ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 10 (497)

УДК 517.968

Р.Т. ВАЛЕЕВА, Б.Г. ГАБДУЛХАЕВ

ОБ ОБРАЩЕНИИ МНОГОМЕРНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I РОДА

Введение

В данной статье на основе теории двойных рядов Фурье исследуются свойства двумерных слабосингулярных и сингулярных интегральных уравнений I рода

$$G(\varphi;t,\tau)\equiv\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\xi-t|\ln|\eta-\tau|}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}}\varphi(\xi,\eta)d\xi\,d\eta=f(t,\tau),\quad -1\leqslant t,\tau\leqslant 1,\tag{0.1}$$

$$S(\varphi;t,\tau)\equiv\frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\xi,\eta)d\xi\,d\eta}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-\eta^2)}(\xi-t)(\eta-\tau)}=f(t,\tau),\quad -1<t,\tau<1,\tag{0.2}$$

$$\begin{gathered}I(x;s,\sigma)\equiv\frac{1}{4\pi^2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\xi-s}{2}\operatorname{ctg}\frac{\eta-\sigma}{2}x(\xi,\eta)d\xi\,d\eta=\\ =y(s,\sigma),\quad -\infty<s,\sigma<\infty,\end{gathered}\tag{0.3}$$

$$\begin{gathered}H(x;s,\sigma)\equiv\frac{1}{\pi^2}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\xi-s}{2}\right|\ln\left|\sin\frac{\eta-\sigma}{2}\right|x(\xi,\eta)d\xi\,d\eta=\\ =y(s,\sigma),\quad -\infty<s,\sigma<\infty,\end{gathered}\tag{0.4}$$

и некоторых их обобщений. Здесь $f(t,\tau)$ и $y(s,\sigma)$ — известные, а $\varphi(t,\tau)$ и $x(s,\sigma)$ — искомые функции из определяемых ниже функциональных пространств, причем слабосингулярные интегралы понимаются как несобственные, а сингулярные — в смысле главного значения по Коши–Лебегу [1].

Трудность решения указанных уравнений (особенно *непрерывного* обращения операторов G, S, I, H) связана в первую очередь с их *некорректностью* [2] в известных пространствах функций, а также с их *сингулярностью* и *многомерностью*. Вкратце причина некорректности заключается в следующем: решения уравнений (0.1) и (0.4) неустойчивы относительно исходных данных, а решение уравнения (0.2) не единственно; уравнение (0.3) разрешимо не всегда, а при выполнении условий его разрешимости решение не единственно.

С использованием работ [3]–[5] ниже

а) задача решения уравнений (0.1)–(0.4) ставится корректно по Адамару путем соответствующего подбора пространств правых частей $F=\{f\}$, $Y=\{y\}$ и зависящих от них пространств искомых элементов $\Phi=\{\varphi\}$, $X=\{x\}$;

б) предлагаются явные представления решений этих уравнений в терминах двумерных рядов Фурье;

в) вычисляются нормы операторов G, S, I, H и обратных к ним в ряде функциональных пространств.

Следует отметить, что к уравнениям вида (0.1)–(0.4) приводит значительное число теоретических и прикладных задач (см., напр., [6]–[11] и библиографию в них). Поэтому для их решения к настоящему времени разработаны различные точные и приближенные методы (см., напр., [3], [4], [8]–[19] и библиографию в них). Однако, в отличие от известных результатов, ниже для исследования уравнений (0.1)–(0.4) впервые используется теория *двойных рядов Фурье* по многочленам Чебышева I и II родов и теория *двойных тригонометрических рядов*. Это позволило получить ряд завершенных результатов по точным методам решения указанных уравнений и их естественных обобщений, которые могут быть использованы также при построении и исследовании приближенных методов их решения.

1. Уравнения I рода с разностными логарифмическими ядрами

Для формулировки и последующего доказательства основных результатов понадобятся следующие обозначения.

Для любой функции $\varphi(t,\tau) \in L_1[-1,1;-1,1] = L[-1,1]^2$ введем коэффициенты Фурье–Чебышева

$$c_{kj}^{TT}(\varphi) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t,\tau)T_k(t)T_j(\tau)}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}dt\,d\tau \qquad (k+1, j+1 \in \mathbb{N});$$

$$c_{kj}^{UU}(\varphi) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}\varphi(t,\tau)U_k(t)U_k(\tau)dt\,d\tau \quad (k+1, j+1 \in \mathbb{N});$$

$$c_{k-1,j}^{UT}(\varphi) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}}\varphi(t,\tau)U_{k-1}(t)T_j(\tau)dt\,d\tau \qquad (k, j+1 \in \mathbb{N});$$

$$c_{k,j-1}^{TU}(\varphi) = \frac{4}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-\tau^2}{1-t^2}}\varphi(t,\tau)T_k(t)U_{j-1}(\tau)dt\,d\tau \qquad (k+1, j \in \mathbb{N}),$$

где

$$T_n(t) = \cos n \arccos t, \quad U_n(t) = \frac{\sin(n+1)\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1,$$

— полиномы Чебышева соответственно I и II родов степени n $(n+1 \in \mathbb{N})$.

Обозначим через $\Phi = L_2(\rho;[-1,1]^2) = L_2(\rho) = L_2(\rho_1\rho_2)$ пространство квадратично-суммируемых по Лебегу на $[-1,1;-1,1] = [-1,1]^2$ функций с весом $\rho(t,\tau) = \rho_1(t)\rho_2(\tau)$, где $\rho_1(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, $\rho_2(\tau) = \rho_1(\tau)$, и с обычной нормой

$$\|\varphi\|_\Phi = \left\{\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho(t,\tau)|\varphi(t,\tau)|^2 dt\,d\tau\right\}^{1/2}, \varphi \in \Phi.$$

Положим $\sigma = \sigma(t,\tau) = \sigma_1(t)\sigma_2(\tau)$, $\sigma_1(t) = \rho_1^{-1}(t)$, $\sigma_2(\tau) = \rho_2^{-1}(\tau)$, $-1 \leqslant t,\tau \leqslant 1$, и обозначим через $F \equiv W_2^{1,1,2}(\sigma)$ пространство таких функций $f(t,\tau) \in L_2(\rho) = L_2(\rho_1\rho_2)$, что существуют обобщенные производные по Соболеву

$$\frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t} \in L_2(\sigma_1\rho_2), \quad \frac{\partial f(t,\tau)}{\partial \tau} \in L_2(\rho_1\sigma_2), \quad \frac{\partial^2 f(t,\tau)}{\partial t \partial \tau} \in L_2(\sigma_1\sigma_2).$$

Введем норму в пространстве F по формуле (см. также замечание 1.1)

$$\|f\|_F = \{\|f\|_{L_2(\rho)}^2 + \|f_t'\|_{L_2(\sigma_1\rho_2)}^2 + \|f_\tau'\|_{L_2(\rho_1\sigma_2)}^2 + \|f_{t\tau}''\|_{L_2(\sigma)}^2\}^{1/2}.$$

Теорема 1.1. *Уравнение* (0.1) *имеет единственное решение* $\varphi^*(t,\tau) \in L_2(\rho)$ *при любой правой части* $f(t,\tau) \in W_2^{1,1,2}(\sigma)$, *причем*

$$\varphi^*(t,\tau) = \frac{c_{00}^{TT}(f)}{4\ln^2 2} + \frac{1}{2\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty} k c_{k0}^{TT}(f)T_k(t) + \frac{1}{2\ln 2}\sum_{j=1}^{\infty} j c_{oj}^{TT}(f)T_j(\tau) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} kj c_{kj}^{TT}(f)T_k(t)T_j(\tau), \quad -1 \leqslant t,\tau \leqslant 1. \quad (1.1)$$

Для решения $\varphi^*(t,\tau)\in\Phi$ уравнения (0.1) *справедливо также представление*

$$\varphi^*(t,\tau)=\frac{c_{00}^{TT}(\varphi)}{4\ln^2 2}+\frac{1}{2\ln 2}\sum_{k=1}^{\infty}c_{k-1,0}^{UT}(f'_t)T_k(t)+\frac{1}{2\ln 2}\sum_{j=1}^{\infty}c_{o,j-1}^{TU}(f'_\tau)T_j(\tau)+$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}c_{k-1,j-1}^{UU}(f''_{t\tau})T_k(t)T_j(\tau),\quad -1\leqslant t,\tau\leqslant 1,\quad f\in F.\quad (1.2)$$

Доказательство. Функции $\varphi(t,\tau)\in L_2(\rho)$ и $f(t,\tau)\in W_2^{1,1,2}(\sigma)$ можно представить в виде сумм сходящихся в пространствах Φ и F рядов Фурье:

$$\varphi(t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}{}'\sum_{j=0}^{\infty}{}'c_{kj}^{TT}(\varphi)T_k(t)T_j(\tau)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{kj}T_k(t)T_j(\tau),\qquad(1.3)$$

$$f(t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}{}'\sum_{j=0}^{\infty}{}'c_{kj}^{TT}(f)T_k(t)T_j(\tau)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{kj}T_k(t)T_j(\tau),\qquad(1.4)$$

где (здесь и далее) штрих у знака суммы $\sum\limits_{r=0}^{\infty}{}'\gamma_r$ означает, что соответствующее слагаемое при $r=0$ следует разделить на 2, причем

$$\alpha_{kj}=\begin{cases}\dfrac{c_{00}^{TT}(\varphi)}{4} & \text{при } k=j=0;\\ \dfrac{c_{k0}^{TT}(\varphi)}{2} & \text{при } k\in\mathbb{N} \text{ и } j=0;\\ \dfrac{c_{0j}^{TT}(\varphi)}{2} & \text{при } k=0 \text{ и } j\in\mathbb{N};\\ c_{kj}^{TT}(\varphi) & \text{при } k\in\mathbb{N} \text{ и } j\in\mathbb{N};\end{cases}\qquad(*)$$

аналогично определяются коэффициенты β_{kj} для функции $f\in F\subset\Phi$.

Из соотношений (0.1), (1.3) и (1.4) находим

$$G(\varphi;t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_{kj}G\{T_k(\xi)T_j(\eta);t,\tau\}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{kj}T_k(t)T_j(\tau),\qquad(1.5)$$

где $\varphi\in L_2(\rho)$ и $-1\leqslant t,\tau\leqslant 1$. Известно, что для любых $r=0,1,\dots$

$$J(T_r(\sigma);s)\equiv\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\ln|\sigma-s|}{\sqrt{1-\sigma^2}}T_r(\sigma)d\sigma=\lambda_rT_r(s),\quad -1\leqslant s\leqslant 1,\qquad(1.6)$$

$$\lambda_r=\{-\ln 2 \text{ при } r=0;\quad -\tfrac{1}{r} \text{ при } r=1,2,\dots\}.\qquad(1.7)$$

Поэтому в силу (0.1) для любых $k+1\in\mathbb{N}$ и $j+1\in\mathbb{N}$ имеем

$$G(T_k(\xi)T_j(\eta);t,\tau)=J(T_k(\xi);t)J(T_j(\eta);\tau)=\lambda_k\lambda_jT_k(t)T_j(\tau),\qquad(1.8)$$

где $-1\leqslant t,\tau\leqslant 1$. Из (1.5)–(1.8) находим уравнение

$$G(\varphi;t,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_k\lambda_j\alpha_{kj}T_k(t)T_j(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\beta_{kj}T_k(t)T_j(\tau),\qquad(1.9)$$

где $-1\leqslant t,\tau\leqslant 1$. Из (1.9) следует

$$\alpha_{kj}=\frac{\beta_{kj}}{\lambda_k\lambda_j},\quad k+1\in\mathbb{N},\quad j+1\in\mathbb{N}.\qquad(1.10)$$

Поэтому уравнение (0.1) разрешимо при любых $f \in F$ и решение его можно представить в виде

$$\varphi^*(t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{kj} T_k(t) T_j(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\beta_{kj}}{\lambda_k \lambda_j} T_k(t) T_j(\tau), \tag{1.11}$$

причем единственность решения легко доказывается методом от противного.

Из соотношений (1.3)–(1.11) следует представление (1.1). Формула (1.2) следует из (1.1) с учетом того факта, что для любой функции $f \in F$ легко доказать, что при любых $k \in \mathbb{N}$ и $j \in \mathbb{N}$

$$c_{k0}^{TT}(f) = \frac{c_{k-1,0}^{UT}(f'_t)}{k}, \quad c_{0j}^{TT}(f) = \frac{c_{0,j-1}^{TU}(f'_\tau)}{j}, \quad c_{kj}^{TT}(f) = \frac{c_{k-1,j-1}^{UU}(f''_{t\tau})}{kj}. \quad \square$$

Теорема 1.2. *Оператор $G : \Phi \to F$ непрерывно обратим, а для операторов G и G^{-1} справедливы оценки*

$$\text{а) } \|G\|_{\Phi\to F} \leqslant 2; \quad \text{б) } \|G^{-1}\|_{F\to\Phi} \leqslant \log_2 e. \tag{1.12}$$

Доказательство. Найдем норму функции $\varphi \in \Phi$ в пространстве $\Phi = L_2(\rho)$. Из (1.3) с помощью свойств полиномов Чебышева I рода находим

$$\|\varphi\|_{L_2(\rho)}^2 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \Big| \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{kj} T_k(t) T_j(\tau) \Big|^2 \frac{dt\, d\tau}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\sum_{j'=0}^{\infty} \alpha_{kj}\alpha_{k'j'} \int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)T_{k'}(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt \int_{-1}^{1} \frac{T_j(\tau)T_{j'}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}} d\tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k'=0}^{\infty}\sum_{j'=0}^{\infty} \alpha_{kj}\alpha_{k'j'} \delta_{kk'}\delta_{jj'}, \tag{1.13}$$

где, как известно,

$$\delta_{rr'} = \int_{-1}^{1} \frac{T_r(s)T_{r'}(s)ds}{\sqrt{1-s^2}} = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq r'; \\ \pi & \text{при } r = r' = 0; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } r = r' \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Поэтому в силу (1.13) имеем

$$\|\varphi\|_{L_2(\rho)}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} |\alpha_{kj}|^2 \delta_{kk}\delta_{jj} = \pi^2|\alpha_{00}|^2 + \frac{\pi^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{k0}|^2 + \frac{\pi^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{0j}|^2 + \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_{kj}|^2.$$

Отсюда с учетом (∗) для любой функции $\varphi \in \Phi$ находим

$$\|\varphi\|_{L_2(\rho)}^2 = \frac{\pi^2}{4} {\sum_{k=0}^{\infty}}' {\sum_{j=0}^{\infty}}' |c_{kj}^{TT}(\varphi)|^2. \tag{1.14}$$

Аналогично для любой функции $f \in F \subset \Phi$ имеем

$$\|f\|_{L_2(\rho)}^2 = \frac{\pi^2}{4} {\sum_{k=0}^{\infty}}' {\sum_{j=0}^{\infty}}' |c_{kj}^{TT}(f)|^2. \tag{1.15}$$

Теперь вычислим нормы $\|f'_t\|_{L_2(\sigma_1\rho_2)}$, $\|f'_\tau\|_{L_2(\rho_1\sigma_2)}$ и $\|f''_{t\tau}\|_{L_2(\sigma)}$ для $f \in F$. Из (1.4) находим

$$\frac{\partial f(t,\tau)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} k\beta_{kj}U_{k-1}(t)T_j(\tau) \in L_2(\sigma_1\rho_2), \tag{1.16}$$

$$\frac{\partial f(t,\tau)}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j\beta_{kj}T_k(t)U_{j-1}(\tau) \in L_2(\rho_1\sigma_2), \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^2 f(t,\tau)}{\partial t\partial \tau} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} kj\beta_{kj}U_{k-1}(t)U_{j-1}(\tau) \in L_2(\sigma_1\sigma_2), \tag{1.18}$$

где $-1 \leqslant t,\tau \leqslant 1$. Из (1.16) с учетом свойств полиномов Чебышева I и II родов получаем

$$\|f'_t\|^2_{L_2(\sigma_1\rho_2)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}}|f'_t(t,\tau)|^2 dt\, d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k'=1}^{\infty}\sum_{j'=0}^{\infty} kk'\beta_{kj}\beta_{k'j'}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}}U_{k-1}(t)T_j(\tau)U_{k'-1}(t)T_{j'}(\tau)dt\,d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k'=1}^{\infty}\sum_{j'=0}^{\infty} kk'\beta_{kj}\beta_{k'j'}\gamma_{kk'}\delta_{jj'},$$

где $\delta_{jj'}$ определены выше, а

$$\gamma_{kk'} = \int_{-1}^{1}\sqrt{1-s^2}U_{k-1}(s)U_{k'-1}(s)ds = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq k'; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{при } k = k' \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|f'_t\|^2_{L_2(\sigma_1\rho_2)} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} k^2|\beta_{kj}|^2\gamma_{kk}\delta_{jj} = \frac{\pi^2}{2}\left[\sum_{k=1}^{\infty}k^2|\beta_{k0}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k^2|\beta_{kj}|^2\right]; \tag{1.16$'$}$$

аналогично с помощью (1.17) получаем

$$\|f'_\tau\|^2_{L_2(\rho_1\sigma_2)} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j^2|\beta_{kj}|^2\delta_{kk}\gamma_{jj} = \frac{\pi^2}{2}\left[\sum_{j=1}^{\infty}j^2|\beta_{0j}|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}j^2|\beta_{kj}|^2\right]. \tag{1.17$'$}$$

Из (1.18) с учетом свойств многочленов Чебышева II рода находим

$$\|f''_{t\tau}\|^2_{L_2(\sigma)} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}|f''_{t\tau}(t,\tau)|^2 dt\,d\tau =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k'=1}^{\infty}\sum_{j'=1}^{\infty} kjk'j'\beta_{kj}\beta_{k'j'}\gamma_{kj}\gamma_{k'j'} = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}k^2j^2|\beta_{kj}|^2. \tag{1.18$'$}$$

Поскольку

$$\beta_{kj} = \begin{cases} \dfrac{c_{00}^{TT}(f)}{4} & \text{при } k = j = 0; \\ \dfrac{c_{k0}^{TT}(f)}{2} & \text{при } k \in \mathbb{N} \text{ и } j = 0; \\ \dfrac{c_{0j}^{TT}(f)}{2} & \text{при } k = 0 \text{ и } j \in \mathbb{N}; \\ c_{kj}^{TT}(f) & \text{при } k \in \mathbb{N} \text{ и } j \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{$**$}$$

то из (1.16′), (1.17′) и (1.18′) получаем соответственно

$$\|f'_t\|^2_{L_2(\sigma_1\rho_2)} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} k^2|c^{TT}_{k0}(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k^2|c^{TT}_{kj}(f)|^2\right], \tag{1.19}$$

$$\|f'_\tau\|^2_{L_2(\rho_1\sigma_2)} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty} j^2|c^{TT}_{0j}(f)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} j^2|c^{TT}_{kj}(f)|^2\right], \tag{1.20}$$

$$\|f''_{t\tau}\|^2_{L_2(\sigma)} = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} k^2 j^2|c^{TT}_{kj}(f)|^2. \tag{1.21}$$

Из соотношений (1.15), (1.19)–(1.21) следует

$$\|f\|^2_F = \frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{|c^{TT}_{00}(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(1+k^2)|c^{TT}_{k0}(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\infty}(1+j^2)|c^{TT}_{0j}(f)|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}(1+k^2+j^2+k^2j^2)|c^{TT}_{kj}(f)|^2\right\}, \quad f\in F. \tag{1.22}$$

Для любой функции $\varphi\in\Phi$ имеем $G\varphi\in F$. Поэтому из (1.22) и (1.14) с учетом соотношений $c^{TT}_{kj}(G\varphi)=\lambda_k\lambda_j c^{TT}_{kj}(\varphi)$, $k+1\in\mathbb{N}$, $j+1\in\mathbb{N}$, находим

$$\|G\varphi\|^2_F = \frac{\pi^2}{4}\left\{\frac{\lambda_0^2}{4}|c^{TT}_{00}(\varphi)|^2 + \frac{\lambda_0^2}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+k^2}{k^2}|c^{TT}_{k0}(\varphi)|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_0^2}{2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1+j^2}{j^2}|c^{TT}_{0j}(\varphi)|^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1+k^2+j^2+k^2j^2}{k^2j^2}|c^{TT}_{kj}(\varphi)|^2\right\}. \tag{1.23}$$

Из (1.14) и (1.23) получим неравенства

$$\lambda_0^2\|\varphi\|^2_\Phi \leqslant \|G\varphi\|^2_F \leqslant 4\|\varphi\|^2_\Phi, \quad \varphi\in\Phi. \tag{1.24}$$

Из (1.24) и (1.7) с учетом теоремы 1 следуют оценки (1.12). □

Из теории операторных уравнений, приводящихся к уравнениям II рода [20], и из теорем 1.1 и 1.2 следует

Теорема 1.3. *Пусть $T:\Phi\to F$ — вполне непрерывный оператор, а однородное уравнение $A\varphi\equiv G\varphi+T\varphi=0$ имеет в пространстве Φ лишь тривиальное решение. Тогда оператор $A=G+T:\Phi\to F$ имеет непрерывный обратный.*

Из принципа сжатых отображений [20] и из теоремы 1.2 легко выводятся следующие теоремы.

Теорема 1.4. *Если линейный оператор $T:\Phi\to F$ удовлетворяет условию $\|T\|_{\Phi\to F}<\ln 2$, то уравнение*

$$A\varphi\equiv G\varphi+T\varphi=f \quad (\varphi\in\Phi, f\in F) \tag{0.1′}$$

имеет единственное решение $\varphi^*\in\Phi$ при любой правой части $f\in F$, причем

$$\|\varphi^*\|_\Phi \leqslant \frac{\|f\|_F}{\ln 2-\|T\|_{\Phi\to F}}.$$

Теорема 1.5. *В условиях теоремы 1.4 единственное решение $\varphi^*\in\Phi$ уравнения (0.1′) можно найти как предел итерационной последовательности*

$$\varphi^i = G^{-1}f - G^{-1}T\varphi^{i-1} \quad (i=1,2,\dots)$$

при любом начальном приближении $\varphi^0 \in \Phi$, *причем погрешность* i*-го приближения может быть оценена неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^i\|_\Phi \leqslant q^i \|\varphi^* - \varphi^0\|_\Phi \leqslant \frac{q^i}{1-q}\|\varphi^1 - \varphi^0\|_\Phi \quad (i = 1, 2, \dots);$$

если же начальное приближение выбирается по формуле $\varphi^0 = G^{-1}f$, *то и неравенством*

$$\|\varphi^* - \varphi^i\|_\Phi \leqslant \frac{q^{i+1}}{1-q}\frac{\|f\|}{\ln 2} \quad (i = 1, 2, \dots); \quad q = \|T\|_{\Phi\to F}/\ln 2 < 1.$$

Замечание 1.1. Введем норму в пространстве F по формуле

$$\|f\|_F^2 = \frac{\pi^2}{4}\left\{\left|\frac{c_{00}^{TT}(f)}{2\ln^2 2}\right|^2 + \frac{1}{2\ln^2 2}\sum_{k=1}^\infty |kc_{k0}^{TT}(f)|^2 + \frac{1}{2\ln^2 2}\sum_{j=1}^\infty |jc_{0j}^{TT}(f)|^2 + \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty |kjc_{kj}^{TT}(f)|^2\right\}, \quad f \in F.$$

Тогда из сказанного выше следует, что формулы (1.12) принимают вид

$$\|G\|_{\Phi\to F} = \|G^{-1}\|_{F\to\Phi} = 1.$$

В этом случае в теоремах 1.4 и 1.5 следует положить $q = \|T\|_{\Phi\to F} < 1$.

2. Уравнения I рода с ядрами Коши

Рассмотрим применение результатов п. 1 к исследованию сингулярного интегрального уравнения I рода с ядрами Коши (0.2), где $f \in L_2(\sigma)$ — известная, а $\varphi \in L_2(\rho)$ — искомая функции, причем весовые функции $\rho(t,\tau) = \rho_1(t)\rho_2(\tau)$ и $\sigma(t,\tau) = \sigma_1(t)\sigma_2(\tau)$ определены выше.

Решение уравнения (0.2) будем искать в пространстве функций $L_2(\rho)$, удовлетворяющих условиям

$$c_{k0}^{TT}(\varphi) = c_{0j}^{TT}(\varphi) = 0 \quad (k+1 \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}). \tag{2.1}$$

В связи с этим введем пространства $F = L_2(\sigma)$ и

$$\Phi = \mathring{L}_2(\rho) = \{\varphi \in L_2(\rho) : c_{k0}^{TT}(\varphi) = c_{0j}^{TT}(\varphi) = 0, \quad k+1 \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N}\}$$

с обычными весовыми L_2-нормами соответственно. Тогда для уравнения (0.2) справедливы следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Уравнение* (0.2) *имеет единственное решение* $\varphi^* \in \Phi$ *при любой правой части* $f \in F$, *причем*

$$\varphi^*(t,\tau) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty c_{k-1,j-1}^{UU}(f)T_k(t)T_j(\tau), \quad -1 < t, \tau < 1. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. *Оператор* $S : \mathring{L}_2(\rho) \to L_2(\sigma)$ *непрерывно обратим и*

$$\|S\|_{\Phi\to F} = \|S^{-1}\|_{F\to\Phi} = 1.$$

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 будем вести по схеме доказательства теорем 1.1 и 1.2. Функции $\varphi \in \mathring{L}_2(\rho)$ и $f \in L_2(\sigma)$ представим в виде рядов

$$\varphi(t,\tau) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty c_{kj}^{TT}(\varphi)T_k(t)T_j(\tau), \qquad \varphi \in \Phi, \tag{2.3}$$

$$f(t,\tau) = \sum_{k=1}^\infty\sum_{j=1}^\infty c_{k-1,j-1}^{UU}(f)U_{k-1}(t)U_{j-1}(\tau), \quad f \in F. \tag{2.4}$$

Тогда сингулярное уравнение (0.2), (2.1) эквивалентно уравнению

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{kj}^{TT}(\varphi) S(T_k(\xi)T_j(\eta);t,\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{k-1,j-1}^{UU}(f) U_{k-1}(t)U_{j-1}(\tau). \tag{2.5}$$

Поскольку $S(T_k(\xi)T_j(\eta);t,\tau) = S_0(T_k(\xi);t)S_0(T_j(\eta);\tau)$, где, как известно,

$$S_0(T_r(\sigma);s) \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{T_r(\sigma)d\sigma}{(\sigma - s)\sqrt{1-\sigma^2}} = U_{r-1}(s), \quad r \in \mathbb{N}, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1,$$

то уравнение (2.5) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{kj}^{TT}(\varphi) U_{k-1}(t)U_{j-1}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} c_{k-1,j-1}^{UU}(f) U_{k-1}(t)U_{j-1}(\tau), \tag{2.6}$$

где $-1 < t,\tau < 1$. Отсюда находим

$$c_{kj}^{TT}(\varphi) = c_{k-1,j-1}^{UU}(f), \quad k \in \mathbb{N}, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{2.7}$$

Из соотношений (2.1), (2.4)–(2.7) следует утверждение теоремы 2.1.

Из (2.3), (2.4) и (2.6) по аналогии с (1.14) и (1.21) находим

$$\|S\varphi\|_{L_2(\sigma)}^2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |c_{kj}^{TT}(\varphi)|^2 = \frac{\pi^2}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |c_{k-1,j-1}^{UU}(f)|^2 = \|f\|_{L_2(\sigma)}^2.$$

Отсюда и из теоремы 2.1 получим равенства

$$\|S\varphi\|_{L_2(\sigma)} = \|\varphi\|_{\mathring{L}_2(\rho)}, \quad \|S^{-1}f\|_{\mathring{L}_2(\rho)} = \|f\|_{L_2(\sigma)} \quad (\varphi \in \Phi, f \in F),$$

а из них — утверждение теоремы 2.2. $\square$

По аналогии с теоремами 1.3–1.5, но на основе теорем 2.1 и 2.2, доказываются теоремы 2.3–2.5.

Теорема 2.3. *Пусть $V : \mathring{L}_2(\rho) \to L_2(\sigma)$ — вполне непрерывный оператор. Если уравнение $S\varphi + V\varphi = 0$ имеет в $\mathring{L}_2(\rho)$ лишь тривиальное решение, то оператор $B \equiv S + V : \mathring{L}_2(\rho) \to L_2(\sigma)$ непрерывно обратим.*

Теорема 2.4. *Если линейный оператор $V : \mathring{L}_2(\rho) \to L_2(\sigma)$ удовлетворяет условию $\|V\| \leqslant p < 1$, то оператор $B \equiv S + V : \mathring{L}_2(\rho) \to L_2(\sigma)$ непрерывно обратим и*

$$\|B^{-1}\|_{L_2(\sigma)\to\mathring{L}_2(\rho)} \leqslant (1-p)^{-1}.$$

Теорема 2.5. *В условиях теоремы 2.4 единственное решение $\varphi^* \in \mathring{L}_2(\rho)$ уравнения*

$$B(\varphi;t,\tau) \equiv S(\varphi;t,\tau) + V(\varphi;t,\tau) = f(t,\tau), \quad -1 < t,\tau < 1, \tag{0.2$'$}$$

можно найти как предел в $\mathring{L}_2(\rho)$ итерационной последовательности

$$\varphi^i = S^{-1}f - S^{-1}V\varphi^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

при любом начальном приближении $\varphi^0 \in \mathring{L}_2(\rho)$. При этом погрешность приближенной формулы $\varphi^*(t,\tau) \approx \varphi^i(t,\tau)$ может быть оценена неравенствами

$$\|\varphi^* - \varphi^i\|_{L_2(\rho)} \leqslant p^i\|\varphi^* - \varphi^0\|_{L_2(\rho)} \leqslant \frac{p^i}{1-p}\|\varphi^1 - \varphi^0\|_{L_2(\rho)} \quad (i = 1, 2, \dots);$$

если же начальное приближение выбирается по формуле $\varphi^0 = S^{-1}f$, *то*

$$\|\varphi^* - \varphi^i\|_{L_2(\rho)} \leqslant \frac{p^{i+1}\|f\|_{L_2(\sigma)}}{1-p} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

3. Периодические сингулярные уравнения I рода

Результаты, аналогичные приведенным выше, справедливы также для двумерных периодических сингулярных интегральных уравнений I рода; в этом случае удобным аппаратом исследования является теория двойных тригонометрических рядов. Проиллюстрируем сказанное применительно к интегральным уравнениям (0.3) и (0.4).

Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]^2$ пространство квадратично суммируемых в $[0, 2\pi]^2 = [0, 2\pi; 0, 2\pi]$ функций с нормой

$$\|x\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |x(\xi, \eta)|^2 d\xi \, d\eta \right\}^{1/2}, \quad x \in L_2.$$

Положим

$$\mathring{L}_2 = \{x \in L_2 : c_{k0}(x) = c_{0j}(x) = 0; \quad k = 0, \pm 1, \dots ; \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots \},$$

где

$$c_{kj}(\varphi) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\xi, \eta) e^{-i(k\xi + j\eta)} d\xi \, d\eta \quad (k, j = 0, \pm 1, \dots)$$

— коэффициенты Фурье в комплексной форме функции $\varphi \in L_2$.

Теорема 3.1. *Уравнение* (0.3) *имеет единственное решение* $x^*(s, \sigma) \in \mathring{L}_2$ *при любой правой части* $y(s, \sigma) \in \mathring{L}_2$, *причем*

$$x^*(s, \sigma) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} j \, c_{kj}(y) e^{i(ks + j\sigma)} = I(y; s, \sigma), \tag{3.1}$$

где $-\infty < s, \sigma < \infty$ *и*

$$\operatorname{sgn} r = \{1 \text{ \textit{при} } r > 0; \quad 0 \text{ \textit{при} } r = 0; \quad -1 \text{ \textit{при} } r < 0\}.$$

Следствие. Оператор $I : \mathring{L}_2 \to \mathring{L}_2$ непрерывно обратим и

$$\|I\|_{\mathring{L}_2 \to \mathring{L}_2} = \|I^{-1}\|_{\mathring{L}_2 \to \mathring{L}_2} = 1, \quad I^2 = E. \tag{3.2}$$

Доказательство. Функции $x, y \in \mathring{L}_2$ представим в виде рядов

$$x(s, \sigma) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} c_{kj}(x) e^{i(ks + j\sigma)}, \tag{3.3}$$

$$y(s, \sigma) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} c_{kj}(y) e^{i(ks + j\sigma)}. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ir\sigma} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma = i e^{irs} \operatorname{sgn} r \quad (r = 0, \pm 1, \dots),$$

то в силу (3.3)–(3.4) уравнение (0.3) эквивалентно уравнению

$$Ix = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} j \, c_{kj}(x) e^{i(ks + j\sigma)} = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} c_{kj}(y) e^{i(ks + j\sigma)}. \tag{3.5}$$

Поскольку система функций $\{e^{i(ks+j\sigma)}\}_{k=0,\pm1,\dots}^{j=0,\pm1,\dots}$ линейно независима и полна в пространстве L_2, то из (3.5) получаем $c_{kj}(x) = -c_{kj}(y)\operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} j$ $(k,j = \pm1,\pm2,\dots)$. Отсюда и из (3.3) следует первая часть формул (3.1). По аналогии с первой частью формул (3.5) для любой функции $y \in L_2$ имеем

$$Iy = -\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} j\, c_{kj}(y) e^{i(ks+j\sigma)}. \tag{3.6}$$

Из (3.6) и сказанного выше следует вторая часть формул (3.1).

Из (0.3) и (3.5) с помощью формулы Парсеваля находим

$$\|Ix\|_{L_2}^2 = \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\sum_{\substack{j=-\infty\\j\neq0}}^{\infty} |c_{kj}(x)|^2 = \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty}\sum_{\substack{j=-\infty\\j\neq0}}^{\infty} |c_{kj}(y)|^2 = \|y\|_{L_2}^2,$$

где $x, y \in \mathring{L}_2$. Отсюда и из (3.1) следуют равенства

$$\|Ix\|_{L_2} = \|x\|_{L_2}, \quad \|I^{-1}y\|_{L_2} = \|y\|_{L_2} \quad (x,y \in \mathring{L}_2),$$

а из них — утверждение следствия, в том числе формулы (3.2). □

Из теоремы 3.1 (особенно из хода ее доказательства) видно, что уравнение (0.3) разрешимо в пространстве L_2 тогда и только тогда, когда $y \in \mathring{L}_2$, т. е. его правая часть $y \in L_2$ удовлетворяет условиям

$$c_{k0}(y) = c_{0j}(y) = 0 \quad (k = 0,\pm1,\dots;\ \ j = \pm1,\pm2,\dots). \tag{3.7}$$

При их выполнении решение $x_*(s,\sigma) \in L_2$ уравнения (0.3) представимо в виде

$$x_*(s,\sigma) = \alpha_{00} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty} \alpha_{k0} e^{iks} + \sum_{\substack{j=-\infty\\j\neq0}}^{\infty} \alpha_{0j} e^{ij\sigma} + x^*(s,\sigma), \tag{3.8}$$

где функция $x^*(s,\sigma)$ определена в (3.1), а α_{k0} $(k = 0,\pm1,\dots)$ и α_{0j} $(j = \pm1,\pm2,\dots)$ — произвольные постоянные. Если же ищем решение в пространстве $\mathring{L}_2$, то для этих постоянных имеем

$$\alpha_{k0} = c_{k0}(x) = 0, \quad \alpha_{0j} = c_{0j}(y) = 0 \quad (k = 0,\pm1,\dots;\ \ j = \pm1,\pm2,\dots), \tag{3.9}$$

а тогда $x_*(s,\sigma) = x^*(s,\sigma)$.

Таким образом, при невыполнении любого из условий как (3.7), так и (3.9) задача решения уравнения (0.3) поставлена некорректно [2]. В этом случае, следуя [11], наряду с (0.3) рассмотрим уравнение

$$I(x;s,\sigma) = y(s,\sigma) - \gamma(s,\sigma) \equiv y_0(s,\sigma), \tag{3.10}$$

где $\gamma(s,\sigma)$ — произвольная функция из L_2. Выберем ее так, чтобы функция $y_0 \in \mathring{L}_2$, а следовательно, уравнение (3.10) было разрешимым. Тогда

$$\gamma(s,\sigma) = c_{00}(y) + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty} c_{k0}(y) e^{iks} + \sum_{\substack{j=-\infty\\j\neq0}}^{\infty} c_{0j}(y) e^{ij\sigma}. \tag{3.11}$$

Решение уравнения (3.10), (3.11) в силу (3.8) представляется в виде

$$x_0(s,\sigma) = \alpha_{00} + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq0}}^{\infty} \alpha_{k0} e^{iks} + \sum_{\substack{j=-\infty\\j\neq0}}^{\infty} \alpha_{0j} e^{ij\sigma} - \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} j\, c_{kj}(y_0) e^{i(ks+j\sigma)}, \tag{3.12}$$

где α_{kj} – произвольные постоянные такие, что $x_0(s,\sigma) \in L_2$. Если же решение $x_0 \in L_2$ уравнения (3.10), (3.11) ищем в пространстве $\overset{\circ}{L}_2$, то в силу (3.1), (3.12) и (3.9) находим

$$x_0(s,\sigma) = -\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} k \operatorname{sgn} j\, c_{kj}(y_0) e^{i(ks+j\sigma)} =$$
$$= I(y_0;s,\sigma) = I(y;s,\sigma) - I(\gamma;s,\sigma) = I(y;s,\sigma) = x^*(s,\sigma).$$

Замечание 3.1. В силу теоремы 3.1 и ее следствия для уравнения

$$Ax \equiv Ix + Rx = y \quad (x, y \in Z),$$

где $R : Z \to Z$ — линейный оператор, а $Z = \overset{\circ}{L}_2$ или же L_2, справедливы утверждения, аналогичные теоремам 2.3–2.5.

Далее, введем пространство 2π-периодических функций

$$Y = \{y(s,\sigma) \in L_2 : \exists y'_s, y'_\sigma, y''_{s\sigma} \in L_2\} \equiv W_2^{1,1,2}[0,2\pi]^2$$

с нормой

$$\|y\|_Y = \left\{ \left|\frac{c_{00}(y)}{4\ln^2 2}\right|^2 + \frac{1}{4\ln^2 2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |kc_{k0}(y)|^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{4\ln^2 2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} |jc_{0j}(y)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} |kjc_{kj}(y)|^2 \right\}^{1/2}, \quad y \in Y. \quad (3.13)$$

Норма в Y, введенная по формуле (3.13), эквивалентна любой другой норме, в которой пространство Y полно, в частности, эквивалентна таким нормам

$$\|y\|_Y = \|y\|_{L_2} + \|y'_s\|_{L_2} + \|y'_\sigma\|_{L_2} + \|y''_{s\sigma}\|_{L_2}, \qquad y \in Y, \quad (3.14)$$

$$\|y\|_Y = \{\|y\|^2_{L_2} + \|y'_s\|^2_{L_2} + \|y'_\sigma\|^2_{L_2} + \|y''_{s\sigma}\|^2_{L_2}\}^{1/2}, \quad y \in Y. \quad (3.15)$$

Теорема 3.2. *Уравнение* (0.4) *имеет единственное решение* $x^*(s,\sigma) \in L_2 \equiv X$ *при любой правой части* $y(s,\sigma) \in W_2^{1,1,2} \equiv Y$, *причем*

$$x^*(s,\sigma) = \frac{c_{00}(y)}{4\ln^2 2} + \frac{1}{2\ln 2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} kc_{k0}(y)e^{iks} +$$
$$+ \frac{1}{2\ln 2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} jc_{0j}(y)e^{ij\sigma} + \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} kjc_{kj}(y)e^{i(ks+j\sigma)}. \quad (3.16)$$

Следствие. Оператор $H : X \to Y$ непрерывно обратим, причем

$$\|H\|_{X\to Y} = \|H^{-1}\|_{Y\to X} = 1. \quad (3.17)$$

Доказательство. Представляя функции $x \in X$ и $y \in Y$ в виде рядов

$$x(s,\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(x)e^{i(ks+j\sigma)}, \quad y(s,\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(y)e^{i(ks+j\sigma)} \quad (3.18)$$

и используя известные соотношения

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\tau - t}{2}\right| e^{ir\tau}d\tau = \nu_r e^{irt} \quad (r = 0, \pm 1, \dots),$$
$$\nu_r = \{2\ln 2 \text{ при } r = 0; \ \ \tfrac{1}{|r|} \text{ при } r = \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (3.19)$$

уравнение (0.4) запишем в эквивалентном виде

$$Hx \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \nu_k \nu_j c_{kj}(x) e^{i(ks+j\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_{kj}(y) e^{i(ks+j\sigma)}. \tag{3.20}$$

Отсюда с учетом свойств системы функций $\{e^{i(ks+j\sigma)}\}_{k=\overline{-\infty,\infty}}^{j=\overline{-\infty,\infty}}$ находим

$$c_{kj}(x) = \frac{c_{kj}(y)}{\nu_k \nu_j} \quad (k, j = 0, \pm 1, \dots). \tag{3.21}$$

Из (3.18)–(3.21) получим решение уравнения (0.4)

$$x^*(s,\sigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{c_{kj}(y)}{\nu_k \nu_j} e^{i(ks+j\sigma)} = H^{-1}(y; s, \sigma), \tag{3.22}$$

причем единственность легко доказывается методом от противного. Из (3.22) и (3.19) следует представление (3.16). Поэтому для любой функции $y \in Y$ из (3.22), (3.13) и (3.19) с помощью равенства Парсеваля имеем

$$\|H^{-1}y\|_X^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left|\frac{c_{kj}(y)}{\nu_k \nu_j}\right|^2 = \left|\frac{c_{00}(y)}{4\ln^2 2}\right|^2 + \frac{1}{4\ln^2 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k c_{k0}(y)|^2 +$$
$$+ \frac{1}{4\ln^2 2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |j c_{0j}(y)|^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |kj c_{kj}(y)|^2 = \|y\|_Y^2.$$

Отсюда и из (3.16) получим формулы

$$\|H^{-1}y\|_X = \|y\|_Y, \quad y \in Y; \quad \|Hx\|_Y = \|x\|_X, \quad x \in X,$$

а из них — соотношения (3.17).

Следует отметить, что если норма в пространстве Y выбирается по любой из формул (3.14) или (3.15), то соотношения (3.17) уже не верны, вместо них имеем лишь

$$\|H\|_{X\to Y} \leqslant \text{const} < \infty, \quad \|H^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant \text{const} < \infty.$$

Для полноты доказательства осталось показать сходимость использованных рядов, что так или иначе связано со сходимостью ряда из (3.13) для любой функции $y \in Y$. Поскольку здесь функции y, y'_s, y'_σ, $y''_{s\sigma}$ принадлежат L_2, то

$$c_{k0}(y) = \frac{c_{k0}(y'_s)}{ik}, \quad c_{0j}(y) = \frac{c_{0j}(y'_\sigma)}{ij}, \quad c_{kj}(y) = \frac{c_{kj}(y''_{s\sigma})}{i^2 kj}$$

для любых $k, j = \pm 1, \pm 2, \dots$ Отсюда и из (3.13) для любой функции $y \in Y$ получим

$$\|y\|_Y^2 = \left|\frac{c_{00}(y)}{4\ln^2 2}\right|^2 + \frac{1}{4\ln^2 2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{k0}(y'_s)|^2 + \frac{1}{4\ln^2 2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{0j}(y'_\sigma)|^2 +$$
$$+ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |c_{kj}(y''_{s\sigma})|^2 \leqslant \|y\|_{L_2}^2 + \|y'_s\|_{L_2}^2 + \|y'_\sigma\|_{L_2}^2 + \|y''_{s\sigma}\|_{L_2}^2 < \infty. \quad \square$$

Замечание 3.2. В силу теоремы 3.2 и ее следствия для полного уравнения I рода

$$Ax \equiv Hx + Rx = y \quad (x \in X, \ \ y \in Y), \tag{0.4$'$}$$

где $R : X \to Y$ есть линейный оператор, справедливы утверждения, аналогичные теоремам 1.3–1.5 и 2.3–2.5.

Литература

1. Michlin S.G., Prößdorf S. *Singuläre Intergaloperatoren.* – Berlin: Akademic-Verlag, 1980. – 514 S.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 286 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений* I *рода.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
5. Валеева Р.Т. *Об обращении одного слабосингулярного интегрального оператора* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Актуальные проблемы математики и механики. – Казань: Изд-во “Унипресс”, 2000. – Т. 5. – С. 44–46.
6. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
7. Жижиашвили Л.В. *Некоторые вопросы тригонометрических рядов Фурье и их сопряженных.* – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1993. – 414 с.
8. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техн. Матем. анализ. – М.: Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.
9. Prößdorf S. *Plenary Lectures* // Z. angew. Math. und Mech. – 1989. – Bd. 69. – № 4. – P. 5–13.
10. Лифанов И.К., Тыртышников Е.Е. *Теплицевы матрицы и сингулярные интегральные уравнения* // Вычисл. процессы и системы. – М.: Наука, 1990. – Вып. 7. – С. 94–273.
11. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.
12. Шешко М.А. *Двумерные сингулярные интегральные уравнения первого рода с ядрами Коши* // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17. – № 8. – С. 1518–1521.
13. Шешко М.А. *Интегральные уравнения, содержащие кратные интегралы с ядрами Коши* // Дифференц. уравнения. – 1986. – Т. 22. – № 3. – С. 523–538.
14. Афендикова Н.Г. *О численном решении сингулярных интегральных уравнений*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – М., 1986. – 99 с.
15. Хайруллина А.М. *Приближенное решение многомерных сингулярных интегральных уравнений*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 127 с.
16. Полянская Т.С. *Численные методы решения некоторых классов сингулярных интегральных уравнений с одномерными и кратными интегралами типа Коши и Гильберта*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – М., 1988. – 137 с.
17. Сурай Л.А. *Прямые методы решения интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 131 с.
18. Валеева Р.Т. *Аппроксимативные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1995. – 108 с.
19. Аюпова Е.Ф. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода*: Дис. … канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2000. – 112 с.
20. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

Казанский государственный университет

Поступила 16.10.2002