ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 7 (518)

УДК 519.113

Б.С. КОЧКАРЕВ

СТРУКТУРНЫЕ СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА МАКСИМАЛЬНЫХ ШПЕРНЕРОВЫХ СЕМЕЙСТВ ПОДМНОЖЕСТВ

Пусть F — произвольное семейство подмножеств из $S = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. При решении многих проблем дискретной математики возникает необходимость изучать семейства F, удовлетворяющие тем или иным ограничениям [1]. В данной работе приводятся результаты о структурных свойствах одного класса максимальных семейств подмножеств Шпернера [2].

Определение 1 ([3]). Семейство F подмножеств множества S называется *шпернеровым*, если никакой элемент $A \in F$ не является подмножеством другого элемента $A' \in F$.

Определение 2 ([4]). Шпернерово семейство F называется *максимальным*, если для любого $A \subset S$, $A \notin F$, существует $A' \in F$ такой, что $A \subset A'$ либо $A' \subset A$.

Замечание. Свойство шпернеровости семейства F инвариантно относительно следующих преобразований:

а) $F \to \overline{F}$, где $\overline{F}$ — семейство, полученное из F заменой всех $A \in F$ на их дополнение $\overline{A}$;

б) $F \to F_{S'}$, где $F_{S'}$ — семейство, полученное из F путем применения подстановки

$$S' = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \\ a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Для числа $f(n)$ максимальных шпернеровых семейств (м. ш. с.) подмножеств n-элементного множества непосредственный подсчет дает $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 7$, $f(4) = 29$, $f(5) = 376$ [5].

Определение 3. Будем говорить, что шпернерово семейство F имеет тип $(k, k+1)$, если $|A| \in \{k, k+1\}$ для любого $A \in F$.

В силу а) из замечания при исследовании максимальных шпернеровых семейств типа $(k, k+1)$ n-элементного множества достаточно ограничиться случаем $k < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Обозначим через p_i число элементов $A \in F$, $|A| = k$, в которые не входит элемент $a_i \in S$, и через q_i — число элементов $A \in F$, $|A| = k+1$, в которые входит элемент a_i.

Пусть $r_i = p_i + q_i$, $r = \max\{r_i\}$, $i = \overline{1, n}$. Очевидно, при любом $n \geq 1$ справедливо неравенство $r_i \leq \binom{n-1}{k}$.

Определение 4. Число $0 \leq s \leq \binom{n-1}{k}$ назовем *допустимым*, если существует такое м. ш. с., что $r_i = s$ для некоторого i, $1 \leq i \leq n$.

В силу б) из замечания, если s — допустимое число, то для любого $i = \overline{1, n}$ найдутся м. ш. с. с $r_i = s$. Поэтому в дальнейшем в качестве элемента $a_i \in S$ будем рассматривать, как правило, фиксированный элемент $a_n \in S$.

Теорема 1. *Число $s = \binom{n-1}{k} - 1$ не является допустимым.*

Доказательство. Докажем методом от противного. Пусть F — м. ш. с. с $r_n = \binom{n-1}{k} - 1$. Тогда найдутся множества A, $|A| = k$, $a_n \notin A$; A', $|A'| = k+1$, $a_n \in A'$, не принадлежащие F, причем $A' = A \cup \{a_n\}$. Поскольку F максимальное, то в F найдется множество B, $|B| = k+1$, $a_n \notin B$, $B \supset A$ и B', $|B'| = k$, $a_n \in B'$, $B' \subset A'$. Пусть для определенности $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $A' = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_n\}$, $B = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, a_j\}$, $j \notin \{1, 2, \ldots, k, n\}$, $B' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_n\}$. Отсюда, поскольку $r_n = \binom{n-1}{k} - 1$, то $A'' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_j\}$ либо $B'' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k, a_j, a_n\}$ принадлежит F, но $A'' \subset B$, а $B'' \supset B'$, что противоречит тому, что F шпернерово. $\square$

Кажется естественным поставить вопрос относительно допустимых значений s в пределах $0 \le s \le \binom{n-1}{k}$ [4], [5].

Теорема 2. *Для м.ш.с. типа $(1,2)$ множества $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ все числа $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{1} - 2, \binom{n-1}{1}$ являются допустимыми, при этом существуют такие семейства с $r_n = p_n = 0, 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{1} - 2, \binom{n-1}{1}$.*

Доказательство. Произвольное м. ш. с. типа $(1,2)$ представляет собой $F = \{\{a_{i_1}\}, \{a_{i_2}\}, \ldots, \{a_{i_m}\}, \{a_{j_1}, a_{k_1}\}, \ldots, \{a_{j_r}, a_{k_r}\}\}$, где число подмножеств A, $|A| = 2$, равно $\binom{n-m}{2}$, $m \le n-2$, $m = n$, $j_l, k_l \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_m\}$, $l = \overline{1, r}$. Очевидно, все числа $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{1} - 2, \binom{n-1}{1}$ и только они встречаются в качестве допустимых чисел в указанных семействах. Если из указанных семейств выделим все семейства такие, что среди подмножеств A, $|A| = 1$, присутствует подмножество $\{a_n\}$, то r_n для них будут удовлетворять условию теоремы.

Если F — шпернерово семейство типа $(k, k+1)$, то через $F^{(k)}$, $F^{(k+1)}$ обозначим соответственно семейство подмножеств $A \in F$, $|A| = k$, $A' \in F$, $|A'| = k+1$, и для шпернерова семейства F множества S обозначим через $F \cup \{a\}$ шпернерово семейство F' множества $S \cup \{a\}$, полученное добавлением к каждому подмножеству $A \in F$ элемента a.

Лемма. *Если $F_1 = F_1^{(k-1)} \cup F_1^{(k)}$ и $F_2 = F_2^{(k)} \cup F_2^{(k+1)}$ — м. ш. с. соответственно типов $(k-1, k)$, $(k, k+1)$ множества $S' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ такие, что $F_1^{(k)} \cap F_2^{(k)} = \emptyset$, то семейство $F = (F_1^{(k-1)} \cup \{a_n\}) \cup (F_1^{(k)} \cup \{a_n\}) \cup F_2^{(k)} \cup F_2^{(k+1)}$ является м. ш. с. типа $(k, k+1)$ множества $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, для которого $r_{n-1}(F) = r_{n-1}(F_1) + r_{n-1}(F_2)$.*

Доказательство. Образованное в заключении леммы семейство F является шпернеровым типа $(k, k+1)$ множества S. Действительно, в силу $F_1^{(k)} \cap F_2^{(k)} = \emptyset$ ни одно множество $A \in F_2^{(k)}$ не является подмножеством множества $A' \in F_1^{(k)} \cup \{a_n\}$. Точно так же ни одно множество $A \in F_1^{(k-1)} \cup \{a_n\}$ не является подмножеством множества $A' \in F_2^{(k+1)}$, т. к. $a_n \notin F_2^{(k+1)}$. Далее, легко убедиться, что семейство F является максимальным. Действительно, любое множество $A \subset S$, $|A| = k$, $a_n \in A$, либо совпадает с некоторым множеством из $F_1^{(k-1)} \cup \{a_n\}$, либо является подмножеством некоторого множества из $F_1^{(k)} \cup \{a_n\}$ в силу максимальности семейства $F_1^{(k-1)} \cup F_1^{(k)}$ множества S'. Аналогично любое множество $A \subset S$, $|A| = k$, $a_n \notin A$, в силу максимальности $F_2^{(k)} \cup F_2^{(k+1)}$ либо совпадает с некоторым множеством из $F_2^{(k)}$, либо является подмножеством некоторого множества из $F_2^{(k+1)}$. Аналогично устанавливается максимальность семейства F относительно множеств $A \subset S$, $|A| = k+1$. Очевидно, шпернеровы семейства $(F_1^{(k-1)} \cup \{a_n\}) \cup (F_1^{(k)} \cup \{a_n\})$, $F_1^{(k)} \cup F_2^{(k+1)}$ множества S имеют для r_{n-1} соответственно значения $r_{n-1}(F_1)$, $r_{n-1}(F_2)$. Отсюда $r_{n-1}(F) = r_{n-1}(F_1) + r_{n-1}(F_2)$. $\square$

Теорема 3. *Для м. ш. с. типа $(2,3)$ множества $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ все числа $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{2} - 2, \binom{n-1}{2}$ являются допустимыми.*

Доказательство. Докажем теорему методом математической индукции. Для $n = 4$ справедливость утверждения следует из теоремы 2 и из п. а) замечания. Пусть теперь теорема верна для всех множеств S', $|S'| \le n-1$. Покажем ее справедливость для S, $|S| = n$. Пусть

$F_1 = F_1^{(1)} \cup F_1^{(2)}$ — м. ш. с. типа $(1,2)$ множества $S' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$ с $r_{n-1} = p_{n-1} = \binom{n-2}{1}$. Это будет семейство $F_1 = \{\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_{n-1}\}\}$. Пусть далее

$$F_{20} = F_{20}^{(2)} \cup F_{20}^{(3)},\ F_{21} = F_{21}^{(2)} \cup F_{21}^{(3)}, \ldots, F_{2\binom{n-2}{2}-2} = F^{(2)}_{2\binom{n-2}{2}-2} \cup F^{(3)}_{2\binom{n-2}{2}-2},\ F_{2\binom{n-2}{2}} = F^{(2)}_{2\binom{n-2}{2}} \cup F^{(3)}_{2\binom{n-2}{2}}$$

— м. ш. с. типа $(2,3)$ множества S' со значениями r_{n-1}, равными соответственно $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-2}{2}-2, \binom{n-2}{2}$. По индуктивному предположению такие семейства найдутся. Образуем семейства

$$F_i = (F_1 \cup \{a_n\}) \cup F_{2i}, \quad i = 0, 1, \ldots, \binom{n-2}{2} - 2, \binom{n-2}{2}.$$

Относительно этих семейств выполняются условия доказанной леммы, т. е. в результате получим м. ш. с. типа $(2,3)$ множества S, для которых имеет место $r_{n-1}(F_i) = \binom{n-2}{1} + i$, $i = \overline{0, \binom{n-2}{2} - 2}, \binom{n-2}{2}$, или для $r_{n-1}(F_i)$ получим значения от $\binom{n-2}{1}$ до $\binom{n-1}{2} - 2$ включительно и значение $\binom{n-1}{2}$. Для завершения доказательства осталось построить м. ш. с. типа $(2,3)$ множества S со значениями r_{n-1}, равными $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-2}{1} - 1$. Пусть теперь $F_{1i} = F_{1i}^{(1)} \cup F_{1i}^{(2)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \binom{n-2}{1} - 2$, — м. ш. с. типа $(1,2)$ множества S' со значениями $r_{n-1} = p_{n-1}$, равными соответственно $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-2}{1} - 2$, и $F_2 = F_2^{(2)} \cup F_2^{(3)}$ — м. ш. с. типа $(2,3)$ множества S' со значением $r_{n-1} = 0$. Такие семейства в силу теоремы 2 и индуктивного предположения найдутся. Образуем и в этом случае семейства $F_i' = (F_{1i} \cup \{a_n\}) \cup F_2$, $i = 0, 1, 2, \ldots, \binom{n-2}{1} - 2$.

Относительно этих семейств выполняются условия леммы, и в результате получим м. ш. с. типа $(2,3)$ множества S со значениями r_{n-1} от 0 до $\binom{n-2}{1} - 2$ включительно. Для получения семейства со значением $r_{n-1} = \binom{n-2}{1} - 1$ достаточно последнее семейство $F'_{\binom{n-2}{1}-2}$ преобразовать в искомое, добавив к семейству F_2 некоторое множество $\{a_{i1}, a_{i2}, a_{n-1}\}$ и исключив из F_2 все множества A, $|A| = 2$, $A \subset \{a_{i1}, a_{i2}, a_{n-1}\}$. Полученное таким образом м. ш. с. типа $(2,3)$ будет иметь значение $r_{n-1} = \binom{n-2}{1} - 1$. Таким образом, теорема будет справедлива для всех n. $\square$

Возможно, закономерность, доказанная в теоремах 2, 3 для допустимых чисел м. ш. с. типов $(1,2)$, $(2,3)$ распространяется на м. ш. с. типа $(k, k+1)$: для м. ш. с. типа $(k, k+1)$ множества S все числа $0, 1, 2, \ldots, \binom{n-1}{k} - 2, \binom{n-1}{k}$ являются допустимыми.

Всякое шпернерово семейство F типа $(k, k+1)$, $|F| = r_n = s$ назовем реализацией числа s.

Определение 5. Некоторая реализация F числа s называется *допустимой*, если существует м. ш. с. $F' \supseteq F$ с $r_n = s$.

Необходимым условием допустимости некоторой реализации числа s является допустимость этого числа. Из теоремы 1 вытекает

Следствие. Никакая реализация числа $s = \binom{n-1}{k} - 1$ не является допустимой.

Для любого допустимого числа s, $0 \le s \le \binom{n-1}{k}$, можно построить $\binom{\binom{n-1}{k}}{s} 2^s$ различных реализаций с $r_n = s$, но не всякая реализация допустимого числа s является допустимой реализацией. Так, при $n = 5$ все числа 0, 1, 2, 3, 4, 6 являются допустимыми, но никакая реализация с $r_n = 2$, где $p_n = 2$, $q_n = 0$ или $p_n = 0$, $q_n = 2$ не является допустимой. То же самое имеет место для реализаций с $r_n = 4$, где $p_n = 4$, $q_n = 0$ или $p_n = 0$, $q_n = 4$. С другой стороны, для $r_n = 4$, где $p_n = 2$, $q_n = 2$, имеются как допустимые реализации, так и реализации, которые таковыми не являются. Например, $F = \{\{a_3, a_4\}, \{a_2, a_4\}, \{a_1, a_4, a_5\}, \{a_2, a_3, a_5\}\}$ не является допустимой реализацией числа $s = r_n = 4$, а $F = \{\{a_3, a_4\}, \{a_2, a_4\}, \{a_1, a_4, a_5\}, \{a_1, a_2, a_5\}\}$ — допустимая реализация числа $s = r_n = 4$.

Предложение. *Всякая допустимая реализация F допустимого числа s однозначно доопределяется до м. ш. с. $F' \supseteq F$.*

Справедливость предложения следует из того, что семейство всех множеств A, $|A| = k$, $a_n \in A$, которые не являются подмножествами множеств из F, и семейство всех множеств A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, для которых ни одно множество из F не является его подмножеством, образует шпернерово семейство.

Теорема 4. *Любая реализация числа $s = \binom{n-1}{k}$ является допустимой реализацией.*

Доказательство. Пусть F – произвольная реализация числа s. Для любых натуральных p_n, q_n таких, что $r_n = p_n + q_n = \binom{n-1}{k}$, найдутся соответствующие реализации F, причем число таких реализаций равно $\binom{\binom{n-1}{k}}{p_n}$. Любое множество A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, не вошедшее в F, является подмножеством некоторого множества A', $|A'| = k+1$, $a_n \in A'$, $A' \in F$, и для всякого множества A', $|A'| = k+1$, $a_n \in A'$, не вошедшего в F, найдется множество A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, $A \in F$, такое, что $A \subset A'$. Поэтому, если F не является м. ш. с., то оно согласно предложению однозначно дополняется до м. ш. с. $F' \supset F$ добавлением некоторых множеств A, $|A| = k$, $a_n \in A$, и A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, которые в совокупности сами образуют шпернерово семейство. □

Теорема 5. *Число элементов $\lambda(n,k)$ в любом м. ш. с. удовлетворяет неравенствам*

$$\binom{n-1}{k} \leq \lambda(n,k) \leq \binom{n}{k+1},$$

причем указанные оценки достижимы.

Доказательство. Нижняя оценка. Если $r_n = 0$, то F состоит из всех множеств A, $|A| = k$, $a_n \in A$, и множеств A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$. Это семейство является м. ш. с. с числом элементов $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k+1} > \binom{n-1}{k}$. Если $r_n = \binom{n-1}{k}$, то в силу теоремы 4 также $|F| \geq \binom{n-1}{k}$. Остается рассмотреть случай $0 < r_n < \binom{n-1}{k}$. В этом случае докажем утверждение методом математической индукции. Для $n = 1, 2, 3, 4, 5$ справедливость утверждения проверяется. Предположим, что оно верно для всех $k < n$. Докажем справедливость утверждения для $k = n$. Если $p_n = 0$, то $0 < q_n < \binom{n-1}{k}$. Тогла в F входят все множества A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, число которых $\binom{n-1}{k+1} \geq \binom{n-1}{k}$, откуда $|F| > \binom{n-1}{k}$. Если $q_n = 0$, то $0 < p_n < \binom{n-1}{k}$. Тогда $\binom{n-1}{k} - p_n$ множеств A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, не принадлежат F. Следовательно, поскольку F — м. ш. с, то в F должны войти множества A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, такие, что для каждого A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, не принадлежащего F, должно найтись в F множество A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, такое, что $A \subset A'$. Но совокупность множеств A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, $A \in F$, и множеств A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, $A' \in F$, образуют м. ш. с. типа $(k, k+1)$ множества $S' = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Следовательно, по индуктивному предположению эта часть семейства F содержит не менее $\binom{n-2}{k}$ элементов. Кроме того, в F входят все множества A, $|A| = k$, $a_n \in A$. Таким образом, в этом случае имеем

$$|F| \geq \binom{n-2}{k} + \binom{n-1}{k-1} \geq \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k}.$$

Пусть теперь $p_n > 0$, $q_n > 0$. Тогда $\binom{n-1}{k} - (p_n + q_n)$ множеств A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, и A', $|A'| = k+1$, $a_n \in A$, не принадлежат семейству F. Поэтому в силу максимальности F в F должны войти множества A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, такие, что для каждого A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, не принадлежащего F, в F должно найтись множество A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, такое, что $A \subset A'$, и должны войти множества A, $|A| = k$, $a_n \in A$, такие, что для каждого A', $|A'| = k+1$, $a_n \in A$, не принадлежащего F, в F должно найтись множество A, $|A| = k$, $a_n \in A$, такое, что $A \subset A'$. Но совокупность множеств A, $|A| = k$, $a_n \notin A$, $A \in F$, и множеств A', $|A'| = k+1$, $a_n \notin A'$, $A \in F$, так же, как совокупность множеств A', $|A'| = k+1$, $a_n \in A'$, $A' \in F$, и множеств A, $|A| = k$, $a_n \in A$, $A \in F$, после исключения из них элемента a_n образуют м. ш. с. типа соответственно $(k, k+1)$, $(k-1, k)$ множества $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}\}$. Отсюда $|F| \geq \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k}$, тем самым нижняя оценка доказана. Достижимость полученной нижней оценки доказывается построением соответствующего семейства. Пусть F' — семейство всех подмножеств A, $|A| = k$, таких, что $a_i, a_j \notin A$, и F'' — семейство всех подмножеств A', $|A'| = k+1$, таких, что $a_i, a_j \in A'$. Нетрудно убедиться, что семейство $F = F' \cup F''$ является м. ш. с. типа $(k, k+1)$ с $|F| = |F'| + |F''| = \binom{n-2}{k} + \binom{n-2}{k-1} = \binom{n-1}{k}$. Для этого семейства $r_i = r_j = \binom{n-1}{k}$ и $r_m = \binom{n-3}{k} + \binom{n-3}{k-2}$, $m \neq i, j$.

Верхняя оценка. Из [6] известно, что для всякого шпернерова семейства F справедливо неравенство

$$\sum_{m=\tau}^{\sigma} \frac{|F_m|}{\binom{n}{m}} \leq 1,$$

где F_m — семейство множеств A, $|A| = m$, $A \in F$, а τ и σ — соответственно $\min\limits_{A \in F} |A|$, $\max\limits_{A \in F} |A|$. Отсюда для максимального шпернерова семейства F типа $(k, k+1)$ имеет место

$$\frac{|F_k|}{\binom{n}{k}} + \frac{|F_{k+1}|}{\binom{n}{k+1}} \leq 1.$$

Из последнего неравенства следует $|F| = |F_k| + |F_{k+1}| \leq \binom{n}{k-1}$. Достижимость полученной оценки следует из того, что семейство всех множеств A, $|A| = k+1$, образует м. ш. с. типа $(k, k+1)$.

Необходимое условие максимальности шпернерова семейства типа $(k, k+1)$, сформулированное в [4], требует уточнения, а именно, оно верно только для $n \leq 5$ [5]. Для $n \geq 6$ можно построить м. ш. с. типа $(k, k+1)$, для которых указанное условие $\max\limits_{i} r_i = \binom{n-1}{k}$ не выполняется.

Пусть $n = 2m$, $m \geq 3$. Тогда шпернерово семейство множеств, состоящее из множеств $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $\{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\}$ и всех множеств вида $\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}, \ldots, a_{i_{m-1}}\}$, где $1 \leq k \leq m-2$, $a_{i_j} \in \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $j = \overline{1,k}$; $a_{i_j} \in \{a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots, a_n\}$, $j = \overline{k+1, m-1}$, является м. ш. с. типа $(m-1, m)$. Число множеств A, $|A| = m-1$, $a_i \notin A$, которые не принадлежат построенному семейству, очевидно, равно $m+1$. Число же всех множеств A, $|A| = m-1$, $a_i \notin A$, равно $\binom{n-1}{m-1}$. Отсюда, принимая во внимание, что построенное семейство содержит одно множество A, $|A| = m$, $a_i \in A$, для r_i имеем значение $r_i = \binom{n-1}{m-1} - m$. Поскольку это равенство справедливо для всех i, то $r = \max\limits_{i=\overline{1,n}} r_i = \binom{n-1}{m-1} - m$.

Пусть теперь $n = 2m+1$, $m \geq 3$. Тогда шпернерово семейство множеств, состоящее из множеств $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$, $\{a_{m+2}, a_{m+3}, ..., a_n\}$ и всех множеств вида $\{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}, a_{i_{k+1}}, a_{i_{k+2}}, ..., a_{i_{m-1}}\}$, где $1 \leq k \leq m-2$, $a_{i_j} \in \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, $j = \overline{1,k}$; $a_{i_j} \in \{a_{m+2}, a_{m+3}, \ldots, a_n\}$, $j = \overline{k+1, m-1}$, и $\{a_{m+1}, a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_{m-2}}\}$, $a_{i_j} \in \{a_1, \ldots, a_m, a_{m+2}, \ldots, a_n\}$, $j = \overline{1, m-2}$, является м. ш. с. типа $(m-1, m)$, для которого $r_i = \binom{n-1}{m-1} - m$, если $i \neq m+1$, и

$$r_{m+1} = \sum_{i=1}^{m-1} \binom{m}{i} \binom{m}{m-1-i} = \binom{2m}{m-1} - 2m < \binom{n-1}{m-1} - m.$$

Таким образом, и в этом случае $r = \max\limits_{i=\overline{1,n}} r_i = \binom{n-1}{m-1} - m < \binom{n-1}{m-1}$.

Теорема 6. *Число $g(n,k)$ м. ш. с. типа $(k, k+1)$ n-элементного множества удовлетворяет неравенствам*

$$2^{\binom{n-1}{k}} < g(n,k) < 3^{\binom{n-1}{k}} - \binom{n-1}{k} 2^{\binom{n-1}{k}-1}.$$

Доказательство. Нижняя оценка непосредственно следует из предложения и теоремы 4, если принять во внимание, что число реализаций допустимого значения $s = \binom{n-1}{k}$ равно в точности $2^{\binom{n-1}{k}}$.

Верхняя оценка, представляющая собой разность, получается из следующих соображений. Уменьшаемое есть верхняя оценка числа допустимых реализаций допустимых чисел. Именно, $3^{\binom{n-1}{k}}$ — это число всех реализаций чисел $0 \leq s \leq \binom{n-1}{k}$. Вычитаемое — это число различных реализаций числа $s = \binom{n-1}{k} - 1$, которые согласно следствию из теоремы 1 не являются допустимыми реализациями. $\square$

Литература

1. Erdos P., Kleitman D.J. *Extremal problems among subsets of a set* // Discrete Math. – 1974.– V. 8. – P. 281–294.
2. Sperner E. *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge* // Math. Z. – 1928. – Bd. 27. – S. 544–548.
3. Korshunov A.D. *The number and the structure typical Sperner and k-non-separable families of subsets of a finite set* // Fundamentals of Computations Theory. International Conference FCT'87. – Kazan, 1987. – P. 239–243.
4. Кочкарев Б.С. *Структурные свойства одного класса максимальных шпернеровых семейств подмножеств конечного множества* // Логика и приложения. Тез. международн. конф., посв. 60-летию со дня рождения акад. Ю.Л. Ершова. – Новосибирск, 2000. – С. 61–62.
5. Кочкарев Б.С. *Об одном классе максимальных шпернеровых семейств подмножеств конечного множества* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 11. Проблемы современной математики. Материалы научной конф., посв. 125-летию КГПУ (Казань, 22–24 октября 2001 г.), Казань: Унипресс, 2001. – С. 160–162.
6. Кочкарев Б.С. *Оценка сложности формул для монотонных функций алгебры логики в классе дизъюнктивных нормальных форм (д. н. ф.)* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1965. – Т. 125. – Кн. 6. – С. 49–57.

Казанский государственный педагогический университет

Поступила 11.03.2003