Министерство образования и науки Российской Федерации
КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ
Специальность: 010101.65 - математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(дипломная работа)

ВЫЧИСЛИМЫЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И СВОДИМОСТЬ ПО СОЛОВЕЮ

Работа завершена:
"__" _____ 2014 г. _____ (И.Р. Сабирзянова)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой
"__" _____ 2014 г. _____ (М.М. Арсланов)

Заведующий кафедрой
доктор физико-математических наук, профессор
"__" _____ 2014 г. _____ (М.М. Арсланов)

Казань-2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Целью данной дипломной работы является изучение свойств вещественных чисел с точки зрения их алгоритмической вычислимости. Приведены определения вычислимых, вычислимо перечислимых, сильно вычислимо перечислимых действительных чисел и изучены соотношения между ними.

Также изучена сводимость по Соловею и её связь с известными алгоритмическими сводимостями.

Актуальность изучения данной тематики является возможность аппроксимировать значения вещественных чисел с известной, наперёд заданной точностью.

1. Основные понятия

Пусть $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$. Для каждого множества натуральных чисел A следующим образом определим вещественное число α:

$$\alpha = 0.q_0 q_1 q_2 q_3 ... q_n ...$$

где $q_i = 1$, если $i \in A$ и $q_i = 0$, если $i \overline{\in} A$. В этом случае пишем $\alpha = 0.A$.

Определение 1[1]: Последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, где $\alpha_n = 0.q_0 q_1 q_2 q_3 ... q_n$, называется эффективно сходящейся, если:

$$|\alpha - \alpha_n| \leq 2^{(-n)}$$

для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение 2[2]: Последовательность $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ называется фундаментальной, если она удовлетворяет критерию Коши:

Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N_ε, что $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ для любых $n, m > N_\varepsilon$.

Определение 3[1]: Действительное число α называется вычислимым, если существует вычислимая фундаментальная последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}_{n \in N}$, эффективно сходящаяся к α. Последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}_{n \in N}$ вычислима, если существуют такие вычислимые функции α,β,γ:$\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что:

$$\alpha_n = \frac{\alpha(n) - \beta(n)}{\gamma(n)}$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

Вычислимое число $\alpha = 0.A$ может быть эквивалентно определено как:

$$\alpha = \sum_{n \in A} 2^{-n}$$

Определение 4[3]: Характеристической функцией множества A, называется функция:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

Определение 5[3]: Множество A называется вычислимым, если его характеристическая функция $A(x)$ вычислима для каждого x.

Определение 6[3]: Множество A называется вычислимо перечислимым, если A является областью определения некоторой частично вычислимой функции.

Определение 7[4]: Функция f называется частично вычислимой, если она может быть получена из исходных простейших функций:

$$O(x) = 0, s(x) = x + 1, I_n^m(x_1, ..., x_n) = x_m, 1 \leq m \leq n$$

Путём последовательного применения следующих операций: суперпозиции, примитивной рекурсии, минимизации аргумента.

Определение 8[1]: Действительное число α вычислимо перечислимо, если существует возрастающая (убывающая) вычислимая последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}_{n \in N}$, сходящаяся к α.

Определение 9[5]: Действительное число $\alpha = 0.A$ называется сильно вычислимо перечислимым, если множество A - вычислимо перечислимое.

Определение 11[6]: Пусть α, β - действительные числа. Будем говорить, что α доминирует β (или β сводится по Соловею к α, пишем $\beta \leq_s \alpha$), если существуют такие константа с и частично вычислимая функция $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, что для любого рационального числа $q < \alpha$ имеем $\varphi(q)$ определено, $\varphi(q) < \beta$ и:

$$\beta - \varphi(q) \leq c \cdot (\alpha - q)$$

Определение 12[3]:

(i) Множество B вычислимо относительно A (сводится по Тьюрингу к A), пишем $B \leq_T A$, если $B = \{e\}^A$ для некоторого e, где $\{e\}^A = \Phi_e^A$-частичная функция, вычислимая на машине Тьюринга P_e с оракулом A.

(ii) Множество B вычислимо перечислимо относительно A, если $B = W_e^A$ для некоторого e, где множество W_e^A является областью значений частично вычислимой функции Φ_e^A.

Определение 13[3]: Говорят, что вычислимо перечислимое множество B $m-$сводится к вычислимо перечислимому множеству A, если существует вычислимая функция f такая, что для любого x:

$$x \in B \Leftrightarrow f(x) \in A$$

2. Вычислимые, вычислимо перечислимые и сильно вычислимо перечислимые действительные числа.

Теорема 1: Число $\alpha = 0.A$ вычислимо тогда и только тогда, когда множества A вычислимо.

Необходимость:

Пусть $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$

$a_0 < a_1 < a_2 < ...$.

$A-$вычислимо, тогда по определению вычислимого множества, функция $A(x)$ вычислима.

$$A(x) = \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

Пусть:

$\alpha_0 = 0.A(0)A(1)...A(a_0)$

$\alpha_1 = 0.A(0)A(2)...A(a_1)$

...

$\alpha_n = 0.A(0)A(2)...A(a_n)$.

Очевидно, что $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ - вычислимая последовательность рациональных чисел и $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ для каждого n.

Тогда:

$|\alpha - \alpha_n| = 0.A(0)A(1)...A(n)... - 0.A(0)A(1)...A(n) = 0.00...0A(n+1)... \leq 10^{-n} < 2^{-n}$, для каждого $n \in N$.

Мы построили фундаментальную последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ такую, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$. Поэтому α - вычислимое действительное число.

Достаточность:

Пусть действительное число α - вычислимо, то есть существует вычислимая фундаментальная последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}_{n\in N}$ такая, что $\alpha = \lim_{n\to\infty} \alpha_n$.

Пусть $\alpha_0 = 0.\alpha(0)$

$\alpha_1 = 0.\alpha(0)\alpha(1)$

...

$\alpha_n = 0.\alpha(0)\alpha(1)...\alpha(n)$

Тогда характеристическую функцию множества A можно представить в виде:

$$A(x) = \begin{cases} 1 & , \alpha_{x+1} - \alpha_x \neq 0 \\ 0 & , \alpha_{x+1} - \alpha_x = 0 \end{cases}$$

Отсюда видно, что $A(x)$ - вычислима.

Множество всех вычислимых чисел обозначим через C_0, а множество всех вычислимо перечислимых действительных чисел обозначим через C_1.

Покажем, что $C_0 \subset C_1$.

Действительно, α вычислимо тогда и только тогда, когда существует фундаментальная вычислимая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α, то есть существуют и возрастающая и убывающая вычислимые последовательности, сходящиеся к α. Таким образом, если α вычислима, то α вычислимо перечислимо.

Осталось показать, что существуют вычислимо перечислимые числа, которые не являются вычислимыми. Число $\alpha = 0.A(0)A(1)...$ для не вычислимого, вычислимо перечислимого множества A, не вычислимо, но мы его можем аппроксимировать снизу:

Перечисляем множество A.

Пусть $A = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$, где a_n - число, перечисленное в множество A на шаге n. Обозначим:

$\alpha_0 = 0.A_0$, где $A_0 = \{a_0\}$

$\alpha_1 = 0.A_1$, где $A_1 = \{a_0, a_1\}$

...

$\alpha_n = 0.A_n$, где $A_n = \{a_0, ..., a_n\}$.

Очевидно, что $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ возрастающая вычислимая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к α. Следовательно α - вычислимо перечислимое действительное число.

Напомним известную теорему о дополнении:

Теорема 2[3]: Множество A вычислимо тогда и только тогда, когда как A, так и $\overline{A}$ вычислимо перечислимые можества.

Покажем, что существуют вычислимо перечислимые числа, которые не являются сильно вычислимо перечислимыми.

Пусть $\{W_e\}_{e\in\mathbb{N}}$ - нумерация всех вычислимо перечислимых множеств.

Пусть множество B вычислимо перечислимо, но не вычислимо. Следовательно, по теореме о дополнении, дополнение множества B не является вычислимо перечислимым. По определению число $\beta = 0.B$ - сильно вычислимо перечислимо.

Число β - вычислимо перечислимо, то есть существует монотонная вычислимая последовательность рациональных чисел $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, которая сходится к β. Для определенности, последовательность считаем возрастающей.

Для каждого n на позициях "1"числа β_n в α_n ставим "0", и "1"на остальных позициях. Тогда получаем убывающую вычислимую последовательность рациональных чисел $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходящуюся к $\alpha = 1-\beta = 0.\overline{B}$. Следовательно число α - вычислимо перечислимо, но не сильно вычислимо перечислимо, так как множество $\overline{B}$ - не вычислимо перечислимо.

Теорема 3: Действительное число α - вычислимо, тогда и только тогда, когда действительные числа $\alpha = 0.A$ и $(1-\alpha) = 0.\bar{A}$ сильно вычислимо перечислимы.

Достаточность: Пусть действительное число α вычислимо. По теореме 1 множество A и его характеристическая функция вычислимы. Рассмотрим характеристическую функцию дополнения множества A:

$$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$$

Так как функция $A(x)$ вычислима, то и функция $\bar{A}$ вычислима, значит число $(1-\alpha)$ - вычислимо. Так как $C_0 \subset C_1$, то из вычислимости чисел α и $(1-\alpha)$ следует, то что они сильно вычислимо перечислимы.

Необходимость: Пусть числа $\alpha = 0.A$ и $1-\alpha = 0.\overline{A}$ сильно вычислимо перечислимые числа. Тогда, по определению, множества A и $\overline{A}$ вычислимо перечислимы. Поэтому, по теореме Поста, множество A - вычислимо. Следовательно, число α вычислимо.

3. Сводимость по Соловею

Покажем, рефлексивность и транзитивность отношения $\beta \leq_s \alpha$.

Рефлексивность:

Пусть α - действительное число, а функция φ является тождественной, то есть $\varphi(q) = q$. Тогда для любой константы $c \geq 1$ и для любого рационального числа $q < \alpha$ верно:

$$\alpha - \varphi(q) \leq c \cdot (\alpha - q)$$

Транзитивность:

Пусть α, β, γ- вычислимо перечислимые действительные числа такие, что $\alpha \leq_s \beta$, а $\beta \leq_s \gamma$. То есть, существуют константы c_1, c_2 и частично вычислимые функции φ_1, φ_2 такие, что:

$$\alpha - \varphi_1(q) \leq c_1 \cdot (\beta - q)$$
$$\beta - \varphi_2(q) \leq c_2 \cdot (\gamma - q)$$

Тогда:

$$\alpha - \varphi_1(\varphi_2(q)) \leq c_1 \cdot (\beta - \varphi_2(q)) \leq c_1 \cdot c_2 \cdot (\gamma - q)$$

То есть, существуют такие константа $c = c_1 \cdot c_2$ и частично вычислимая функция $\varphi(q) = \varphi_1(\varphi_2(q))$, что для любого рационального числа q:

$$\alpha - \varphi(q) \leq c \cdot (\gamma - q)$$

Сводимость по Соловею является рефлексивной и транзитивной, поэтому $\equiv_s$ - задаёт класс эквивалентности вычислимо перечислимых чисел.

Пишем $\alpha \equiv_s \beta$, если $\alpha \leq_s \beta$ и $\beta \leq_s \alpha$.

3.1 Сравнение сводимости по Тьюрингу со сводимостью по Соловею

Теорема 4: Пусть α, β вычислимо перечислимые действительные числа, тогда

$$\beta \leq_s \alpha \Rightarrow B \leq_T A$$

Доказательство:

Пусть $\beta \leq_s \alpha$. Тогда существует константа c и частично вычислимая функция $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такие, что для любого рационального числа $q < \alpha$ имеем $\varphi(q) \downarrow < \beta$ и

$$\beta - \varphi(q) \leq c(\alpha - q).$$

Так как α - вычислимо перечислимое действительное число, то существует вычислимая поседовательность рациональных чисел q_n такая, что:

$|\alpha - q_{f(n)}| < 2^{-n}$ для любого n

Тогда $\beta - \varphi(q_{f(n)}) < c \cdot 2^{-n} < 2^{a-n}$, где a это некоторая константа такая, что $c < 2^a$. То есть начиная с некоторого n последовательность $\varphi(q_{f(n)})$ сходится к β. Это означает, что зная аппроксимацию α мы можем вычислить аппроксимацию β. Отсюда легко следует, что $B \leq_T A$, что и требовалось.

Естественно возникает вопрос: Верно ли обратное? Чтобы ответить на него напомним определение ретрассируемого множества.

Определение 14[7]: Говорят, что функция f(x) ретрассирует множество $A = \{a_0, a_1, a_2, ...\}$, $a_0 < a_1 < a_2 < ...$, если для каждого $i \in \mathbb{N}$:

а) значение $f(a_i)$ определено;

б) $f(a_0) = a_0$;

в) $f(a_{i+1}) = a_i$;

Определение 15[7]: Множество A-называется ретрассируемым, если существует хотя бы одна частично вычислимая функция, которая ретрассирует множество A.

Теорема 5: У каждого ретрассируемого множества, существует бесконечное подмножество, к которому оно сводится по Тьюрингу, но не сводится по Соловею.

Доказательство:

Пусть A - ретрассируемое множество, а B - его произвольное бесконечное подмножество. Покажем, что $A \leq_T B$.

Для этого нужно построить B - оракульный алгоритм, распознающий элементы множества A, чтобы определить для произвольного x, его принадлежность множеству A. Находим наименьшее число p такое, что число $x + p$ принадлежит множеству B. Такое число найдётся так как множество B бесконечное.

Вычисляем $f(x + p), ff(x + p), \ldots$.

$\underbrace{ff...f}_{i}(x+p) = a_0$, для некоторого $i > 0$.

Если существует $j < i$:

$$\underbrace{ff...f}_{j}(x+p) = x$$

то $x \in A$, в противном случае $x \notin A$.

Теперь докажем, что подмножество B множества A можно подобрать так, чтобы $0.A \not\leq_s 0.B$. Для простоты рассуждений положим $c = 1$. Для других значений c рассуждения аналогичны.

Пусть $y_0, y_1, y_2...$ - рациональное приближение $0.A$. Будем строить множество B удовлетворяя следущие требования P_e:

P_e: либо φ_e не всюду определено, либо существует x такое, что

$$|0.A - y_{\varphi_e(x)}| > |0.B - y_x|.$$

Ищем такое x в виде $x =< e, x' >$.

Ждём, пока $\varphi_e(x')$ определится.

Случай первый: $\varphi_e(x')$ не определено. Тогда требование P_e - выполнено.

Случай второй: $\varphi_e(x')$ определено. Тогда вычисляем $y_{\varphi_e(x')}$, и ищем такую позицию n, что $y_{\varphi_e(x'),n} = 1$. Тогда запрещаем класть число n в множество B. Получим:

$|0.A - y_{\varphi_e(x')}| > |0.B - y'_x|$

Требование P_e выполнено. Таким образом для каждой вычислимой функции φ существует рациональное число q такое, что:

$$0.A - \varphi(q) > (0.B - q)$$

То есть $0.A \not\leq_s 0.B$.

3.2 Сравнение сводимости по Соловею с m-сводимостью

Теорема 6: Пусть B произвольное бесконечное, не вычислимое вычислимо перечислимое множество. Существует вычислимо перечислимое множество A содержащее множество B такое, что $A \leq_m B$, но $\alpha \not\leq_s \beta$.

Доказательство: Требуется доказать, что для любой частично вычислимой функции $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, существует x такое, что:

$$|\alpha - q_{\varphi(x)}| \not\leq |\beta - q_x|$$

где $\{q_x\}_{x \in N}$ нумерация всех рациональных чисел. Будем строить число α, следующим образом. Запишем требование с номером e:

R_e : либо функция Φ_e не всюду определена, либо $|\alpha - q_{\Phi_e(x)}| \not\leq |\beta - q_x|$.

Необходимо, чтобы для каждого e выполнялось требование R_e.

Стратегия для фиксированного R_e:

Берём какое нибудь число x и ждём, пока функция $\Phi_e(x)$ будет определена. Если функция Φ_e в точке x никогда не определится, то требование выполнено. Если функция Φ_e в точке x определилась, то пусть $y = \Phi_e(x)$. Вычисляем рациональное число q_y.

На позициях первых трёх "0" в q_y в α ставим "1". Если в β на тех же позициях стоят "0", тогда берём другой x и повторяем то же самое, но с большим диапозоном "0" в q_y.

Когда нибудь β перестанет повторять α, так как иначе β было бы вычислимым, что противоречит условию не вычислимости β. Пусть диапазон "0" в q_y равен n, их позиции обозначим как $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$. Очевидно, что числа $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ принадлежат множеству A. Функцию f m-сводящую множество A к B строим следующим образом:

Берём первые n точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ входящие в B, которые ещё в нём не использованны, и полагаем $f(t_i) = x_i, i = \overline{1, n}$.

Если таких точек $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ нет, то любые ещё не занятые числа кладём в B и берём их за $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Заключение

В дипломной работе изучены свойства вещественных чисел с точки зрения их вычислимости. Приведены несколько определений, а именно определения вычислимого, вычислимо-перечислимого, сильно вычислимо перечислимого чисел и соотношения между ними. Также приведены определения сводимости по Тьюрингу, m-сводимости, сводимости по Соловею. Показано, что сводимость по Соловею влечет сводимость по Тьюрингу, но не наоборот. Также показано, что m-сводимость не влечёт сводимость по Соловею.

Актуальность этой тематики связана с тем, что сейчас с точки зрения реальных приложений различных областей математики актуальным является возможность аппроксимировать значение вещественных чисел с произвольной, наперед заданной точностью на компьютерах.

Сводимость по Соловею позволяет сравнить "скорости"вычислительной аппроксимации различных чисел. В дипломной работе изучена связь этой сводимости с известными алгоритмическими сводимостями.

Список литературы

1.Klaus Ambos-Spies, Klaus Weihrauch, XizhongZheng: Weakly Computable Real Numbers. J. Complexity 16 - 2000. - p.676-690

2.Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 572 с.

3. Соар Р.И. Вычислимо перечислимые множества и степени: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств / Роберт И. Соар; перевод с англ.под ред.М.М.Арсланова. - Казань: Казанское математическое общество, 2000. - 576 с.

4. Лизунова Е. М. Теория алгоритмов: Учебно-методический комплекс - Елабужский государственный педагогический университет. - 87 с. 5. Мальцев А. И. Алгоритмы и рекурсивные функции. - 2-е изд-е. - М. Наука, 1986 г., 368 с.

6. R. G. Downey, D. R. Hirschfeldt, A. Nies, and F. Stephan, Trivial reals, to appear in the Proceedings of the 7th and 8th Asian Logic Conferences, to be published by World Scientic (extended abstract in Electronic Notes in Theoretical Computer Science, 66).

7. R. G. Downey, Denis R. Hirschfeldt, and Geo LaForte: Randomness and Reducibility - 2001. - p.316-327