ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 8 (531)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.983

А.Н. КАРАПЕТЯНЦ

ПРОСТРАНСТВО $\mathrm{BMO}^p_\lambda(\mathbb{D})$, КОМПАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ТЕПЛИЦА С $\mathrm{BMO}^1_\lambda(\mathbb{D})$ СИМВОЛАМИ НА ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕРГМАНА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БЕРЕЗИНА

Светлой памяти моего отца
профессора Н.К. Карапетянца

1. Введение

Пусть $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ обозначает весовое пространство Бергмана на единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в $\mathbb{C}$, состоящее из аналитических на $\mathbb{D}$ функций, принадлежащих весовому пространству $L^2_\lambda(\mathbb{D})$, $\lambda > -1$. Здесь $L^2_\lambda(\mathbb{D})$ обозначает пространство измеримых на $\mathbb{D}$ функций f, для которых конечна норма $\|f\|_{L^2_\lambda(\mathbb{D})} = \Big[\int\limits_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 d\mu_\lambda(z)\Big]^{1/2}$, $d\mu_\lambda(z) = (\lambda+1)(1-|z|^2)^\lambda \frac{1}{\pi}\, dx\, dy$, $\lambda > -1$, $z = x+iy$. Пространство $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ является замкнутым подпространством $L^2_\lambda(\mathbb{D})$.

Для измеримой на $\mathbb{D}$ функции φ оператор Теплица с символом φ, не обязательно ограниченный, но определенный на плотном в $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ множестве, имеет вид $T^\lambda_\varphi f(z) = (B^\lambda_{\mathbb{D}}\varphi f)(z)$, где $B^\lambda_{\mathbb{D}}$ — (весовой) проектор Бергмана, проектирующий $L^2_\lambda(\mathbb{D})$ на $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$:

$$B^\lambda_{\mathbb{D}} f(z) = \int_{\mathbb{D}} f(w) K_\lambda(z,w)\, d\mu_\lambda(w) = \int_{\mathbb{D}} \frac{f(w)}{(1-z\overline{w})^{2+\lambda}}\, d\mu_\lambda(w),$$

здесь $K_\lambda(z,w) = (1-z\overline{w})^{-2-\lambda}$ — весовое ядро Бергмана для $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$. Для оператора T^λ_φ преобразование Березина (или символ Березина оператора T^λ_φ) совпадает с преобразованием Березина $\mathcal{B}_\lambda\varphi$ символа этого оператора

$$\mathcal{B}_\lambda T^\lambda_\varphi(z) = \langle T^\lambda_\varphi k^\lambda_z, k^\lambda_z\rangle_\lambda = \langle \varphi k^\lambda_z, k^\lambda_z\rangle_\lambda = \mathcal{B}_\lambda\varphi(z), \quad z \in \mathbb{D},$$

где $\langle f, g\rangle_\lambda = \int\limits_{\mathbb{D}} f(z)\overline{g(z)}\, d\mu_\lambda(z)$ — скалярное произведение в $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$, а функция

$$k^\lambda_z(w) = \frac{\overline{K_\lambda(z,w)}}{\|K_\lambda(z,\cdot)\|_{\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})}} = \frac{(1-|z|^2)^{1+\lambda/2}}{(1-\overline{z}w)^{2+\lambda}}, \quad z, w \in \mathbb{D},$$

является нормированным когерентным состоянием для $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$.

Преобразование Березина является важной составляющей гармонического анализа в силу ковариантности по отношению к аналитическим преобразованиям. Имеются недавние работы, посвященные исследованию связи между убыванием при $z \to \partial D$ преобразования Березина оператора Теплица, действующего на пространстве Бергмана (а также конечных сумм произведений теплицевых операторов) и компактностью самого оператора. В этой связи упомянем работы

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00297-А).

[1]–[6], а также монографии [7]–[9] и имеющиеся там ссылки. Отметим, что в этих работах, за исключением [4], изучается безвесовое пространство Бергмана $\mathcal{A}^2(\mathbb{D}) = \mathcal{A}^2_0(\mathbb{D})$.

Оператор Теплица T^λ_φ на $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ является локально компактным оператором по крайней мере в случае символа φ, непрерывного на $\mathbb{D}$ (здесь используем определения из [10]). Другими словами, компактность оператора T^λ_φ зависит от поведения символа $\varphi(z)$ при $z \to \partial\mathbb{D}$ и фактически эквивалентна (для непрерывных символов) равенству символа нулю на границе круга. С другой стороны, для таких операторов имеет место соотношение [7] $\varphi(z) = \mathcal{B}_\lambda T^\lambda_\varphi(z)$, $z \in \partial\mathbb{D}$ (более того, для гармонических символов $\varphi(z)$ справедливо $\varphi(z) = \mathcal{B}_\lambda T^\lambda_\varphi(z)$, $z \in \mathbb{D}$). Таким образом, связь между компактностью оператора и убыванием преобразования Березина при приближении к границе круга становится очевидной по крайней мере для хороших символов.

В данной работе вводятся весовые пространства $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ и изучаются операторы Теплица T^λ_φ с символами $\varphi \in \mathrm{BMO}^1_\lambda(\mathbb{D})$ ($\supset \mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$), действующие на весовых пространствах Бергмана $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$. Здесь $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ обозначает пространство измеримых на $\mathbb{D}$ функций, для которых полунорма

$$\|\varphi\|_{\#,\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})} = \sup_{z\in\mathbb{D}} \|\varphi(\alpha_z(\cdot)) - \mathcal{B}_\lambda\varphi(z)\|_{L^p_\lambda(\mathbb{D})} \tag{1.1}$$

конечна. Символом $\alpha_z(w)$ обозначено преобразование Мёбиуса $w \to \alpha_z(w)$ единичного круга в себя, переводящее точку $w = 0$ в точку $w = z$.

Основным результатом работы является теорема 3.2, в которой показано, что если $\varphi \in \mathrm{BMO}^1_\lambda(\mathbb{D})$ и $\mathcal{B}_\lambda\varphi(z) \to 0$ при $z \to \partial\mathbb{D}$ ($z \in \mathbb{D}$), то оператор T^λ_φ компактен на $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$. Указанная проблема фактически была впервые сформулирована в работе [1] и решена для общего класса ограниченных символов. Отметим, что символы из $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ являются, вообще говоря, неограниченными.

Несмотря на то, что изучение пространств $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ было необходимо для решения сформулированной выше задачи, их описание представляет самостоятельный интерес. Эти пространства характеризуются в данной работе в терминах преобразования Березина и также в терминах средних по кругам в гиперболической метрике Бергмана. В этой связи упомянем [6], [8], где приведено описание (безвесовых) пространств $\mathrm{BMO}^1(\mathbb{D})$, $\mathrm{BMO}^2(\mathbb{D})$ соответственно (см. также [11]). Заметим, что в [6] безвесовое пространство $\mathrm{BMO}^1(\mathbb{D})$ описывается в меньшем объеме. В [8] по существу применяется техника гильбертовых пространств, не применимая, вообще говоря, в данной ситуации.

2. Пространство $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$

Как было отмечено выше, $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ обозначает пространство измеримых на $\mathbb{D}$ функций, для которых полунорма (1.1) конечна. Нетрудно видеть, что $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D}) \subset L^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$. Норма в пространстве $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ определяется следующим образом: $\|\varphi\|_{\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})} = |\mathcal{B}_\lambda\varphi(0)| + \sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \|\varphi(\alpha_z(\cdot)) - \mathcal{B}_\lambda\varphi(z)\|_{L^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})}$. Легко проверить, что

$$\|\varphi(\alpha_z(\cdot)) - \mathcal{B}_\lambda\varphi(z)\|^{\mathrm{p}}_{L^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})} = \int_{\mathbb{D}} |\varphi(w) - \mathcal{B}_\lambda\varphi(z)|^{\mathrm{p}} |k^\lambda_z(w)|^2 \, d\mu_\lambda(w).$$

Гиперболическая метрика Бергмана $\beta(z,w)$ на единичном круге задается формулой $\beta(z,w) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+|\alpha_z(w)|}{1-|\alpha_z(w)|} = \frac{1}{2}\ln\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}$, $z,w \in \mathbb{D}$.

Теорема 2.1. *Если $\varphi \in \mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$, то функция $\mathcal{B}_\lambda\varphi$ удовлетворяет неравенству Липшица в метрике Бергмана $|\mathcal{B}_\lambda\varphi(z) - \mathcal{B}_\lambda\varphi(w)| \le C\beta(z,w)$.*

Сформулируем также следующее утверждение, характеризующее функции из $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ в терминах преобразования Березина.

Теорема 2.2. *Для измеримой на $\mathbb{D}$ функции φ следующие условия эквивалентны*:

1. *функция $\mathcal{B}_\lambda\varphi$ ограничена и $\varphi \in \mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$,*

2. *функция* $\mathcal{B}_\lambda\varphi$ *ограничена и* $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}}\{[\mathcal{B}_\lambda|\varphi|^{\mathrm{p}}(z)]^{\frac{1}{\mathrm{p}}}-|\mathcal{B}_\lambda\varphi(z)|\}<\infty$,
3. *функция* $\mathcal{B}_\lambda\varphi^{\mathrm{p}}$ *ограничена и* $\varphi\geq 0$,
4. *функция* $\mathcal{B}_\lambda|\varphi|^{\mathrm{p}}$ *ограничена.*

Определение пространства $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ в терминах преобразования Березина вполне естественно с точки зрения теории комплексного переменного. Однако, следуя теории вещественного переменного, можно описать пространство $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ в терминах средних по кругам $D(z,r)=\{w\in\mathbb{D}:\beta(z,w)<r\}\subset\mathbb{D}$ с гиперболическим центром z и радиусом r. Именно, для измеримой на $\mathbb{D}$ функции φ и $0<r<\infty$ положим

$$\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)=\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)}\varphi(w)d\mu_\lambda(w),\quad |D(z,r)|_\lambda=\int_{D(z,r)}d\mu_\lambda(w).$$

Теорема 2.3. *Пространство* $\mathrm{BMO}^{\mathrm{p}}_\lambda(\mathbb{D})$ *состоит из измеримых на* $\mathbb{D}$ *функций* φ, *для которых величина*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}}\left(\frac{1}{|D(z,r)|_\lambda}\int_{D(z,r)}|\varphi(w)-\widehat{\varphi}_{r,\lambda}(z)|^{\mathrm{p}}d\mu_\lambda(w)\right)^{1/\mathrm{p}}$$

конечна. Данное утверждение не зависит от выбора r, $0<r<\infty$.

3. Компактные операторы Теплица

С учетом теоремы 2.2 и результатов работы [4] справедлива

Теорема 3.1. *Если* $\varphi\in\mathrm{BMO}^1_\lambda(\mathbb{D})$ *и функция* $\mathcal{B}_\lambda\varphi$ *ограничена, то оператор* T^λ_φ *ограничен на* $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$.

Теперь сформулируем основной результат данной работы. При доказательстве этого результата комбинируем подходы, предложенные в работах [1], [6], однако сами доказательства отличаются существенно от доказательства соответствующих результатов в упомянутых работах. Кроме того, применяем иной метод, что позволяет даже в безвесовом случае упростить доказательство.

Теорема 3.2. *Если* $\varphi\in\mathrm{BMO}^1_\lambda(\mathbb{D})$ *и* $\mathcal{B}_\lambda\varphi(z)\to 0$ *при* $z\to\partial\mathbb{D}$, *то оператор* T^λ_φ *компактен на* $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$.

Если учесть, что для любого (не обязательно теплицева) оператора компактность влечет стремление к нулю преобразования Березина этого оператора (в силу слабой сходимости k^λ_z при $z\to\partial\mathbb{D}$), то в теореме 3.2 фактически утверждается, что компактность T^λ_φ на $\mathcal{A}^2_\lambda(\mathbb{D})$ эквивалентна тому, что $\mathcal{B}_\lambda\varphi(z)\to 0$ при $z\to\partial\mathbb{D}$.

Заметим наконец, что существуют примеры некомпактных операторов, преобразование Березина которых стремится к нулю при приближении z к границе круга [1].

Литература

1. Axler S., Zheng D. *Compact operators via the Berezin transform* // Indiana Univ. Math. J. – 1998. – V. 47. – № 2. – P. 387–400.
2. Axler S., Zheng D. *The Berezin transform on the Toeplitz algebra* // Stud. Math. – 1998. – V. 127. – № 2. – P. 113–136.
3. Stroethoff K., Zheng D. *Toeplitz and Hankel operators on Bergman spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1992. – V. 329. – № 2. – P. 773–794.
4. Zhu K. *Positive Toeplitz operators on weighted Bergman spaces of bounded symmetric domains* // J. Oper. Theory. – 1988. – V. 20. – № 2. – P. 329–357.
5. Zorboska N. *The Berezin transform and radial operators* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – V. 131. – № 3. – P. 793–800.

6. Zorboska N. *Toeplitz operators with* BMO *symbols and the Berezin transform* // IJMMS. – 2003. – V. 46. – P. 2929–2945.
7. Zhu K. *Operator theory in function spaces.* – Monographs and textbooks in pure and applied mathematics. – New York: Marcel Dekker, 1990. – 254 p.
8. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman spaces.* – New York: Springer-Verlag, 2000. – 286 p.
9. Zhu K. *Spaces of holomorphic functions in the unit ball.* – Graduate texts in Math., Springer, 2004. – 268 p.
10. Симоненко И.Б. *Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений* // ДАН СССР. – 1964. – Т. 158. – № 4. – С. 790–793.
11. Li H., Lueking D.H. BMO *on strongly pseudoconvex domains*: *Hankel operators, duality and* $\overline{\partial}$*-estimates* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 346. – № 2. – P. 661–691.

Ростовский государственный университет

Поступила
30.03.2006