ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 7 (482)

УДК 512.571

Н.А. КОРЕШКОВ

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИНВАРИАНТЫ В МОДУЛЯРНЫХ АЛГЕБРАХ ЛИ

В алгебрах Ли над полем нулевой характеристики имеет место следующий результат: кольцо инвариантов S^L симметрической алгебры $S(L)$ алгебры Ли L изоморфно как L-модуль центру $Z(U)$ универсальной обертывающей алгебры $U(L)$. В данной работе доказывается некоторый аналог этого утверждения для модулярных алгебр Ли, определенных над простым полем F_p. А именно, для некоторого расширения $\widehat{L}$ алгебры Ли L показано, что существует изоморфизм $L_{\mathbb{Z}}$-модулей ω кольца частичных инвариантов $\widehat{S}^L$ симметрической алгебры $S(\widehat{L})$ и некоторого подкольца $\widehat{Z}$ в центре $Z(\widehat{U})$ универсальной обертывающей алгебры $\widehat{U} = U(\widehat{L})$. (Здесь $L_{\mathbb{Z}}$ — $\mathbb{Z}$-форма алгебры Ли L.) Кроме того, используя то, что кольцо инвариантов S^L алгебры L получается редукцией в характеристику p кольца частичных инвариантов $\widehat{S}^L$ и изоморфизм $\omega^{-1} : \widehat{Z} \to \widehat{S}^L$, имеем равенство $S^L = F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \omega^{-1}(\widehat{Z})$.

Пусть L — алгебра Ли, определенная над простым полем F_p, с базисом $f_1, \dots, f_m$, т. е. $f_i \circ f_j = \sum\limits_{k=1}^{m} d_{ijk} f_k$, $d_{ijk} \in F_p$, $i, j = 1, \dots, m$. Рассмотрим свободный $\mathbb{Z}$-модуль $L_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}e_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}e_m$, который превратим в антикоммутативную алгебру, полагая $e_i \circ e_j = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ijk} e_k$, где $a_{ijk} \in \mathbb{Z}$ и $1_{F_p} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} a_{ijk} = d_{ijk}$, $1 \le i < j \le m$. Если $i > j$, то положим $e_i \circ e_j = -e_j \circ e_i$, а $e_i \circ e_i = 0$ для $i = j$. Тогда $F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_{\mathbb{Z}}$, рассматриваемая как алгебра над F_p, изоморфна L.

Обозначим через $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$ факторалгебру $\mathbb{Z}[X]/pX\mathbb{Z}[X]$, а через $\widehat{L}$ — тензорное произведение $\mathbb{Z}$-модулей $\widehat{\mathbb{Z}}[X] \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_{\mathbb{Z}}$. Тогда $\widehat{L}$ является свободным $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-модулем с базисом $\widehat{e}_i = 1_{\widehat{\mathbb{Z}}[X]} \otimes e_i$, $i = 1, \dots, m$. Превратим его в алгебру над $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$, полагая $\widehat{e}_i \circ \widehat{e}_j = \widehat{X} \widehat{e_i \circ e_j}$, где $\widehat{e_i \circ e_j} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ijk} \widehat{e}_k$, если $e_i \circ e_j = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ijk} e_k$, $i, j = 1, \dots, m$. В дальнейшем через $\widehat{a}$ будем обозначать $1_{\widehat{\mathbb{Z}}[X]} \otimes a$ для любого $a \in L_{\mathbb{Z}}$.

Обозначим через $J(a, b, c) = (ab)c + (bc)a + (ca)b$ якобиан трех элементов в любой алгебре. Тогда в силу условий, определяющих умножение в алгебре $L_{\mathbb{Z}}$, $J(e_i, e_j, e_k) \equiv 0 (\operatorname{mod} pL_{\mathbb{Z}})$. Отсюда следует, что $J(\widehat{e}_i, \widehat{e}_j, \widehat{e}_k) = 0$ в $\widehat{L}$, поскольку, с одной стороны, любое произведение $(\widehat{e}_r \circ \widehat{e}_s) \circ \widehat{e}_t$ принадлежит $\widehat{X}^2 \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_{\mathbb{Z}}$, а с другой $p\widehat{X} = 0$ в $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$. Поэтому $\widehat{L}$ — алгебра Ли, являющаяся свободным $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-модулем ранга m. Будем называть ее $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-формой алгебры L.

Заметим, что алгебра L, изоморфная, как отмечено выше, алгебре $F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_{\mathbb{Z}}$ и, рассматриваемая как кольцо Ли, является гомоморфным образом кольца Ли $\widehat{L}$ относительно композиции $\mu\nu$ двух морфизмов вида

$$\nu : \widehat{L} \to F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{L}, \quad \nu(\widehat{g}) = 1_{F_p} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{g}, \quad \widehat{g} \in \widehat{L};$$

$$\mu : F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{L} = F_p[X] \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_{\mathbb{Z}} \to F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_{\mathbb{Z}} = L, \ \ \mu(f(x) \otimes g) = f(1) \otimes g, \ \ f(x) \in F_p[X], \ \ g \in L_{\mathbb{Z}}.$$

Используем некоторые обозначения, связанные с симметрической и универсальной обертывающими алгебрами. Пусть H — алгебра Ли, являющаяся свободным K-модулем, где K — коммутативное кольцо с единицей. Тензорную алгебру K-модуля H обозначим через $T(H)$, где $T(H) = \bigoplus_{i\geq 0} T_i(H)$, $T_i(H) = \overbrace{H \underset{K}{\otimes} \cdots \underset{K}{\otimes} H}^{i}$, при $i = 0$, $T_0(H) = K$. Тогда симметрическую алгебру $S(H)$ K-модуля H реализуем как факторалгебру $T(H)/I_S$, где I_S — идеал тензорной алгебры $T(H)$, порожденный элементами $h \otimes h' - h' \otimes h$, $h, h' \in H$, а универсальную обертывающую $U(H)$ — как факторалгебру $T(H)/I_U$, где I_U — идеал $T(H)$, порожденный элементами $h \otimes h' - h' \otimes h - h \circ h'$.

Если $B = \{h_i,\ i \in I\}$ — базис K-модуля H, то $S(H) = \bigoplus_{n\geq 0} S_n$, и базис K-модуля S_n состоит из мономов $h_{r_1} h_{r_2} \dots h_{r_n}$, $r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_n$, $h_{r_k} \in B$. Элемент s, принадлежащий S_n, будем называть однородным степени n.

В алгебре $U(H)$ имеется фильтрация, определяемая K-модулями $U_n(H)$, которые порождаются мономами $h_1 h_2 \dots h_m$, $m \leq n$, $h_i \in H$. По этой фильтрации строится ассоциированная градуированная алгебра $\operatorname{gr} U(H) = \bigoplus_{n\geq 0} U^{(n)}(H)$, где $U^{(n)}(H) = U_n(H)/U_{n-1}(H)$, $n \geq 0$, $U_{-1}(H) = 0$.

Подалгебру $S^H(H) = \{s \in S(H),\ D_a s = 0\ \forall a \in H\}$ симметрической алгебры $S(H)$, где D_a — дифференцирование алгебры $S(H)$, являющееся продолжением оператора $\operatorname{ad} a$, называют кольцом инвариантов алгебры H.

Обозначим через $\widehat{T}$, $\widehat{S}$ и $\widehat{U}$ соответственно тензорную, симметрическую и универсальную обертывающую алгебры для $\widehat{L}$. Естественные гомоморфизмы из $\widehat{T}$ в $\widehat{S} = \widehat{T}/I_S$ и в $\widehat{U} = \widehat{T}/I_U$ обозначим через φ и ψ соответственно. Из вышеприведенных определений следует, что $\varphi_n = \varphi|_{\widehat{T}_n}$ и $\psi_n = \psi|_{\widehat{T}_n}$ — это гомоморфизмы $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-модулей из $\widehat{T}_n$ в $\widehat{S}_n$ и в $\widehat{U}_n$. Пусть θ_n — каноническое отображение из $\widehat{U}_n$ на $\widehat{U}_n/\widehat{U}_{n-1}$. В силу теоремы Пуанкаре–Биркгоффа-Витта (см. [1]) имеет место изоморфизм $\widehat{U}_n/\widehat{U}_{n-1} \cong \widehat{S}_n$. Поэтому, отождествляя $\widehat{U}_n/\widehat{U}_{n-1}$ и $\widehat{S}_n$, будем считать, что θ_n — гомоморфизм $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-модулей из $\widehat{U}_n$ на $\widehat{S}_n$. Кроме того, легко убедиться [2], что $\varphi_n = \theta_n \psi_n$.

Поскольку $\widehat{\mathbb{Z}}[X] = \mathbb{Z} \oplus \sum_{j\geq 1} F_p \widehat{X}^j$, то $\widehat{T} = (\mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} T(L_{\mathbb{Z}})) \oplus \sum_{j\geq 1} (F_p \widehat{X}^j \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} T(L_{\mathbb{Z}}))$, где $T(L_{\mathbb{Z}})$ — тензорная алгебра $\mathbb{Z}$-модуля $L_{\mathbb{Z}}$. Более того, т. к. $T(L_{\mathbb{Z}}) = \bigoplus_{n\geq 0} T_n(L_{\mathbb{Z}})$, то $\widehat{T} = \bigoplus_{j\geq 0} \bigoplus_{n\geq 0} \widehat{T}_{n,j}$, где $\widehat{T}_{n,j} = F_p \widehat{X}^j \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} T_n(L_{\mathbb{Z}})$, $j \geq 1$, а

$$T_{n,0} = \mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} T_n(L_{\mathbb{Z}}) = \bigoplus_{i_1,\dots,i_n \in I} \mathbb{Z}(\widehat{e}_{i_1} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{e}_{i_2} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \cdots \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{e}_{i_n}), \quad I = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Рассмотрим $\mathbb{Z}$-подмодуль $\overline{T}_{n,0}$ в $\widehat{T}_{n,0}$, порожденный элементами $\operatorname{Sym}(\widehat{e}_{i_1}, \dots, \widehat{e}_{i_n})$, $i_k \in I$, где

$$\operatorname{Sym}(\widehat{e}_{i_1}, \dots, \widehat{e}_{i_n}) = \Big(\sum_{\pi \in S_n} y_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes y_{\pi(n)} \Big)\Big|_{y_r = e_{i_r}}, \quad r = 1, \dots, n.$$

Здесь $Y = \{y_1, y_2, \dots\}$ — базис свободного $\mathbb{Z}$-модуля $\mathbb{Z}[Y]$ со счетным числом образующих, произведение $y_{j_1} \otimes \cdots \otimes y_{j_n}$ — элемент тензорной алгебры $T(\mathbb{Z}[Y])$, а S_n — симметрическая группа подстановок n-й степени.

Обозначим через $\overline{S}_{n,0}$ и $\overline{U}_{n,0}$ образы $\overline{T}_{n,0}$ в симметрической и универсальной обертывающей алгебрах при гомоморфизмах φ и ψ соответственно. Легко видеть, что $\overline{S}_{n,0}$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом из элементов $n! \widehat{e}_{i_1} \widehat{e}_{i_2} \dots \widehat{e}_{i_n}$, $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$, $i_k \in I$, а гомоморфизм φ задает изоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей $\overline{T}_{n,0}$ и $\overline{S}_{n,0}$. Ограничение гомоморфизма φ на $\overline{T}_{n,0}$ в дальнейшем будем обозначать через $\overline{\varphi}_n$. Соответственно, ограничение ψ на $\overline{T}_{n,0}$ обозначим через $\overline{\psi}_n$, а ограничение θ на $\overline{U}_{n,0}$ — через $\overline{\theta}_n$. Поскольку $\overline{\varphi}_n$ — биекция из $\overline{T}_{n,0}$ на $\overline{S}_{n,0}$ и $\overline{\varphi}_n = \overline{\theta}_n \overline{\psi}_n$, то $\overline{\theta}_n$ и $\overline{\psi}_n$ также биекции.

Пусть L_a — оператор левого умножения в алгебре $L_{\mathbb{Z}}$, т. е. $L_a b = a \circ b$, $a, b \in L_{\mathbb{Z}}$. Обозначим через L_a его продолжение на $\widehat{L} : L_a(f(\widehat{X}) \otimes b) = f(\widehat{X}) \otimes a \circ b$, $f(\widehat{X}) \otimes b \in \widehat{L}$. В частности, $L_a(\widehat{b}) =$

$\widehat{a \circ b}$, где $\widehat{b} = 1_{\widehat{\mathbb{Z}}[X]} \otimes b \in \widehat{L}$. Дифференцирование, продолжающее оператор L_a на тензорную алгебру $T(\widehat{L})$, обозначим через D_a. Поскольку

$$D_a(\widehat{b} \otimes \widehat{c} - \widehat{c} \otimes \widehat{b}) = \widehat{a \circ b} \otimes \widehat{c} - \widehat{c} \otimes \widehat{a \circ b} + \widehat{b} \otimes \widehat{a \circ c} - \widehat{c} \otimes \widehat{a \circ b} \in I_S$$

при $a, b, c \in L_{\mathbb{Z}}$, то существует продолжение дифференцирования D_a на алгебру $\widehat{S}$, обозначаемое в дальнейшем D_a^s. Соответственно, для любых $a, b, c \in L_{\mathbb{Z}}$ имеем

$$D_a(\widehat{b} \otimes \widehat{c} - \widehat{c} \otimes \widehat{b} - \widehat{b} \circ \widehat{c}) = D_a(\widehat{b} \otimes \widehat{c} - \widehat{c} \otimes \widehat{b} - \widehat{X}\widehat{b \circ c}) =$$
$$= \widehat{a \circ b} \otimes \widehat{c} - \widehat{c} \otimes \widehat{a \circ b} - \widehat{X}(\widehat{(a \circ b) \circ c}) + \widehat{b} \otimes (\widehat{a \circ c}) - \widehat{a \circ c} \otimes \widehat{b} - \widehat{X}(\widehat{b \circ (a \circ c)}) + \widehat{X}\widehat{J}(a, b, c),$$

где $\widehat{J}(a, b, c) = \widehat{(a \circ b) \circ c} + \widehat{(b \circ c) \circ a} + \widehat{(c \circ a) \circ b}$. Поскольку $\widehat{J}(a, b, c) = p\widehat{d}$ для некоторого $d \in L_{\mathbb{Z}}$, то $\widehat{X}\widehat{J}(a, b, c) = 0$ и, следовательно, $D_a I_u \subseteq I_u$. Поэтому существует продолжение D_a^u оператора D_a на алгебру $\widehat{U}$.

В силу определения операторов D_a^s и D_a^u выполняются соотношения $D_a^s\varphi = \varphi D_a$, $D_a^u\psi = \psi D_a$. Кроме того, $D_a\overline{T}_{n,0} \subseteq \overline{T}_{n,0}$, т. к. $D_a \operatorname{Sym}(\widehat{e}_{i_1}, \ldots, \widehat{e}_{i_n}) = \sum\limits_{j=1}^{n} \operatorname{Sym}(\widehat{e}_{i_1}, \ldots, \widehat{a \circ e_{i_j}}, \ldots, \widehat{e}_{i_n})$. Следовательно, $D_a^s\overline{\varphi} = \overline{\varphi} D_a$, $D_a^u\overline{\psi} = \overline{\psi} D_a$. Поэтому и $\overline{\theta}_n$ согласовано с дифференцированиями D_a^s, D_a^u: $D_a^s\overline{\theta}_n = \overline{\theta}_n D_a^u$, т. к. $\overline{\theta}_n = \overline{\varphi}_n\overline{\psi}_n^{-1}$.

Определим аналоги кольца инвариантов в $\overline{S}_{n,0}$ и в $\overline{U}_{n,0}$. А именно, положим $\overline{S}_{n,0}^L = \{c \in \overline{S}_{n,0}, D_a^s c = pc_1, \exists c_1 \in \overline{S}_{n,0}\ \forall a \in L_{\mathbb{Z}}\}$, $\overline{U}_{n,0}^L = \{d \in \overline{U}_{n,0}, D_a^u d = pd_1, \exists d_1 \in \overline{U}_{n,0}\ \forall a \in L_{\mathbb{Z}}\}$.

Из согласованности действия операторов D_a^s, D_a^u с биекцией $\overline{\theta}_n$ следует, что $\overline{\theta}_n$ задает изоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей $\overline{U}_{n,0}^L$ и $\overline{S}_{n,0}^L$. Рассматривая $\overline{U}_{n,0}^L$ и $\overline{S}_{n,0}^L$ как $L_{\mathbb{Z}}$-модули относительно действия операторов D_a^u, D_a^s, $a \in L_{\mathbb{Z}}$, получим, что $\overline{\theta}_n$ задает изоморфизм $L_{\mathbb{Z}}$-модулей.

Заметим, что в алгебре $\widehat{U}$ выполняется соотношение $\widehat{X}\widehat{a \circ b} = \widehat{a}\widehat{b} - \widehat{b}\widehat{a}$, $a, b \in L_{\mathbb{Z}}$. Следовательно, $\overline{U}_{n,0}^L = \{d \in \overline{U}_{n,0}, [\widehat{a}, d] = 0\ \forall a \in L_{\mathbb{Z}}\}$. Но элементы $\widehat{a}, a \in L_{\mathbb{Z}}$ являются образующими алгебры $\widehat{U}$. Поэтому $\widehat{Z}_n = \overline{U}_{n,0}^L$ содержится в центре $Z(\widehat{U})$ универсальной обертывающей алгебры $\widehat{U}$.

Как ранее для тензорной алгебры, рассмотрим разложение $\widehat{S} = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \bigoplus\limits_{j \geq 0} \widehat{S}_{n,j}$, где $\widehat{S}_{n,j} = F_p\widehat{X}^j \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} S_n(L_{\mathbb{Z}})$, $j \geq 1$, а $\widehat{S}_{n,0} = \mathbb{Z} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} S_n(L_{\mathbb{Z}})$. Назовем кольцом частичных инвариантов множество $\widehat{S}^L = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \widehat{S}_{n,0}^L$, где $\widehat{S}_{n,0}^L = \{\widehat{s} \in \widehat{S}_{n,0}, D_a^s\widehat{s} = p\widehat{s}_1, \exists \widehat{s}_1 \in \widehat{S}_{n,0}\ \forall a \in L_{\mathbb{Z}}\}$.

Отображение $\mathbb{Z}$-модулей $\tau_n : \widehat{S}_{n,0} \to \overline{S}_{n,0}$, определяемое на базисных элементах правилом $\tau_n(\widehat{e}_{i_1} \ldots \widehat{e}_{i_n}) = n!\widehat{e}_{i_1} \ldots \widehat{e}_{i_n}$, $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$, является изоморфизмом $\mathbb{Z}$-модулей и перестановочно с операторами D_a^s. Следовательно, τ_n задает изоморфизм $L_{\mathbb{Z}}$-модулей $\widehat{S}_{n,0}^L$ и $\overline{S}_{n,0}^L$, а $\omega_n = \overline{\theta}_n^{-1}\tau_n$ — изоморфизм $\widehat{S}_{n,0}^L$ и $\widehat{Z}_n$. Соответственно, отображение $\omega = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \omega_n$ задает изоморфизм $\widehat{S}^L = \bigoplus\limits_{n \geq 0} \widehat{S}_{n,0}^L$ и $\widehat{Z} = \sum\limits_{n \geq 0} \widehat{Z}_n$.

Итак, доказана

Теорема 1. *Пусть L — алгебра Ли над простым полем F_p, $\widehat{L}$ – ее $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-форма. Тогда отображение ω задает изоморфизм $L_{\mathbb{Z}}$-модулей $\widehat{S}^L$-кольца частичных инвариантов симметрической алгебры $\widehat{S} = S(\widehat{L})$ и подкольца $\widehat{Z}$ в центре $Z(\widehat{U})$ универсальной обертывающей алгебры $\widehat{U} = U(\widehat{L})$.*

Укажем теперь на связь между кольцом $\widehat{Z}$ и кольцом инвариантов S^L. Пусть $s_0 = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_n \in I} \alpha_{i_1, \ldots, i_n} f_{i_1} \ldots f_{i_n}$, $\alpha_{i_1, \ldots, i_n} \in F_p$, — однородный степени n элемент, принадлежащий кольцу инвариантов S^L симметрической алгебры $S(L)$. Рассмотрим элемент $\widehat{s}_0 = \sum \beta_{i_1, \ldots, i_n} \widehat{e}_{i_1} \ldots \widehat{e}_{i_n} \in \widehat{S}_{n,0}$, $\beta_{i_1, \ldots, i_n} \in \mathbb{Z}$, причем $1_{F_p} \otimes \beta_{i_1, \ldots, i_n} = \alpha_{i_1, \ldots, i_n}$ для любого коэффициента $\alpha_{i_1, \ldots, i_n}$, участвующего в определении элемента s_0, т. е. $1_{F_p} \otimes \widehat{s}_0 = s_0$. Более того, $\widehat{s}_0 \in \widehat{S}^L_{n,0}$, т. е. $F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{S}^L_{n,0} = S^L_n$. Обозначим через $\widehat{\theta}$ изоморфизм $L_{\mathbb{Z}}$-модулей ω^{-1}, где ω — введенный выше изоморфизм $\omega : \widehat{S}^L \to \widehat{Z}$. Тогда получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть L — алгебра Ли над простым полем F_p, $\widehat{L}$ — ее $\widehat{\mathbb{Z}}[X]$-форма. Тогда $S^L = F_p \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{\theta}\widehat{\mathbb{Z}}$, где S^L — кольцо инвариантов симметрической алгебры $S(L)$, $\widehat{Z} = \sum\limits_{n \geq 0} \overline{U}^L_{n,0}$ — кольцо частичных инвариантов алгебры $\widehat{U}$, содержащееся в центре $Z(\widehat{U})$, $\widehat{\theta} = \omega^{-1}$ — изоморфизм $L_{\mathbb{Z}}$-модулей $\widehat{Z}$ и $\widehat{S}^L$.*

В качестве примера рассмотрим случай гамильтоновой алгебры H_{2n}. Алгебру Ли $L = H_{2n}$ определим как факторалгебру $\mathcal{O}_{2n}$ кольца многочленов $F_p[x_1, \ldots, x_{2n}]$ по идеалу, порожденному элементами $x_i^p - 1$, $i = 1, \ldots, 2n$, и умножением

$$f \circ g = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i f)(\partial_{n+i} g) - (\partial_i g)(\partial_{n+i} f), \quad f, g \in \mathcal{O}_{2n},$$

∂_i — продолжение $\frac{\partial}{\partial x_i}$ на $\mathcal{O}_{2n}$.

Обозначим через $x(\alpha) = x_1^{\alpha^1} \ldots x_{2n}^{\alpha^{2n}}$, $0 \leq \alpha^i < p$, $\alpha^i \in \mathbb{Z}$, базисные элементы алгебры H_{2n}. Умножение в выбранном базисе имеет вид

$$x(\alpha) \circ x(\beta) = \sum_{i=1}^{n} d_i(\alpha, \beta) x(\alpha + \beta - \delta_i),$$

где $\delta_i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, 0, \ldots, \underset{n+i}{1}, \ldots, 0)$, $d_i(\alpha, \beta) = \Delta_i(\alpha, \beta) 1_{F_p}$, $\Delta_i(\alpha, \beta) = \begin{vmatrix} \alpha^i & \alpha^{n+i} \\ \beta^i & \beta^{n+i} \end{vmatrix}$, $\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{2n})$, $\beta = (\beta^1, \ldots, \beta^{2n})$, а координаты вектора $\alpha + \beta - \delta_i$ вычисляются по модулю p.

Пусть $L_{\mathbb{Z}}$ — свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $e(\alpha)$, $\alpha \in P = \{\alpha = (\alpha^1, \ldots, \alpha^{2n}), 0 \leq \alpha^i < p, \alpha^i \in \mathbb{Z}\}$. Превратим его в алгебру над $\mathbb{Z}$, полагая

$$e(\alpha) \circ e(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i(\alpha, \beta) e(\alpha + \beta - \delta_i),$$

где, как и выше, координаты вектора $\alpha + \beta - \delta_i$ вычисляются по модулю p.

Обозначим через $M_r(a)$ множество решений сравнения $x_1 + x_2 + \cdots + x_r \equiv a (\operatorname{mod} p)$, где $a = (a^1, \ldots, a^{2n}) \in P$, $x_i \in P$, причем два решения $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ и $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$ считаем одинаковыми, если одно получается из другого перестановкой компонент. Это сравнение равносильно системе сравнений вида

$$x_1^j + x_2^j + \cdots + x_r^j \equiv a^j (\operatorname{mod} p), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $0 \leq x_i^j < p$, $i = 1, \ldots, r$, $0 \leq a^j < p$.

Рассмотрим элементы $w_r(a) = \sum\limits_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in M_r(a)} \operatorname{Sym}(\widehat{e}(\alpha_1), \ldots, \widehat{e}(\alpha_r))$, $r \geq 1$. В силу ранее введенных обозначений $w_r(a) \in \overline{T}_{r,0}$. Тогда

$$D_b w_r(a) = \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in M_r(a)} \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{2n} \Delta_i(b, \alpha_j) \operatorname{Sym}(\widehat{e}(\alpha_1), \ldots, \widehat{e}(\alpha_j + b - \delta_i), \ldots, \widehat{e}(\alpha_r)).$$

Если набор $(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r)$ такой, что $\alpha'_j = \alpha_j + b - \delta_i$, $\alpha'_t = \alpha_t - b + \delta_i$, $\alpha'_k = \alpha_k$, $k \neq j, t$, то в результате применения дифференцирования D_b к моному $\widehat{e}(\alpha'_1) \ldots \widehat{e}(\alpha'_r)$ получим в качестве одного из слагаемых моном $\widehat{e}(\alpha_1) \ldots \widehat{e}(\alpha_j + b - \delta_i) \ldots \widehat{e}(\alpha_r)$. Объединяя в вышеприведенной формуле симметризаторы с подобными мономами, получим

$$D_b w_r(a) =$$
$$= \sum_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\in M_r(a)} \sum_{i=1}^{2n} \Delta_i(b,\alpha_1+\cdots+\alpha_r+(r-1)\delta_i) \sum_{j=1}^{r} \mathrm{Sym}(\widehat{e}(\alpha_1),\ldots,\widehat{e}(\alpha_j+b-\delta_i),\ldots,\widehat{e}(\alpha_r)).$$

Если $a \equiv (1-r)\delta(\mathrm{mod}\, p)$, где $\delta = \sum\limits_{i=1}^{n}\delta_i$, $a \in P$, то $D_b w_r(a) = pw_1$, $w_1 \in \overline{T}_{r,0}$. Следовательно, $\overline{s}_r(a) = \overline{\varphi} w_r(a) \in \overline{S}^{L}_{r,0}$, $\widehat{s}_r(a) = \frac{1}{r!}\overline{s}_r(a) \in \widehat{S}^{L}_{r,0}$, $1_{F_p} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{s}_r(a) = s_r(a) \in S^L(L)$, где $a \equiv (1-r)\delta(\mathrm{mod}\, p)$. Соответственно, $\overline{u}_r(a) = \overline{\psi} w_r(a) \in \overline{U}^{L}_{r,0} \subset ZU(\widehat{L})$, причем, как показано в теоремах 1 и 2, $\overline{\theta}_r^{-1}\overline{s}_r(a) = \overline{u}_r(a)$ и $1_{F_p} \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \frac{1}{r!}\,\mathrm{gr}\,\overline{u}_r(a) = s_r(a)$.

Литература

1. Серр Ж.-П. *Алгебры Ли и группы Ли.* – М.: Мир, 1969. – 375 с.
2. Диксмье Ж. *Универсальные обертывающие алгебры.* – М.: Мир, 1978. – 407 с.

Казанский государственный университет

Поступили
первый вариант 13.10.1997
окончательный вариант 27.08.2001