ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 11 (510)

УДК 514.764

М.Л. ГАВРИЛЬЧЕНКО, В.А. КИОСАК, Й. МИКЕШ

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

1. Введение. В теории геодезических отображений римановых пространств предполагается такое соответствие между их точками, при котором *каждая* геодезическая линия одного пространства переходит точно в геодезическую другого [1]–[8].

В данной работе рассматриваются такие бесконечно малые деформации римановых пространств, при которых каждая геодезическая переходит в геодезическую деформированного пространства с некоторой контролируемой точностью [8]–[11]. Такой подход, если иметь в виду прикладные вопросы моделирования, может оказаться даже более соответствующим реальной физической истории, проистекающей в гравитационном или электромагнитном поле, при реальном движении некоторой механической системы и т. п.

Отметим, что на сигнатуру метрик римановых пространств V_n не налагаем ограничения, как принято, например, в [5]–[8]. Исследования ведутся локально в классе достаточно гладких функций.

2. Бесконечно малые геодезические деформации римановых пространств. Пусть V_m — риманово пространство, отнесенное к локальным координатам $(y^1, y^2, \dots, y^m)$, и пусть формулами

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad \operatorname{rank}\left\| \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \right\| = n < m, \tag{1}$$

определяется некоторое изометрически погруженное риманово подпространство $V_n \subset V_m$. Здесь и далее греческие индексы $\alpha, \beta, \dots$ принимают значения из множества $\{1, 2, \dots, m\}$, латинские $i, j, \dots$ — из множества $\{1, 2, \dots, n\}$.

Если $a_{\alpha\beta}$ и g_{ij} — метрические тензоры V_m и V_n, то [2]

$$g_{ij} = a_{\alpha\beta} \frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}. \tag{2}$$

Пусть, далее, $\xi^\alpha(x^1, x^2, \dots, x^n)$ — некоторое контравариантное векторное поле V_m, заданное в точках V_n. Формулы

$$\widetilde{y}^\alpha = y^\alpha(x) + \varepsilon \xi^\alpha(x), \tag{3}$$

где ε — малый числовой параметр, определяют некоторое $\widetilde{V}_n$, которое будем называть *бесконечно малой деформацией* V_n. Поле $\xi^\alpha(x)$ естественно назвать полем *смещений* или вектором *смещений* [11].

Изучая $\widetilde{V}_n$, будем считать, что величинами порядка ε^2 и выше в силу малости ε или в силу достаточной точности можно пренебречь.

Таким образом, рассматривается бесконечно малая деформация 1-го порядка, хотя два последних слова в названии теории будут для краткости опускаться, как это принято обычно.

Поддержано грантом № 201/02/0616 грантового агентства Республики Чехия.

В силу сказанного для метрического тензора $\widetilde{V}_n$

$$\widetilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon \delta g_{ij}. \tag{4}$$

Найдем тензор δg_{ij}. Для этого заметим, что формула (3) дает $\delta y^\alpha = \xi^\alpha(x)$, а

$$a_{\alpha\beta}(\widetilde{y}) = a_{\alpha\beta}(y + \varepsilon\xi) = a_{\alpha\beta}(y) + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} \xi^\gamma \cdot \varepsilon + \cdots ,$$

так что $\delta a_{\alpha\beta} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}\xi^\gamma$.

По отношению к преобразованию координат в пространстве V_n все y^α и ξ^α инвариантны, поэтому их первые частные производные совпадают с ковариантными. Заметив все это, в силу соотношения (2) имеем

$$\delta a_{ij} = \delta(a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j}) = \delta a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta} \delta y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} \delta y^\beta_{,j} = \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} \xi^\gamma y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + a_{\alpha\beta}(\xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,j}). \tag{5}$$

Формула (5) справедлива для любой бесконечно малой деформации и в любой системе координат.

Определение. Бесконечно малые деформации V_n будем называть *геодезическими*, если при этих деформациях сохраняются геодезические линии V_n.

Другими словами, V_n и $\widetilde{V}_n$, отнесенные к общим координатам $\{x^i\}$, должны допускать геодезическое отображение друг на друга. Но в таком случае для V_n и $\widetilde{V}_n$ должны выполняться уравнения Леви-Чивита [1]–[8]

$$\widetilde{g}_{ij,k} = 2\psi_k \widetilde{g}_{ij} + \psi_i \widetilde{g}_{jk} + \psi_j \widetilde{g}_{ik}, \tag{6}$$

причем ψ_i — градиентный вектор, который определяется инвариантом

$$\psi = \frac{1}{2(n+1)} \ln\left|\frac{\widetilde{g}}{g}\right|, \quad \text{где} \quad g \stackrel{\text{def}}{=} \det\|g_{ij}\| \quad \text{и} \quad \widetilde{g} \stackrel{\text{def}}{=} \det\|\widetilde{g}_{ij}\|.$$

В нашем случае

$$2(n+1)\psi = \ln\left|\frac{\widetilde{g}}{g}\right| = \ln\left|1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right| = \ln\left(1 + \frac{\delta g}{g}\varepsilon\right) = \varepsilon\frac{\delta g}{g} + \cdots ,$$

так что ψ_i в (6) надо заменить на $\varepsilon\psi_i$.

С учетом (4) уравнения Леви-Чивита (6) дают

$$\delta g_{ij,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}. \tag{7}$$

Наоборот, при выполнении (7) для тензора $\widetilde{g}_{ij} = g_{ij} + \varepsilon\delta g_{ij}$ будут выполнены и (6). Невырожденность $\widetilde{g}_{ij}$ обеспечивается нужным выбором параметра ε. Таким образом, условия (7) необходимы и достаточны для того, чтобы деформация V_n была геодезической. Симметрический тензор δg_{ij} для удобства в дальнейшем будем обозначать через h_{ij}.

Таким образом получена

Теорема 1 ([10]). *Для того чтобы риманово пространство V_n допускало бесконечно малые геодезические деформации, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовал симметрический тензор h_{ij}, удовлетворяющий уравнениям*

$$h_{ij,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik} \tag{8}$$

при некотором градиентном векторе ψ_i.

3. Геодезические деформации и геодезические отображения. Если в (8) $\psi_i = 0$, то $h_{ij,k} = 0$, что возможно в двух случаях:

1. $h_{ij} = Cg_{ij}$, $C = \text{const}$, но тогда (см. (4)) $\widetilde{g}_{ij} = g_{ij}(1+\varepsilon C)$, т. е. деформация сводится к бесконечно малой гомотетии.
2. $h_{ij} \neq Cg_{ij}$. В этом случае в V_n существует симметрический ковариантно постоянный тензор.

Из (6) следует, что в обоих случаях $\widetilde{g} = Cg$, т. е. деформация является гомотетически ареальной. Будем считать эти случаи *тривиальными*, нетривиальный случай характеризуется условием $\psi_i \neq 0$. Но тогда (8) можно переписать в виде $(h_{ij} - 2\psi g_{ij})_{,k} = \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}$, т. е. в V_n тензор $a_{ij} = h_{ij} - 2\psi g_{ij}$ при $\lambda_i = \psi_i$ удовлетворяет системе основных уравнений теории геодезических отображений (см. [6], с. 121, формула (8)):

$$a_{ij,k} = \lambda_i g_{jk} + \lambda_j g_{ik}. \tag{9}$$

С другой стороны, для тензора $h_{ij} = a_{ij} + 2\lambda g_{ij}$, где a_{ij} — решение (9), выполняются уравнения (8), следовательно метрический тензор $\widetilde{V}_n$ имеет представление $\widetilde{g}_{ij} = (1+2\lambda\varepsilon)g_{ij} + \varepsilon a_{ij}$.

Сопоставляя это с теоремой 1, приходим к выводу.

Теорема 2. *Риманово пространство V_n допускает нетривиальные бесконечно малые геодезические деформации тогда и только тогда, когда оно допускает и нетривиальные геодезические отображения.*

Эта теорема впервые была доказана в [9], но только для римановых пространств первого класса (1971 г.).

Из теоремы 2 с учетом теорем Н.С. Синюкова и Й. Микеша [6], [7] вытекает

Теорема 3. *Симметрические, рекуррентные, дважды симметрические, дважды рекуррентные, m-рекуррентные и полусимметрические пространства D_n^m непостоянной кривизны не допускают нетривиальных геодезических деформаций.*

Заметим, что пространства D_n^m были введены в [12].

Напротив, для пространств постоянной кривизны, для эквидистантных пространств такие деформации существуют. В E_3 геодезические деформации допускают поверхности Лиувилля и только они.

4. Геодезические деформации подпространств риманова пространства. Основной задачей теории геодезических деформаций является всестороннее изучение взаимосвязей и взаимозависимостей риманова пространства V_n, его объемлющего пространства V_m и изгибающего поля $\xi^\alpha(x)$. Идеальной ситуацией, очевидно, можно считать случай, когда удается найти поле $\xi^\alpha(x)$. Легко получить уравнения для него.

Действительно, подставляя (5) в (7), получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma \partial y^\nu} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} \xi^\gamma y^\nu_{,k} + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}(y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} \xi^\gamma_{,k} + y^\alpha_{,i} y^\beta_{,jk} \xi^\gamma + y^\alpha_{,ik} y^\beta_{,j} \xi^\gamma) + \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}(\xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} + y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,j}) y^\gamma_{,k} + \\ + a_{\alpha\beta}(\xi^\alpha_{,ik} y^\beta_{,j} + \xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,jk} + y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,jk} + y^\alpha_{,ik} \xi^\beta_{,j}) = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}.\end{aligned} \tag{10}$$

При этом использовано то, что $a_{\alpha\beta}$ инвариантны в V_n.

Уравнения (10) усложнены тем обстоятельством, что старшая производная поля смещений $\xi^\alpha_{,ik}$ входит дважды. От этого можно избавиться, выполнив операцию с такой подстановкой индексов i, j, k: $(i,j,k) + (i,k,j) - (j,k,i)$. Получим

$$\begin{aligned}a_{\alpha\beta} y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,jk} + a_{\alpha\beta} \xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,jk} + \Gamma_{\gamma\beta\alpha}(y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} \xi^\gamma_{,k} + y^\alpha_{,i} \xi^\beta_{,j} y^\gamma_{,k} + \xi^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} y^\gamma_{,k}) + \\ + \xi^\gamma \left(\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,jk} + \frac{\partial \Gamma_{\nu\beta\alpha}}{\partial y^\gamma} y^\alpha_{,i} y^\beta_{,j} y^\nu_{,k}\right) = \psi_k g_{ij} + \psi_j g_{ik},\end{aligned} \tag{11}$$

где $\Gamma_{\alpha\beta\gamma}$ – символы Кристоффеля пространства V_m, составленные для $a_{\alpha\beta}$. Уравнения (10) и (11) эквивалентны. Они представляют необходимые и достаточные условия бесконечно малых геодезических деформаций $V_n \subset V_m$ с полем смещений $\xi^\alpha(x)$.

5. Основные уравнения геодезических деформаций гиперповерхностей. Пусть $m = n+1$, т. е. V_n — гиперповерхность V_m. Условие (1) позволяет векторы $y^\alpha_{,i}$ выбрать в качестве базиса V_n. Будем считать, что $\det\|g_{ij}\| \neq 0$, следовательно, нормаль к гиперповерхности $\eta^\alpha(x)$ неизотропна [2], т. е.

$$a_{\alpha\beta}y^\alpha_{,i}\eta^\beta = 0, \quad a_{\alpha\beta}\eta^\alpha\eta^\beta = e, \quad e = \pm 1.$$

Система векторов $\{y^\alpha_{,i}, \eta^\alpha\}$ образует базис V_m. Поэтому вектор смещения ξ^α можно однозначно выразить в следующей форме:

$$\xi^\alpha(x) = \lambda^i y^\alpha_{,i} + \mu\eta^\alpha, \tag{12}$$

где $\lambda^i(x)$ и $\mu(x)$ — некоторые вектор и инвариант V_n.

Так как V_n — гиперповерхность V_{n+1}, то справедливы деривационные формулы [2] *Гаусса:* $y^\alpha_{,ij} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu}y^\mu_{,i}y^\nu_{,j} + e\Omega_{ij}\eta^\alpha$ и *Вейнгартена*: $\eta^\alpha_{,i} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}y^\mu_{,i}\eta^\nu - \Omega^k_i y^\alpha_{,k}$, где Ω_{ij} — второй основной тензор V_n, $\Omega^k_i \overset{\text{def}}{=} \Omega_{ij}g^{jk}$, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ — символы Кристоффеля пространства V_m.

Эти формулы позволяют, используя (12), выразить $\xi^\alpha_{,i}$ и $\xi^\alpha_{,ij}$ в том же базисе $\{y^\alpha_{,i}, \eta^\alpha\}$. Так, например,

$$\xi^\alpha_{,i} = (\lambda^s_{,i} - \mu\Omega^s_i)y^\alpha_{,s} - \lambda^s\Gamma^a_{\mu\nu}y^\mu_{,s}y^\nu_{,i} + (e\lambda^s\Omega_{si} + \mu_{,i})\eta^\alpha - \mu\Gamma^\alpha_{\mu\nu}y^\mu_{,i}\eta^\nu.$$

Если все эти выражения подставить в уравнения (11), учесть, что $\frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma} = \Gamma_{\alpha\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\gamma\alpha}$, то после несложных, но достаточно громоздких подсчетов, получим

$$\lambda_{i,jk} = -\lambda_s R^s_{kij} + \psi_j g_{ik} + \psi_k g_{ij} + (\mu\Omega_{ij})_{,k} + (\mu\Omega_{ik})_{,j} - (\mu\Omega_{jk})_{,i}. \tag{13}$$

Теорема 4. *Для того чтобы риманово пространство $V_n \subset V_{n+1}$ допускало бесконечно малые деформации, необходимо и достаточно, чтобы в нем существовали вектор λ_i и инвариант μ, удовлетворяющие уравнениям* (13).

Система (13) есть координатная запись (11) в базисе $\{y^\alpha_{,i}, \eta^\alpha\}$, а потому она дает необходимые и достаточные условия геодезической деформации гиперповерхности V_n. Будем называть систему (13) *основной* [11].

Симметрированием (13) по индексам i и j получим выражение

$$(\lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} - 2\mu\Omega_{ij})_{,k} = 2\psi_k g_{ij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}. \tag{14}$$

Аналогичными подсчетами как для уравнения (10), можно доказать, что системы (13) и (14) эквивалентны. А (14) показывает, что для тензора $a_{ij} = \lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} - 2\mu\Omega_{ij} - 2\psi g_{ij}$ она превращается в (9), что еще раз подтверждает теорему 2.

Для тензора $h_{ij} = \lambda_{i,j} + \lambda_{j,i} - 2\mu\Omega_{ij}$ уравнения (14) запишутся в форме (8). В заключение этого пункта сделаем замечание.

Если V_n совпадает с V_m, то (3) определяют бесконечно малые преобразования V_n, изучавшиеся ранее [2], [13]. В этом случае $y^\alpha = x^\alpha$, в (12) $\mu = 0$, $\xi^\alpha = \lambda^\alpha$, а из (13) получается хорошо известная система для бесконечно малых преобразований, которые сохраняют геодезические $\xi_{i,jk} = -\xi_s R^s_{kij} + \psi_i g_{jk} + \psi_j g_{ik}$.

6. Система уравнений типа Коши для геодезических деформаций гиперповерхности. Вопрос о бесконечно малых геодезических деформациях гиперповерхности риманова пространства сводится к решению линейной системы (13), правая часть которых содержит, кроме λ_i, производные от неизвестных μ и ψ_i. Эта система допускает сведение к смешанной тензорной системе типа Коши от $n^2 + 3n + 2$ неизвестных функций.

Получению этой системы и посвящена эта часть. В [11] такая система получена для случая невырожденного второго основного тензора гиперповерхности Ω_{ij}. Здесь покажем, что такая система существует при более слабых условиях. В дальнейшем будем предполагать, что имеет место

$$\operatorname{rank}\|\Omega_{ij}\| > 2.$$

Предварительно введем

$$\lambda_{ij} = \lambda_{i,j}, \quad \mu_i = \mu_{,i}. \tag{15}$$

В силу (15) формулы (13) перепишутся в следующем виде:

$$\lambda_{ij,k} = -\lambda_s R^s_{kij} + g_{ij}\psi_k + g_{ik}\psi_j + \mu(\Omega_{ij,k} + \Omega_{ik,j} - \Omega_{jk,i}) + \mu_k\Omega_{ij} + \mu_j\Omega_{ik} - \mu_i\Omega_{jk}. \tag{16}$$

Условия интегрируемости уравнений (16) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{sj}R^s_{ikl} + \lambda_{si}R^s_{jkl} = \lambda_{s[k}R^s_{l]ij} + \lambda_s(R^s_{lij,k} - R^s_{kij,l}) + \\ + g_{ik}\psi_{j,l} - g_{il}\psi_{j,k} + \mu\Omega_{s(i}R^s_{j)kl} + (\mu\Omega_{ik})_{,jl} + (\mu\Omega_{jl})_{,ik} - (\mu\Omega_{il})_{,jk} - (\mu\Omega_{jk})_{,il}, \end{aligned} \tag{17}$$

где круглыми и квадратными скобками обозначаем симметрирование и альтернирование соответственно.

Если (17) просимметрируем по индексам i и j, а затем свернем с g^{il} ($\|g^{ij}\| = \|g_{ij}\|^{-1}$), то получим

$$n\psi_{j,k} = h_{js}R^s_k - h_{ps}R^s{}_{jk}{}^p + \omega g_{jk}, \tag{18}$$

где $R^s_k = R^s_{ijk}g^{ij}$, ω — некоторый инвариант, индексы подняты тензором g^{ij}, $h_{ij} = \lambda_{(ij)} - 2\mu\,\Omega_{ij}$.

Найдем условия на неизвестный инвариант ω. Условия интегрируемости (18) приводятся к виду

$$(n+3)\psi_s R^s_{jkl} = \psi_s R^s_{[k}g_{l]j} + h_{js}R^s_{[k,l]} - h_{sp}R^{s}_{\cdot j[k}{}^{p}_{\cdot,l]} + g_{j[k}\omega_{,l]}.$$

Сворачивая последнее выражение с g^{jk}, получим

$$(n-1)\omega_{,l} = 2(n+1)\psi_s R^s_l + h_{js}R^{s}_{\cdot l,}{}^{j}_{\cdot} - h_{sp}R^{sk}_{\cdot\cdot}{}^{p}_{l\cdot,k}. \tag{19}$$

Если при помощи (18) исключить $\psi_{j,k}$ из (17), то получим

$$\lambda_{sp}A^{sp}_{ijkl} + \lambda_s B^s_{ijkl} + \mu_s C^s_{ijkl} + \omega D_{ijkl} + \mu E_{ijkl} = \mu_{j,l}\Omega_{ik} - \mu_{j,k}\Omega_{il} - \mu_{i,l}\Omega_{jk} + \mu_{i,k}\Omega_{jl}, \tag{20}$$

где

$$\begin{gathered} A^{sp}_{ijkl} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta^p_j R^s_{ikl} + \delta^s_i R^p_{jkl} + \delta^p_l R^s_{kij} + \delta^s_k R^p_{lji} - \frac{1}{n}g_{ik}(\delta^{(s}_j R^{p)}_l - R^{(sp)}_{\cdot j l\cdot}) + \frac{1}{n}g_{il}(\delta^{(s}_j R^{p)}_k - R^{(s}_{\cdot jk}{}^{p)}_{\cdot}), \\ B^s_{ijkl} \overset{\mathrm{def}}{=} R^s_{kij,l} - R^s_{lij,k}, \quad C^s_{ijkl} \overset{\mathrm{def}}{=} \delta^s_{[i}\Omega_{j]\,[k,l]} + \delta^s_{[k}\Omega_{l]\,[i,j]}, \quad D_{ijkl} \overset{\mathrm{def}}{=} -\frac{1}{n}(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}), \\ E_{ijkl} \overset{\mathrm{def}}{=} -\Omega_{s(i}R^s_{j)kl} - \Omega_{k[i,j]l} + \Omega_{l[i,j]k} + \frac{2}{n}\Omega_{js}g_{i[k}R^s_{l]} + \frac{2}{n}\Omega_{sp}R^{s}_{\cdot j]k}{}^{p}_{\cdot}g_{l]i}. \end{gathered}$$

Существенно отметить, что пять последних тензоров в конечном счете определяются либо только метрикой V_n, либо метрикой и Ω_{ij}.

Ввиду того, что $\operatorname{rank}\|\Omega_{ij}\| > 2$, в V_n, очевидно, существуют хотя бы три некомпланарные векторные поля a^i, b^i, c^i такие, что

$$\Omega_{ij}a^ia^j = e_a = \pm 1, \quad \Omega_{ij}b^ib^j = e_b = \pm 1, \quad \Omega_{ij}c^ic^j = e_c = \pm 1, \quad \Omega_{ij}a^ib^j = \Omega_{ij}a^ic^j = \Omega_{ij}b^ic^j = 0.$$

Заметим, что эти векторы определяются Ω_{ij}. Несмотря на то, что они определены неоднозначно, их вправе считать объектами пространства V_n, т. е. определенными через метрику и вторую форму V_n.

Поочередно умножим (20) на a^ia^k, b^ib^k, c^ic^k, а затем просуммируем по i и k. Получим

$$e_a\mu_{j,l} = \overset{a}{\mu}_j\overset{a}{\Omega}_l + \overset{a}{\mu}_l\overset{a}{\Omega}_j - \overset{a}{\mu}\Omega_{jl} + \overset{1}{T}_{jl}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega), \tag{21a}$$

$$e_b\mu_{j,l} = \overset{b}{\mu}_j\overset{b}{\Omega}_l + \overset{b}{\mu}_l\overset{b}{\Omega}_j - \overset{b}{\mu}\Omega_{jl} + \overset{2}{T}_{jl}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega), \tag{21b}$$

$$e_c\mu_{j,l} = \overset{c}{\mu}_j\overset{c}{\Omega}_l + \overset{c}{\mu}_l\overset{c}{\Omega}_j - \overset{c}{\mu}\Omega_{jl} + \overset{3}{T}_{jl}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega), \tag{21c}$$

где $\overset{a}{\mu}_j \overset{\text{def}}{=} \mu_{j,k}a^k$; $\overset{b}{\mu}_j \overset{\text{def}}{=} \mu_{j,k}b^k$; $\overset{c}{\mu}_j \overset{\text{def}}{=} \mu_{j,k}c^k$; $\overset{a}{\mu} \overset{\text{def}}{=} \mu_{j,k}a^ja^k$; $\overset{b}{\mu} \overset{\text{def}}{=} \mu_{j,k}b^jb^k$; $\overset{c}{\mu} \overset{\text{def}}{=} \mu_{j,k}c^jc^k$; $\overset{a}{\Omega}_l \overset{\text{def}}{=} \Omega_{lk}a^k$; $\overset{b}{\Omega}_l \overset{\text{def}}{=} \Omega_{lk}b^k$; $\overset{c}{\Omega}_l \overset{\text{def}}{=} \Omega_{lk}c^k$; $\overset{\sigma}{T}$ $(\sigma = 1, 2, \dots)$ — тензоры, линейно выражающиеся через те объекты, которые указаны в качестве аргумента, с коэффициентами, определенными метрикой g_{ij} пространства V_n и его второй квадратичной формой Ω_{ij}, а также векторами a^i, b^i, c^i, которые определены по существу Ω_{ij}.

При помощи (21b) исключим в (21a) тензор $\mu_{j,l}$

$$e_a(\overset{a}{\mu}_j\overset{a}{\Omega}_l + \overset{a}{\mu}_l\overset{a}{\Omega}_j) - e_b(\overset{b}{\mu}_j\overset{b}{\Omega}_l + \overset{b}{\mu}_l\overset{b}{\Omega}_j) - (e_a\overset{a}{\mu} - e_b\overset{b}{\mu})\Omega_{jl} + e_a\overset{1}{T}_{jl} - e_b\overset{2}{T}_{jl} = 0. \tag{22}$$

Свернем (22) с c^jc^l, получим $(e_a\overset{a}{\mu} - e_b\overset{b}{\mu}) = e_c(e_a\overset{1}{T}_{jl} - e_b\overset{2}{T}_{jl})c^jc^l$. Тогда после свертывания (22) с a^ja^l будем иметь $\overset{a}{\mu} = \overset{4}{T}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega)$, а в силу предыдущего и $\overset{b}{\mu} = \overset{5}{T}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega)$.

В итоге свертыванием (22) с a^l убедимся, что

$$\overset{a}{\mu}_j = \alpha\overset{b}{\Omega}_j + \overset{6}{T}_j(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega), \tag{23a}$$

где α — некоторый инвариант. Аналогичным путем анализом (21a) и (21c) получим

$$\overset{a}{\mu}_j = \beta\overset{c}{\Omega}_j + \overset{7}{T}_j(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega). \tag{23b}$$

Вычитая (23b) из (23a), получим $\alpha\overset{b}{\Omega}_j - \beta\overset{c}{\Omega}_j + \overset{6}{T}_j - \overset{7}{T}_j = 0$. Свертывая последнее с b^j, убедимся, что $\alpha = \overset{8}{T}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega)$. В итоге легко убедиться, что формула (21a) принимает вид:

$$\mu_{j,l} = \overset{9}{T}_{jl}(\lambda_{sp}, \lambda_s, \mu_s, \mu, \omega). \tag{24}$$

Совокупность уравнений (15), (16), (18), (19) и (24), которую кратко обозначим через (A), дает линейное выражение первых ковариантных производных от λ_{ij}, λ_i, ψ_i, μ_i, μ, ω через эти же тензоры с коэффициентами, однозначно определенными V_n и V_{n+1}, т. е. мы имеем систему типа Коши. Заметим, что система (A) носит инвариантный характер относительно выбора координат в V_n. Итак, получена

Теорема 5. *Для того чтобы риманово пространство* $V_n \subset V_{n+1}$, $\operatorname{rank}\|\Omega_{ij}\| > 2$, *допускало нетривиальные бесконечно малые геодезические деформации, необходимо и достаточно, чтобы система уравнений* (A) *имела нетривиальное решение.*

Условия интегрируемости всех уравнений системы (A) суть линейные однородные алгебраические уравнения относительно λ_{ij}, λ_i, ψ_i, μ_i, μ, ω. Обозначим их через (B). Такими же будут их дифференциальные продолжения любого порядка, т. к. (A) линейна. Продолжения обозначим (B_1), (B_2) и т. д.

По аналогии с соответствующим результатом из теории геодезических отображений [6] получается

Теорема 6. *Для того чтобы риманово пространство* $V_n \subset V_{n+1}$ $(\operatorname{rank}\|\Omega_{ij}\| > 2)$ *допускало нетривиальные бесконечно малые геодезические деформации, необходимо и достаточно, чтобы система линейных однородных алгебраических уравнений* $(B), (B_1), (B_2), \dots, (B_s)$ $(s < n^2+3n+2)$ *имела решение относительно* λ_{ij}, λ_i, ψ_i $(\not\equiv 0)$, μ_i, μ, ω.

Отметим, что число $n^2 + 3n + 2$ существенно понижается в случае, когда V_n не имеет постоянную кривизну. Об этом свидетельствуют исследования [6], [7], [14], [15].

Литература

1. Levi Civita T. *Sulle transformationi delle equazioni dinamiche* // Ann. Math. Milano. – 1986. – Ser. 2. – V. 24. – P. 255–300.
2. Эйзенхарт Л.П. *Риманова геометрия.* – М.: Ин. лит., 1948.
3. Широков П.А. *Избранные работы по геометрии.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1966. – 432 с.
4. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
5. Петров А.З. *Новые методы в общей теории относительности.* – М.: Наука, 1966. – 495 с.
6. Синюков Н.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 256 с.
7. Mikeš J. *Geodesic mappings of affine-connected and Rietannian spaces* // J. Math. Sci. New York. – 1996. – V. 78. – № 2. – P. 311–333.
8. Радулович Ж., Микеш Й., Гаврильченко М.Л. *Геодезические отображения и деформации римановых пространств.* – Izd. CID, Podgorica, Одесса: Изд-во Одесск. ун-та, 1997. – 127 с.
9. Синюков Н.С., Гаврильченко М.Л. *Бесконечно малые геодезические деформации поверхностей* // Третья респ. конференция математиков Белоруссии, Минск, 1971.
10. Гаврильченко М.Л. *О геодезических деформациях гиперповерхностей* // Тез. докл. V Всесоюзной конференции по современным проблемам геометрии, Самарканд, 1972.
11. Gavrilchenko M.L. *Geodesic deformations of Rietannian space* // Diff. Geom. and its Appl. World Sci., Singapore, 1989. – P. 47–53.
12. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
13. Кайгородов В.Р. *О римановых пространствах* $\overset{*}{K}{}^{s}_{n}$ // Тр. геометрич. семин. ВИНИТИ. – 1974. – Т. 5. – С. 359–373.
14. Yano K. *The theory of Lie derivatives and its applications.* – Amst. North Holland publ. Groningen, Noordhoff, 1957. – 299 p.
15. Микеш Й., Киосак В.А. *О степени подвижности римановых пространств относительно геодезических отображений* // Геометрия погружен. многообразий. – М.: МГПИ, 1986. – С. 35-39.
16. Kiosak V.A. *Geodetická zobrazení Riemannových prostoru*: Дис. Olomouc, 2002.

Одесский государственный университет (*Украина, г. Одесса*)

Одесская государственная академия строительства и архитектуры (*Украина, г. Одесса*)

Оломоуцкий университет (*Чешская республика*)

Поступила
25.03.2004