ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 2 (441)

УДК 517.929

М.Ж. АЛВЕШ

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Основные определения

Рассмотрим краевую задачу для квазилинейного сингулярного функционально-дифференциального уравнения

$$\pi(t)\ddot{x}(t) = f(t, (\theta x)(t)), \quad x(0) = \alpha_1, \quad x(1) = \alpha_2, \quad t \in [0, 1], \tag{1}$$

где $\pi(t) = t$ или $\pi(t) = 1 - t$, или $\pi(t) = t(1 - t)$, $\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{L}_p$, $1 \le p \le \infty$, — линейный изотонный оператор (т. е. если $x(t) \ge y(t)$, то $(\theta x)(t) \ge (\theta y)(t)$ почти всюду на $[0, 1]$). Здесь и далее $\mathbf{C}$ — пространство непрерывных на $[0, 1]$ функций с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{C}} = \max_{t\in[0,1]} |x(t)|,$$

$\mathbf{L}_p$ при $1 \le p < \infty$ — пространство суммируемых в p-й степени на $[0, 1]$ функций с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{L}_p} = \left(\int_0^1 |x(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

$\mathbf{L}_\infty$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на $[0, 1]$ функций с нормой

$$\|x\|_{\mathbf{L}_\infty} = \operatorname*{vrai\,sup}_{t\in[0,1]} |x(t)|.$$

Используя схему “$\mathcal{L}^1\mathcal{L}^2$-квазилинеаризации” Н.В. Азбелева ([1], с. 217), можно привести задачу (1) к эквивалентному уравнению второго рода с изотонным оператором и применить к нему принцип Шаудера неподвижной точки.

Далее частично воспроизведем вводную часть предыдущей статьи [2].

Обозначим через J_π промежуток $(0, 1)$, если $\pi(t) = t(1 - t)$, промежуток $(0, 1]$, если $\pi(t) = t$ и промежуток $[0, 1)$, если $\pi(t) = 1 - t$.

Следуя [3], через $\mathbf{D}_\pi^p$ $(1 \le p \le \infty)$ обозначим пространство функций $x : [0, 1] \to \mathbf{R}^1$, обладающих свойствами

а) x непрерывна на $[0, 1]$,
б) $\dot{x}$ непрерывна в J_π,
в) произведение $\pi\ddot{x}$ принадлежит пространству $\mathbf{L}_p$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Capacity Building Project (Credit 2436, Eduardo Mondlane University, Mozambique).

Зафиксируем точку $\tau \in J_\pi$ и определим функцию

$$\Lambda_\tau(t,s) = \begin{cases} \dfrac{t-s}{\pi(s)}, & \text{если} \quad \tau \le s < t \le 1; \\ \dfrac{s-t}{\pi(s)}, & \text{если} \quad 0 \le t < s \le \tau; \\ 0 & \text{в остальных точках квадрата } [0,1]\times[0,1]. \end{cases}$$

Равенство $x = \Lambda_\tau z + Y_\tau \beta$ для каждого $\{z,\beta\} \in \mathbf{L}_p \times \mathbf{R}^2$ определяет элемент пространства $\mathbf{D}_\pi^p$ функций $x : [0,1] \to \mathbf{R}^1$, где

$$(\Lambda_\tau z)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \Lambda_\tau(t,s)z(s)ds, \quad (Y_\tau\beta)(t) \stackrel{\text{def}}{=} Y_\tau(t)\beta \stackrel{\text{def}}{=} \beta^1 + \beta^2(t-\tau), \quad Y_\tau(t) \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{col}\{1, t-\tau\}.$$

Так как каждому элементу $x \in \mathbf{D}_\pi^p$ соответствует пара $z = \pi\ddot{x} \in \mathbf{L}_p$, $\beta = \{x(\tau), \dot{x}(\tau)\} \in \mathbf{R}^2$, то пространство $\mathbf{D}_\pi^p$ изоморфно произведению $\mathbf{L}_p \times \mathbf{R}^2$. Следуя [4], изоморфизмы $J_\tau : \mathbf{L}_p \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{D}_\pi^p$ и $J_\tau^{-1} : \mathbf{D}_\pi^p \to \mathbf{L}_p \times \mathbf{R}^2$ определим соответственно равенствами $J_\tau = \{\Lambda_\tau, Y_\tau\}$, $J_\tau^{-1} = [\delta, r_\tau]$, где $\delta x = \pi\ddot{x}$, $r_\tau x = \{x(\tau), \dot{x}(\tau)\}$.

Если норму в пространстве $\mathbf{D}_\pi^p$ определить равенством

$$\|x\|_{\mathbf{D}_\pi^p} = \|\pi\ddot{x}\|_{\mathbf{L}_p} + |x(\tau)| + |\dot{x}(\tau)|,$$

то $\mathbf{D}_\pi^p$ будет банаховым пространством.

Пусть $v, z \in \mathbf{D}_\pi^p$, где $v(t) \le z(t)$ при всех $t \in [0,1]$. Обозначим через

$$[v,z]_{\mathbf{D}_\pi^p} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{D}_\pi^p \,:\, v(t) \le x(t) \le z(t),\ t \in [0,1]\}$$

порядковый интервал в пространстве $\mathbf{D}_\pi^p$. Пусть $\overline{v} \equiv \theta v$, $\overline{z} \equiv \theta z$, $[\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p}$ — порядковый интервал в пространстве $\mathbf{L}_p$. Следуя ([1], с. 218), будем говорить, что функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет одному из условий $\mathcal{L}^i[\overline{v},\overline{z}]$, если возможно разложение

$$f(t,u(t)) = q_i(t)u(t) + M_i(t,u(t)), \quad u \in [\overline{v},\overline{z}],$$

где $q_i(\cdot) \in \mathbf{L}_\infty$, $i = 1,2$, оператор Немыцкого $\mathcal{M}_i : [\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p} \to \mathbf{L}_p$, определенный равенством $(\mathcal{M}_i u)(t) \equiv M_i(t,u(t))$, непрерывен, причем оператор $\mathcal{M}_i$ при $i = 1$ изотонен, а при $i = 2$ антитонен.

Рассмотрим уравнение

$$(\Im x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q(t)(\theta x)(t) = f(t), \quad t \in [0,1],$$

при $q \in \mathbf{L}_\infty$. Следуя [3], будем говорить, что это уравнение обладает свойством $\mathbf{A}$, если краевая задача $\Im x = f$, $x(\tau) = \dot{x}(\tau) = 0$ имеет при каждом $\tau \in J_\pi$ единственное решение для любой функции $f \in \mathbf{L}_p$, и оператор Грина G этой задачи изотонен.

2. Вспомогательные утверждения

Рассмотрим интегральный оператор $\mathcal{H}$ вида $(\mathcal{H}x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_0^1 H(t,s)x(s)ds$ с ядром

$$H(t,s) = \begin{cases} \dfrac{s(t-1)}{\pi(s)}, & \text{если } 0 < s \le t < 1; \\ \dfrac{t(s-1)}{\pi(s)}, & \text{если } 0 < t \le s < 1; \\ 0 & \text{если } t = 0 \text{ или } t = 1. \end{cases}$$

Лемма 1. *$\mathcal{H} : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$ и непрерывен при каждом $1 \le p \le \infty$.*

Доказательство. Ограничимся случаем $\pi(s) = s(1-s)$. Другие случаи доказываются аналогично. Докажем сначала действие и непрерывность оператора $\mathcal{H} : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$ при $p = 1$. Проверим, что выполнены условия

а) $\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,1]} |H(t,s)| \le 1$ для любого $t \in [0,1]$;

б) для любого измеримого подмножества $\Omega \subset [0,1]$ и любого $t_0 \in [0,1]$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to t_0} \int_\Omega H(t,s)ds = \int_\Omega H(t_0,s)ds. \tag{2}$$

Действительно,

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{s\in[0,1]} |H(t,s)| \le \max\Big\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{0\le s\le t} |H(t,s)|,\ \operatorname*{vrai\,sup}_{t\le s\le 1} |H(t,s)| \Big\} \le \max\{1,1\} = 1.$$

Докажем, что условие б) выполнено. Функция $H(\cdot,\cdot)$ непрерывна во всех точках квадрата $[0,1]\times[0,1]$, за исключением точек $(0,0)$ и $(1,1)$. Поэтому равенство (2) достаточно проверить лишь в точках $t_0 = 0$ и $t_0 = 1$.

Пусть $t_0 = 0$ и $\Omega = [0,\varepsilon]$, где $\varepsilon > 0$. В таком случае $\int\limits_0^\varepsilon H(0,s)ds = 0$, и при $0 < t < \varepsilon$ получаем

$$\int_0^\varepsilon H(t,s)ds = \int_0^t \frac{t-1}{1-s}ds - \int_t^\varepsilon \frac{t}{s}ds \to 0, \quad t \to 0^+.$$

Аналогично, пусть $t_0 = 1$ и $\Omega = [1-\varepsilon, 1]$, где $\varepsilon > 0$. В таком случае $\int\limits_{1-\varepsilon}^1 H(1,s)ds = 0$, и при $1-\varepsilon < t < 1$ получаем

$$\int_{1-\varepsilon}^1 H(t,s)ds = \int_{1-\varepsilon}^t \frac{t-1}{1-s}ds - \int_t^1 \frac{t}{s}ds \to 0, \quad t \to 1^-.$$

По теореме 1.1 ([5], с. 100) оператор $\mathcal{H}$ действует из $\mathbf{L}_1$ в $\mathbf{C}$, и по теореме 1.2 ([5], с. 100) он непрерывен. Поэтому в силу непрерывности вложения $\mathbf{L}_p \subset \mathbf{L}_1$ оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$ непрерывен при всех $p \ge 1$. $\square$

Лемма 2. *Интегральный оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$ вполне непрерывен при всех $1 < p \le \infty$.*

Доказательство. При $1 < p \le \infty$ для проверки компактности оператора $\mathcal{H}$ достаточно ([5], с. 101) показать, что для любого $t_0 \in [0,1]$ справедливо равенство

$$\lim_{t\to t_0} \int_0^1 |H(t,s) - H(t_0,s)|^{p'} ds = 0,$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ при $1 < p < \infty$ и $p' = 1$ при $p = \infty$. При $p' > 1$, $0 < t_0 < t \le 1$ имеем

$$\int_0^1 |H(t,s) - H(t_0,s)|^{p'} ds =$$
$$= \int_0^{t_0} |H(t,s) - H(t_0,s)|^{p'} ds + \int_{t_0}^t |H(t,s) - H(t_0,s)|^{p'} ds + \int_t^1 |H(t,s) - H(t_0,s)|^{p'} ds =$$
$$= \int_0^{t_0} \left|\frac{t-1}{1-s} - \frac{t_0-1}{1-s}\right|^{p'} ds + \int_{t_0}^t \left|\frac{t-1}{1-s} + \frac{t_0}{s}\right|^{p'} ds + \int_t^1 \left|-\frac{t}{s} + \frac{t_0}{s}\right|^{p'} ds =$$
$$= (t-t_0)^{p'} \left(\int_0^{t_0} (1-s)^{-p'} ds + \int_t^1 s^{-p'} ds \right) + \int_{t_0}^t \left|\frac{t-1}{1-s} + \frac{t_0}{s}\right|^{p'} ds \le$$
$$\le \frac{(t-t_0)^{p'}}{1-p'} [2 - (1-t_0)^{1-p'} - t^{1-p'}] + O(t-t_0) \longrightarrow 0, \quad t \to t_0.$$

Аналогично доказывается соответствующее утверждение при $0 = t_0 < t \le 1$ и $0 \le t < t_0 \le 1$, а также при $p' = 1$. Итак, для каждого $1 \le p' < \infty$ при всех $t_0 \in [0,1]$ справедливо равенство

$$\lim_{t \to t_0} \int_0^1 |H(t,s) - H(t_0,s)|^{p'} ds = 0,$$

следовательно, по теореме 1.4 ([5], с. 101) оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$ вполне непрерывен при любом $1 < p \le \infty$. $\square$

Замечание 1. Интегральный оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{C}$ не является вполне непрерывным.

В самом деле, достаточно показать, что $\lim_{t \to t_0} \operatorname{vrai\,sup}\limits_{s \in [0,1]} |H(t,s) - H(t_0,s)| \neq 0$ для некоторого $t_0 \in [0,1]$. Возьмем $t_0 = 0$. Тогда при каждом $t \in (0,1]$

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{s \in [0,1]} |H(t,s) - H(0,s)| = \max\left\{ \operatorname*{vrai\,sup}_{0 \le s \le t < 1} \left| \frac{t-1}{1-s} \right|, \operatorname*{vrai\,sup}_{0 < t \le s \le 1} \left| -\frac{t}{s} \right| \right\} = 1.$$

Отсюда в силу теоремы 1.4 ([5], с. 101) следует, что оператор $\mathcal{H} : \mathbf{L}_1 \to \mathbf{C}$ не является компактным.

Замечание 2. Интегральный оператор $\mathcal{H}$ является оператором Грина для задачи

$$\pi(t)\ddot{x}(t) = z(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad t \in [0,1].$$

Лемма 3. *Пусть при некотором $1 \le p \le \infty$ краевая задача*

$$\pi(t)\ddot{x}(t) - q(t)(\theta x)(t) = \varphi(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0$$

однозначно разрешима при любом $\varphi \in \mathbf{L}_p$. Тогда, если $1 < p \le \infty$, то оператор Грина $G : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$ этой задачи вполне непрерывен. Если же $p = 1$, то этот оператор непрерывен, но не является вполне непрерывным.

Доказательство. Как известно ([4], с. 19), оператор Грина G имеет представление $G = \mathcal{H}\Gamma$, где $\Gamma : \mathbf{L}_p \to \mathbf{L}_p$ — некоторый линейный гомеоморфизм. Поэтому в силу леммы 2 оператор $G = \mathcal{H}\Gamma$ будет вполне непрерывен. При $p = 1$ оператор G непрерывен как произведение непрерывных операторов. В силу замечания 1 этот оператор не является вполне непрерывным. $\square$

Лемма 4. *Пусть существует пара функций $v, z \in \mathbf{D}^p_\pi$, $v(t) < z(t)$, $t \in (0,1)$, удовлетворяющая неравенствам*

$$\pi(t)\ddot{z}(t) \le f(t,(\theta z)(t)), \quad \pi(t)\ddot{v}(t) \ge f(t,(\theta v)(t)), \quad t \in [0,1].$$

Предположим, что $f(t,u)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}^2[v,z]$ с коэффициентом $q_2 \in \mathbf{L}_\infty$, $q_2 = q_2^+ - q_2^-$, $q_2^+ \ge 0$, $q_2^- \ge 0$, и пусть уравнение

$$(\Im_2^+ x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q_2^+(t)(\theta x)(t) = \xi(t), \quad t \in [0,1],$$

обладает свойством $\mathbf{A}$. Тогда линейная краевая задача

$$(\Im_2 x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q_2(t)(\theta x)(t) = \Phi(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0$$

имеет единственное решение при каждом $\Phi \in \mathbf{L}_p$, причем ее оператор Грина G_2 антитонен.

Доказательство. Пусть $\eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} z(t) - v(t) > 0$, $t \in (0,1)$. Тогда $(\Im_2\eta)(t) \le \mathcal{M}_2\theta z - \mathcal{M}_2\theta v \le 0$. Следовательно, по теореме 3 [3], задача $\Im_2 x = \Phi$, $x(0) = x(1) = 0$ имеет единственное решение, причем ее оператор Грина антитонен. $\square$

3. Основное утверждение

Теорема 1. *Пусть существует пара функций $v, z \in \mathbf{D}^p_\pi$, $v(t) < z(t)$, $t \in (0,1)$, удовлетворяющая неравенствам*

$$\begin{gathered}\pi(t)\ddot{z}(t) \le f(t,(\theta z)(t)), \quad \pi(t)\ddot{v}(t) \ge f(t,(\theta v)(t)), \quad t \in [0,1], \\ v(0) \le \alpha_1 \le z(0), \quad v(1) \le \alpha_2 \le z(1).\end{gathered} \tag{3}$$

Предположим, что выполняется условие $\mathcal{L}^2[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_2 \in \mathbf{L}_\infty$, $q_2 = q_2^+ - q_2^-$, $q_2^+ \ge 0$, $q_2^- \ge 0$, и линейное уравнение

$$(\Im_2^+ x)(t) \overset{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q_2^+(t)(\theta x)(t) = \xi(t), \quad t \in [0,1], \tag{4}$$

обладает свойством **A**. *Тогда задача* (1) *имеет по крайней мере одно решение $x \in [v,z]_{\mathbf{D}^p_\pi}$.*

Если, кроме того, выполнено условие $\mathcal{L}^1[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_1 \in \mathbf{L}_\infty$, причем оператор Грина G_1 вспомогательной задачи

$$(\Im_1 x)(t) \overset{\text{def}}{=} \pi(t)\ddot{x}(t) - q_1(t)(\theta x)(t) = \phi(t), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0 \tag{5}$$

антитонен, то решение задачи (1) *единственно.*

Доказательство. Запишем задачу (1) в форме

$$(\Im_2 x)(t) = M_2(t,(\theta x)(t)), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = \alpha_1, \quad x(1) = \alpha_2. \tag{6}$$

Покажем, что задача (6) эквивалентна уравнению второго рода

$$x = A_2 x \tag{7}$$

с вполне непрерывным (при $1 < p \le \infty$) изотонным оператором $A_2 : [v,z]_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$, определяемым равенством

$$(A_2 x)(t) \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 G_2(t,s) M_2(s,(\theta x)(s))ds + u_2(t),$$

где u_2 — решение полуоднородной задачи

$$(\Im_2 x)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = \alpha_1, \quad x(1) = \alpha_2,$$

$G_2(\cdot,\cdot)$ — функция Грина вспомогательной задачи

$$\Im_2 x = \xi, \;\; x(0) = x(1) = 0. \tag{8}$$

Каждое непрерывное решение уравнения (7) принадлежит пространству $\mathbf{D}^p_\pi$, т.к. оператор A_2 определен на порядковом интервале $[v,z]_{\mathbf{C}}$ пространства $\mathbf{C}$ и переводит этот интервал в пространство $\mathbf{D}^p_\pi$. Действительно, изотонный оператор $\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{L}_p$ переводит порядковый интервал $[v,z]_{\mathbf{C}}$ в порядковый интервал $[\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p}$. В силу $\mathcal{L}^2[\overline{v},\overline{z}]$-условия оператор $\mathcal{M}_2 : [\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p} \to \mathbf{L}_p$ антитонен, поэтому он переводит порядковый интервал $[\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p}$ в порядковый интервал $[\mathcal{M}_2\overline{z},\mathcal{M}_2\overline{v}]_{\mathbf{L}_p}$. По условию теоремы и по лемме 4 имеем, что оператор Грина $G_2 : \mathbf{L}_p \to \mathbf{D}^p_\pi \subset \mathbf{C}$ вспомогательной задачи (8) антитонен. Поэтому порядковый интервал $[\mathcal{M}_2\overline{z},\mathcal{M}_2\overline{v}]_{\mathbf{L}_p}$ переводится оператором G_2 в порядковый интервал $[G_2\mathcal{M}_2\overline{v}, G_2\mathcal{M}_2\overline{z}]_{\mathbf{D}^p_\pi} \subset [G_2\mathcal{M}_2\overline{v}, G_2\mathcal{M}_2\overline{z}]_{\mathbf{C}}$.

Итак, мы имеем возможность рассматривать уравнение (7) в порядковом интервале $[v,z]_{\mathbf{C}}$ пространства $\mathbf{C}$. Более того, любое решение $x \in [v,z]_{\mathbf{C}}$ уравнения (7) удовлетворяет краевой задаче (6), т.к. задача (6) получается из уравнения (7) применением оператора $\Im_2$ и вычислением $x(0)$ и $x(1)$. И наоборот, любое решение $x \in [v,z]_{\mathbf{D}^p_\pi}$ задачи (6) удовлетворяет уравнению (7), т.к. уравнение (7) получается из задачи (6) применением к этому уравнению формулы Грина представления решения задачи (8).

Кроме того, в силу неравенств (3) получаем, что $z(t) \ge (A_2 z)(t)$ и $v(t) \le (A_2 v)(t)$ при всех $t \in [0,1]$. В силу изотонности оператора $A_2 : [v,z]_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$ это гарантирует инвариантность порядкового интервала $[v,z]_{\mathbf{C}}$ относительно оператора A_2, т.е. $A_2[v,z]_{\mathbf{C}} \subset [v,z]_{\mathbf{C}}$. При $1 < p \le \infty$

оператор $A_2 : [v,z]_{\mathbf{C}} \to [v,z]_{\mathbf{C}}$ вполне непрерывен как произведение непрерывного оператора $\theta : [v,z]_{\mathbf{C}} \to [\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p}$, непрерывного оператора $\mathcal{M}_2 : [\overline{v},\overline{z}]_{\mathbf{L}_p} \to [\mathcal{M}_2\overline{z},\mathcal{M}_2\overline{v}]_{\mathbf{L}_p}$ и вполне непрерывного оператора $G_2 : \mathbf{L}_p \to \mathbf{C}$.

Итак, оператор A_2 отображает замкнутое выпуклое множество $[v,z]_{\mathbf{C}}$ банахова пространства $\mathbf{C}$ в себя и является вполне непрерывным. Согласно принципу Шаудера неподвижной точки уравнение (7) имеет хотя бы одно решение $x \in [v,z]_{\mathbf{C}}$.

Покажем, что множество всех решений $x \in [v,z]_{\mathbf{C}}$ имеет максимальный элемент $x_2 \in [v,z]_{\mathbf{C}}$ (верхнее решение) и минимальный элемент $x_1 \in [v,z]_{\mathbf{C}}$ (нижнее решение).

Пусть $x \in [v,z]_{\mathbf{C}}$ — какое-нибудь решение уравнения (7). Последовательность $\{x^i\}$, $x^{i+1} = A_2x^i$, $x^0 = z$ монотонно убывает и ограничена снизу элементом $x \in [v,z]_{\mathbf{C}}$, т. к. оператор A_2 отображает множество $[v,z]_{\mathbf{C}}$ в себя. Из компактности монотонной последовательности $\{x^i\}$ следует ([6], с. 38) существование предела $x_2 = \lim\limits_{i\to\infty} x^i$. Так как этот предел является решением, то неравенство $x_2 \geq x$ для любого решения $x \in [v,z]_{\mathbf{C}}$ доказано. Существование нижнего решения x_1 доказывается аналогично.

Теперь покажем, что при выполнении условия $\mathcal{L}^1[\overline{v},\overline{z}]$ решение задачи (1) единственно, т. е. $x_1 = x_2$. Воспользуемся условием $\mathcal{L}^1[\overline{v},\overline{z}]$ и запишем задачу (1) в форме

$$(\Im_1 x)(t) = M_1(t,(\theta x)(t)), \quad t \in [0,1], \quad x(0) = \alpha_1, \quad x(1) = \alpha_2. \tag{9}$$

Задача (9) эквивалентна уравнению второго рода $x = A_1x$ в порядковом интервале $[v,z]_{\mathbf{C}}$ пространства $\mathbf{C}$ с вполне непрерывным антитонным оператором $A_1 : [v,z]_{\mathbf{C}} \to \mathbf{C}$, определяемым равенством

$$(A_1x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 G_1(t,s)M_1(s,(\theta x)(s))ds + u_1(t),$$

где $G_1(t,s)$ — функция Грина задачи (5), а u_1 — решение полуоднородной задачи

$$(\Im_1 x)(t) = 0, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = \alpha_1, \quad x(1) = \alpha_2.$$

Рассмотрим равенство $x_2 - x_1 = A_1x_2 - A_1x_1$. Здесь левая часть неотрицательна, а правая часть из-за антитонности A_1 неположительна, значит, $x_1 = x_2$. $\square$

Следствие. Пусть в задаче (1) $f(t,0) = 0$ при всех $t \in [0,1]$, функция $f(t,\cdot)$ возрастает и непрерывно дифференцируема на $\mathbf{R}^1$, причем уравнение (8) обладает свойством $\mathbf{A}$ с коэффициентом $q_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} \max\limits_{u\in[\overline{v}(t),\overline{z}(t)]} \frac{\partial f(t,u)}{\partial u} > 0$, $t \in [0,1]$. Тогда задача (1) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть

$$v(t) \equiv m \leq \min\{\alpha_1,\alpha_2,0\}, \quad z(t) \equiv M \geq \max\{\alpha_1,\alpha_2,0\}.$$

Имеем

$$(\Im v)(t) - f(t,(\theta v)(t)) = -f(t,(\theta m)(t)) \geq 0,$$
$$(\Im z)(t) - f(t,(\theta z)(t)) = -f(t,(\theta M)(t)) \leq 0,$$

и функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}^2[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом q_2. С другой стороны, функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}^1[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_1 \equiv 0$. Тогда по предыдущей теореме задача (1) имеет единственное решение $x(t)$, удовлетворяющее неравенствам $m \leq x(t) \leq M$, $t \in [0,1]$. $\square$

Замечание 3. В условиях теоремы при $p = 1$ мы можем доказать только существование решения.

Пример 1. Рассмотрим задачу

$$(\Im x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} t\ddot{x}(t) = 0.3\sqrt{x_h(t)}, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 1, \quad x(1) = 3, \tag{10}$$

где

$$x_h(t) = \begin{cases} x(h(t)), & \text{если } h(t) \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,1], \end{cases}$$

$h : [0,1] \to \mathbf{R}^1$ — измеримая функция, $h(t) \le t$, $t \in [0,1]$. В качестве функций сравнения берем $v(t) = -t^3/6 + t^2 + t + 1$, $z(t) \equiv 3$. Тогда

$$\overline{v}(t) = \sigma_h(t)(-h^3(t)/6 + h^2(t) + h(t) + 1), \quad \overline{z}(t) = 3\sigma_h(t),$$

где

$$\sigma_h(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } h(t) \in [0,1]; \\ 0, & \text{если } h(t) \notin [0,1]. \end{cases}$$

Непосредственно проверяются неравенства

$$v(t) < z(t), \quad (\Im v)(t) \ge f(t, v_h(t)), \quad (\Im z)(t) \le f(t, z_h(t)), \quad t \in [0,1],$$

где $f(t, x_h(t)) = 0.3\sqrt{x_h(t)}$. Функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}^2[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_2 \equiv 0.15$, и по признаку 6 [3] уравнение (4) с таким коэффициентом обладает свойством **A**. Кроме того, функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}^1[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_1 \equiv 0$. Тогда задача (10) имеет единственное решение x такое, что

$$-t^3/6 + t^2 + t + 1 \le x(t) \le 3, \quad t \in [0,1].$$

Пример 2. Рассмотрим задачу

$$(\Im x)(t) \stackrel{\text{def}}{=} t\ddot{x}(t) = \frac{1}{1 + x_h^2(t)}, \quad t \in [0,1], \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1, \tag{11}$$

где функции $h(\cdot)$ и $x_h(\cdot)$ определены в примере 1. В качестве функций сравнения берем

$$v(t) = \begin{cases} t\ln t, & \text{если } t \in (0,1]; \\ 0, & \text{если } t = 0, \end{cases} \qquad z(t) = 1.$$

Тогда

$$\overline{v}(t) = \begin{cases} h(t)\ln h(t), & \text{если } h(t) \in (0,1]; \\ 0, & \text{если } h(t) \le 0, \end{cases} \qquad \overline{z}(t) = \sigma_h(t).$$

Непосредственно проверяются неравенства

$$v(t) < z(t), \quad (\Im v)(t) \ge f(t, v_h(t)), \quad (\Im z)(t) \le f(t, z_h(t)), \quad t \in [0,1],$$

где $f(t, x_h(t)) = \dfrac{1}{1 + x_h^2(t)}$. Функция $f(\cdot,\cdot)$ удовлетворяет условию $\mathcal{L}^2[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_2 \equiv 0$ и удовлетворяет условию $\mathcal{L}^1[\overline{v},\overline{z}]$ с коэффициентом $q_1(\cdot) = -\dfrac{2}{(1 + \overline{v}^2(\cdot))^2}$.

Тогда задача (11) имеет по крайней мере одно решение x такое, что

$$v(t) \le x(t) \le z(t), \quad t \in [0,1].$$

Литература

1. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.
2. Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И. *О сингулярных краевых задачах для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 2. – С. 3–11.
3. Азбелев Н.В., Алвеш М.Ж., Бравый Е.И. *Условия монотонности операторов Грина сингулярных краевых задач* // Вестн. Пермск. государств. техн. ун-та. Сер. функц.-дифференц. уравнения. – Пермь, 1997. – № 4. – С. 15–22.
4. Azbelev N.V., Rakhmatullina L.F. *Theory of linear abstract functional differential equations and applications* // Mem. on different. equat. and mathem. physics. – Tbilisi, 1996. – V. 8. – P. 1–102.
5. Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. *Интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 448 с.
6. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Пермский государственный университет

Поступила 03.03.1998