^{p^2} u}{u'}\partial, \quad (\alpha_2 Z)^p + (\alpha_1 Z)^{p^2} + (\alpha_0 Z)^{p^3} = \partial^{p^3} - \frac{\partial^{p^3} u}{u'}\partial,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(\alpha_{n-2} Z)^p + (\alpha_{n-3} Z)^{p^2} + \cdots + (\alpha_0 Z)^{p^{n-1}} = \partial^{p^{n-1}} - \frac{\partial^{p^{n-1}} u}{u'}\partial.$$

Сложив эти равенства, получим соотношение

$$(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-2})^p Z^p + (\alpha_0 + \cdots + \alpha_{n-3})^{p^2} Z^{p^2} + \cdots + (\alpha_0 + \alpha_1)^{p^{n-2}} Z^{p^{n-2}} + \alpha_0^{p^{n-1}} Z^{p^{n-1}} = B - B(u)Z.$$

Отсюда с учетом равенства (2) находим

$$B=\tau(u)+(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-1})Z+(\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_{n-2})^pZ^p+\cdots+(\alpha_0+\alpha_1)^{p^{n-2}}Z^{p^{n-2}}+ \\ +\alpha_0^{p^{n-1}}Z^{p^{n-1}}. \quad (3)$$

Пусть $S=\exp Z(B)=B+Z$. Поскольку дифференцирование Z удовлетворяет условию

$$(\alpha_0Z)^{p^n}+(\alpha_1Z)^{p^{n-1}}+\cdots+(\alpha_kZ)^{p^{n-k}}=0,$$

то из [5] следует, что тор $\widetilde{T}$ имеет базис $\{S^{p^{n-k-1}},S^{p^{n-k}},\ldots,S^{p^{n-1}}\}$. Удобнее выбрать другой базис $\{S^{p^{n-k-1}},Z^{p^{n-k}},\ldots,Z^{p^{n-1}}\}$. Первый базисный элемент с учетом равенства (3) имеет вид

$$S=B+Z+Z^p+\cdots+Z^{p^{n-k-1}}=\tau(u)+\gamma Z+\gamma^pZ^p+\cdots+\gamma^{p^{n-k-1}}Z^{p^{n-k-1}}+ \\ +(\alpha_0+\cdots+\alpha_{k-1})^{p^{n-k}}Z^{p^{n-k}}+\cdots+(\alpha_0+\alpha_1)^{p^{n-2}}Z^{p^{n-2}}+\alpha_0^{p^{n-1}}Z^{p^{n-1}}.$$

Обозначим $R=\tau(u)+\gamma Z$. Если $\gamma=0$, то тор $\widetilde{T}$ имеет базис $\{\tau(u),Z^{p^{n-k}},\ldots,Z^{p^{n-1}}\}$, и поэтому совпадает с $S(u)=T(u)\oplus\langle\tau(u)\rangle$. Если $\gamma\neq0$, то $R=\frac{\gamma+u}{u'}\frac{d}{dx}=\frac{1}{v'}\frac{d}{dx}$, где $v=\ln(1+u/\gamma)$. В этом случае тор $\widetilde{T}$ имеет базис $\{R^{p^{n-k-1}},R^{p^{n-k}},\ldots,R^{p^{n-1}}\}$, т. е. совпадает с $T(v)$. □

Из доказанной теоремы следует, в частности, что одномерный тор $\langle B\rangle$ может быть перестроен в одномерный внутренний тор $T_0=\langle x\partial\rangle$. Для этого в качестве корневого элемента надо взять $Z=-\frac{d}{dx}$, т. е.

$$e^{-\frac{d}{dx}}(\langle B\rangle)=T_0.$$

Тор $\langle B\rangle$ может быть перестроен также в любой ненулевой транзитивный тор, т. к. многочлен u, соответствующий корневому дифференцированию $Z=\frac{1}{u'}\frac{d}{dx}$, может иметь любую высоту $k=\mathrm{ht}(u)$ и содержание $\mathrm{cont}\,u$ с любым набором параметров $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$. И, наконец, тор $\langle B\rangle$ с помощью одной перестройки может быть преобразован в максимальный нетранзитивный тор $S(u)=T(u)\oplus\langle\tau(u)\rangle$.

Централизатор в $\mathcal{L}$ тора $T(u)$ имеет вид

$$\mathcal{L}(u)=\Big\langle\frac{u^{(i)}}{u'}\frac{d}{dx}\,\Big|\,0\le i\le p^{n-k}-1\Big\rangle.$$

Поскольку $\mathcal{L}(u)\cong W_1(n-k)$, то по следствию 1 тор $\langle\tau(u)\rangle$ может быть перестроен в любой внутренний тор алгебры Ли $\mathcal{L}(u)$. При этих перестройках тор $T(u)$ не меняется, а тор $S(u)$ переходит в немаксимальный нетранзитивный тор.

Что касается многомерных внешних торов, то они не могут быть перестроены во внутренние торы по соображениям размерности. Из теоремы 3 следует, что многомерные внешние торы могут быть перестроены как в транзитивные, так и в нетранзитивные внешние торы.

Из доказанных теорем и их следствий получается основная

Теорема 4. *Любой ненулевой тор в p-алгебре Ли $\widetilde{\mathcal{L}}$ может быть получен из стандартного внутреннего тора $T_0=\langle x\frac{d}{dx}\rangle$ конечным числом перестроек.*

Литература

1. Демушкин С.П. *Подалгебры Картана простых p-алгебр Ли W_n и S_n* // Сиб. матем. журн. – 1970. – Т. 11. – № 2. – С. 310–325.
2. Демушкин С.П. *Подалгебры Картана простых неклассических p-алгебр Ли* // Изв. АН СССР. Сер. матем. –1972. – Т. 36. – С. 915–938.
3. Премет А.А. *Регулярные подалгебры Картана и нильпотентные элементы в ограниченных алгебрах Ли* // Матем. сб. – 1988. – Т. 180. – № 4. – С. 542–557.
4. Brown G. *Cartan subalgebras of Zassenhaus algebras* // Canad. J. Math. – 1975. – V. 27. – № 5. – P. 1011–1021.

5. Benkart G.M. *Cartan subalgebras in Lie algebras of Cartan type* // Lie algebras and Related Topics, CMS Conf. Proc. – 1986. – V. 5. – P. 157–187.
6. Кострикин А.И., Шафаревич И.Р. *Градуированные алгебры Ли конечной характеристики* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1969. – Т. 33. – № 2. – С. 251–322.
7. Тюрин С.А. *Торы в алгебре Цассенхауза.* – “Материалы 6-й научн. конф. молодых ученых мех.-матем. фак. и НИИ мех. Ч. 3.” – Горький, 1981. – 9 с. – Деп. в ВИНИТИ 14.01.82, № 202-82.
8. Тюрин С.А. *Классификация торов в алгебре Цассенхауза* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 2. – С. 69–76.

Нижегородский государственный университет

Поступила
22.01.1997