Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 010101.65 — Математика

Специализация: Алгебра и алгебраические структуры алгоритмической природы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

Алгоритмически случайные точки в евклидовых пространствах

Работа завершена:
“___” _____ 2014 г. _____ Л. Р. Бадардинова

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент
“___” _____ 2014 г. _____ М. В. Зубков

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н., профессор
“___” _____ 2014 г. _____ М. М. Арсланов

Казань — 2014

Содержание

Введение **3**

1 Случайность вещественных чисел **5**

2 Случайность и арифметические операции **7**

3 Случайность в $\mathbb{R}^2$ **17**

Заключение **25**

Список литературы **26**

Введение

Алгоритмическая случайность подразумевает под собой изучение случайных отдельных элементов в образцовых пространствах, в основном, во множестве всех бесконечных двоичных последовательностей. Алгоритмически случайный элемент проходит все эффективно разработанные тесты на случайность.

Теория алгоритмической случайности пытается выяснить, что означает быть случайным для отдельного элемента в пространстве. Современный взгляд на алгоритмическую случайность предлагает три парадигмы для отличия случайных от неслучайных элементов:

1) Непредсказуемость;

2) Несжимаемость;

3) Типичность;

Более подробно ознакомиться с каждой из этих трех парадигм можно в статье Р. Доуни и Я. Римана [1].

Теория алгоритмической случайности опирается на понимание эффективности, которая дается в теории вычислимости. Основная идея в том, что (частично) вычислимая функция $f : N \to N$ называется вычислимой (или рекурсивной), если она может быть вычислена машиной Тьюринга. Широкое признание получил тезис Черча-Тьюринга, который утверждает, что "для любой интуитивно вычислимой функции существует вычисляющая её значения машина Тьюринга". Ниже приведены наиболее общие понятия вычислимости, используемые в алгоритмической случайности.

Подмножество $X \subseteq N$ натуральных чисел является вычислимым, если его характеристическая функция $\chi_X : N \to \{0, 1\}$ вычислима.

Вычислимое действительное число является действительным числом с вычислимым двоичным расширением.

Функция $g : N \to R$ является вычислимой, если существует вычислимая функция $\gamma : N \times N \to \mathbb{Q}$ такая, что $\forall n, k$ выполняется $|\gamma(k, n) - g(k)| \leq 2^{-n}$.

Множество $X \to N$ вычислимо перечислимо (в.п.), если оно является областью определения частично вычислимой функции.

Множество всех бесконечных двоичных последовательностей называется пространством Кантора и обозначается, как 2^ω. Пространство 2^ω можно интерпретировать как полное бесконечное двоичное дерево. Путем отождествления действительных чисел с их бесконечным двоичным представлением, мы можем интерпретировать элементы пространства Кантора как вещественные числа.

Мера Лебега на пространстве Кантора порождается функцией $\lambda[\omega] = 2^{-|\omega|}$, где $|\omega|$ обозначает длину ω.

Одним из центральных понятий алгоритмической случайности является понятие случайности, введённое Мартин-Лёфом (1966) — замечательным шведским математиком, учеником Колмогорова. Руководствуясь понятием теста из статистики, Мартин-Лёф определил эффективно нулевое множество. Он требовал, чтобы последовательность $(G_m)_{m\in\mathbb{N}}$ открытых множеств была вычислимо перечислима, и сходимость была эффективной, а именно, для любого положительного рационального числа δ можно вычислить m такое, что $\lambda G_m \leq \delta$. Взяв подходяющую

эффективную подпоследовательность, можно также требовать, чтобы $\lambda G_m \leq 2^{-m}$ для каждого m. Последовательность открытых множеств с такими свойствами называется тестом Мартин-Лёфа (МЛ-тест). Элемент x случаен по Мартин-Лёфу, если он проходит каждый МЛ-тест, то есть не принадлежит пересечению множеств входящих в тест. Этот подход позволяет определять МЛ-случайные точки в различных пространствах: 2^ω, $\mathbb{R}$ и т.п.

Несколько другое понятие алгоритмической случайности ввел еще один ученик Колмогорова — К.П.Шнорр. Кроме выше перечисленного, он требовал равномерной вычислимости меры. Поэтому случайность по Шнорру является понятием сильнее, чем МЛ-случайность. Более того, он ввел эквивалентное определение случайной по Мартин-Лефу последовательности с помощью префиксной и монотонной сложности (теорема Левина – Шнорра). Он же применил понятие вычислимого мартингала. Более подробно ознакомиться с его результатами и другими исследованиями в этой области можно в статье В.А. Успенского и В.В. Вьюгина [2].

Кроме этого будет рассмотрена обобщенная МЛ-случайность. Это понятие случайности слабее, чем понятие МЛ-случайности. Отличием будет то, что в случае обобщенной МЛ-случайности достаточно доказать сходимость меры к нулю.

В определениях и обозначениях теории вычисилимости мы придерживаемся книги Р. Соара [3].

Используем еще несколько обозначений. Множество всех последовательностей нулей и единиц обозначается как 2^ω. Множество всех тех последовательностей из 2^ω, для которых x служит началом, обозначается через $[A \upharpoonright 1]$. Длина конечной строки последовательности обозначается через $|y|$. Остальные обозначения и необходимые сведения можно посмотреть, например, в книгах В. Успенского [4], [5].

Целью дипломной работы является изучение свойств понятий МЛ-случайности, случайности по Шнорру, обобщенной МЛ-случайности для вещественных чисел, и рассмотрение двумерного случая.

1 Случайность вещественных чисел

Прежде чем давать определения случайности вещественных чисел, приведём несколько связанных с ними определений. Топология на множестве $\mathbb{R}$ задается интервалами вида $U_i = (a_i, b_i)$, где $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Открытые множества представляют собой объединения таких интервалов. Каждое открытое множество можно представить в виде объединения попарно непересекающихся интервалов. Замкнутые множества — это дополнения открытых множеств.

Определение 1. *Функция $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ называется внешней мерой, если она удовлетворяет следующим свойствам:*
(i) $\lambda(\emptyset) = 0$;
(ii) $C \subseteq D \subseteq 2^\omega \Leftrightarrow \lambda(C) \leq \lambda(D)$ (монотонность);
(iii) $\lambda(\bigcup_i C_i) \leq \sum_i \lambda(C_i)$ для любого семейства $(C_i)_{i \in N}$.

Будем рассматривать стандартную меру, а именно $\lambda U_i = |b_i - a_i|$.

Определим конструктивный аналог множества меры 0. Множество $A \subset \mathbb{R}$ является эффективно нулевым, если последовательность интервалов $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_{i_k}$ задается по рациональному числу ϵ некоторой вычислимой функцией. Более точно, множество $A \subset \mathbb{R}$ является эффективно нулевым, если существует такая вычислимая функция $i(k; \epsilon)$, где k — натуральное, а ϵ — положительное рациональное число, что $\lambda(\bigcup_k U_{i(k;\epsilon)}) < \epsilon$ и $A \subseteq \bigcup_k U_{i(k;\epsilon)}$ для всех рациональных $\epsilon > 0$.

Рассмотрим убывающую последовательность рациональных чисел $\epsilon_m = 2^{-m}, m = 1, 2, ...$ Множество $T = \{(m, i(k, 2^{-m})) : k, m = 1, 2, ...\}$ является перечислимым. Этому множеству соответствует последовательность эффективно открытых множеств $\{U_m\}$ такая, что $U_m = \bigcup\{U_i : (m, i) \in T\}$, $\lambda(U_m) \leq 2^{-m}$ и $A \subseteq \bigcap_m U_m$.

Можно взять эти свойства в качестве определения эффективно нулевого множества. Множество пар T называется вычислимой основой для системы эффективно открытых множеств $\{U_m\}$.

Определение 2. *Последовательность множеств $(U_i)_{i \in \mathbb{R}}$, таких что $\{\langle i, x\rangle : x \in U_i\}$ вычислимо перечислимо, называется равномерно вычислимо перечислимой.*

Можно потребовать, чтобы выполнялось еще одно свойство системы $\{U_m\}$: $U_{m+1} \subseteq U_m$ для всех m.

Система эффективно открытых множеств $\{U_m\}$, удовлетворяющая первым трем условиям, называется тестом проверки на случайность по Мартин-Лефу. Каждый тест Мартин-Лефа определяет эффективно нулевое множество $\bigcap_m U_m$, которое также будет называться нулевым множеством теста.

Более подробно с введением в теорию алгоритимческой случайности можно ознакомиться в книге Andr'e Nies [6]. Итак, теперь введем центральное понятие случайности вещественных чисел.

Определение 3. *Тест Мартина-Лёфа (Martin-Löf), или коротко МЛ-тест, — это равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств $(U_i)_{i \in \omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Причем $\forall i \in \omega$ выполняется $\lambda U_i \leq 2^{-i}$.*

Определение 4. *Число $x \in \mathbb{R}$ не проходит тест, если $x \in \bigcap_i U_i$, в противном случае x проходит тест.*

Определение 5. *Вещественное число x является МЛ-случайным, если x проходит каждый МЛ-тест.*

Вещественное число отвергается таким тестом, если оно лежит в его нулевом множестве. Такое число не случайно по Мартин-Лефу. Вещественное число выдерживает тест Мартин-Лефа, если оно не принадлежит его нулевому множеству.

По существу, эффективно нулевые множества — это все подмножества нулевых множеств тестов Мартин-Лефа $\{U_m\}$. Поскольку множество всех тестов Мартин-Лефа счетно, мера объединения их нулевых множеств равна нулю. Таким образом, мера множества всех случайных вещественных чисел равна единице.

Отметим, что главной особенностью определения теста Мартин-Лёфа является свойство меры $\lambda U_i \leq 2^{-i}$. Если рассмотреть 2 других свойства, то мы получим 2 других определения теста, определяющих случайность вещественных чисел. Таковыми являются случайность по Шнорру и обобщенная МЛ-случайность.

Определение 6. *Тест Шнорра (Schnorr) — это равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Причем $\forall i \in \omega$ выполняется $\lambda U_i \leq 2^{-i}$, где λU_i — равномерно вычислимая мера.*

Определение 7. *Число $x \in \mathbb{R}$ не проходит тест, если $x \in \bigcap_i U_i$, в противном случае x проходит тест.*

Определение 8. *Вещественное число x является случайным по Шнорру, если x проходит каждый тест Шнорра.*

Определение 9. *Обобщенный МЛ-тест — это равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Причем $\forall i \in \omega$ выполняется $\lambda U_i \to 0$.*

Определение 10. *Число $x \in \mathbb{R}$ не проходит тест, если $x \in \bigcap_i U_i$, в противном случае x проходит тест.*

Определение 11. *Вещественное число x является слабо 2-случайным, если x проходит каждый обобщенный МЛ-тест.*

Нетрудно заметить, что каждый тест Шнорра является МЛ-тестом, а каждый МЛ-тест, в свою очередь, является обобщенным МЛ-тестом. А следовательно, каждое обобщенно МЛ-случайное вещественное число является МЛ-случайным, а каждое МЛ-случайное вещественное число, в свою очередь, является случайным по Шнорру. Однако, как известно, существуют тесты Шнорра, которые не являются МЛ-тестами, и существуют МЛ-тесты, не являющиеся обобщенными МЛ-тестами (см. [6]).

2 Случайность и арифметические операции

Приведем доказательства зависимости случайности результата от искомых случайных чисел и арифметических операций над ними. Рассмотрим операцию сложения.

Предложение 1. Пусть x, y — случайные вещественные числа и z, u — неслучайные по одной из предложенных случайностей. Тогда соответственно:

а) $-x$ — случайно;

б) $-z$ — неслучайно;

в) $x+u$ — случайно;

г) $u+z$ — неслучайно;

Существуют x, y — случайные вещественные числа такие, что:

д) $x+y$ — неслучайно;

***Доказательство*:**

а) Пусть вещественное число x — МЛ-случайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Для доказательства случайности числа $-x$, предположим,что оно неслучайно. А именно, пусть $-x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$, для некоторого теста $(R_i)_{i\in\omega}$. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(-s_i, -r_i)$. Меры множеств (r_i, s_i) и $(-s_i, -r_i)$ совпадают и, так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — МЛ-тест, не превосходят 2^{-i}. Следовательно, $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (-s_i, -r_i)$ так же образует МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $-x$ — МЛ-случайно.

Пусть вещественное число x — случайно по Шнорру. Проводим аналогичные рассуждения, но в данном случае необходимо еще доказать, что мера множества $(-s_i, -r_i)$ равномерно вычислима. Так как, по предположению, $-x$ неслучайно, мера множества $R_i = (r_i, s_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере R_i, где $-x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap^{\infty}(r_i, s_i)$. Меры множеств (r_i, s_i) и $(-s_i, -r_i)$ совпадают, а значит меры множеств $(-s_i, -r_i)$ так же равномерно вычисляются той же функцией $\lambda(i)$, следовательно $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (-s_i, -r_i)$, так же образует тест Шнорра. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $-x$ — случайно по Шнорру.

Пусть вещественное число x — слабо 2-случайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(-s_i, -r_i)$ стремится к нулю. По предположению $-x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ неслучайно. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(-s_i, -r_i)$. Меры множеств (r_i, s_i) и $(-s_i, -r_i)$ совпадают и, так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, стремятся к нулю. Следовательно, $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (-s_i, -r_i)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $-x$ — слабо 2-случайно.

б) Путь вещественное число z — МЛ-неслучайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Покажем, что и число $-z$ — неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. Тогда $-z \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(-b_i, -a_i)$. Меры множеств (a_i, b_i) и $(-b_i, -a_i)$ совпадают, и так как $(U_i)_{i\in\omega}$

— МЛ-тест, то не превосходят 2^{-i}. Следовательно, $(U'_i)_{i\in\omega}$, где $U'_i = (-b_i, -a_i)$ так же образует МЛ-тест. Причем $-z$ не проходит этот тест. Значит $-z$ — МЛ-неслучайно.

Пусть вещественное число z — неслучайно по Шнорру. Проводим аналогичные рассуждения, но в данном случае необходимо еще доказать, что мера множества $(-b_i, -a_i)$ равномерно вычислима. Так как z неслучайно, мера множества $U_i = (a_i, b_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i)$. Меры множеств (a_i, b_i) и $(-b_i, -a_i)$ совпадают, а значит меры множеств $(-b_i, -a_i)$ так же равномерно вычисляются той же функцией $\lambda(i)$, следовательно $(U'_i)_{i\in\omega}$, где $U'_i = (-b_i, -a_i)$, так же образует тест Шнорра. Причем $-z$ не проходит этот тест. Значит $-z$ — неслучайно по Шнорру.

Пусть вещественное число z — слабо 2-неслучайно. Тогда $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(-b_i, -a_i)$ стремится к нулю. Покажем, что число $-z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U'_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(-b_i, -a_i)$ неслучайно. Меры множеств (a_i, b_i) и $(-b_i, -a_i)$ совпадают и, так как $(U_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, стремятся к нулю. Следовательно, $(U'_i)_{i\in\omega}$, где $U'_i = (-b_i, -a_i)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем $-z$ не проходит этот тест. Значит $-z$ — слабо 2-неслучайно.

в) Пусть вещественное число x — МЛ-случайно, а вещественное число u — МЛ-неслучайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, и для любого МЛ-теста $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (c_i, d_i)$ выполняется $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Для доказательства случайности суммы чисел $x + u$, предположим,что оно неслучайно. А именно, пусть $x + u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$, для некоторого теста $(R_i)_{i\in\omega}$. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i - d_i, s_i - c_i)$. Мера множества $(r_i - d_i, s_i - c_i)$ не превосходит меры множеств (r_i, s_i) и (c_i, d_i), и так как $(R_i)_{i\in\omega}$ и $(V_i)_{i\in\omega}$ — МЛ-тесты, то не превосходит 2^{-i}. Следовательно, $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (r_i - d_i, s_i - c_i)$ так же образует МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $x + u$ — МЛ-случайно.

Прежде чем перейти к доказательству случайности суммы $x + u$ по Шнорру, докажем следующую лемму.

Лемма 1. Если $(R_i)_{i\in\omega}$ — тест Шнорра, то существует тест Шнорра $(R'_i)_{i\in\omega}$ такой, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$, где $R'_i = (a_i, b_i)$, и a_i, b_i — равномерно вычислимы по i.

***Доказательство*:** Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — тест Шнорра, то R_i — равномерно вычислимо перечислимо по i, а $R_{i+1} \subseteq R_i$. Пусть $R_{i,s} = (a_{i,s}, b_{i,s})$ — перечисление R_i на шаге s. Следовательно, концы a_{i_s}, b_{i_s} — вычислимы. Находим такой s, что $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i,s}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$ и $\lambda(R_{i+1,s}) - \lambda(R_{i+1}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$. Полагаем $R'_i = R_{i,s}$ и покажем, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$. Итак, $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i+1}) - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{2} \geq 0$. Значит $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$.

Пусть вещественное число x — случайно по Шнорру, а вещественное число u — неслучайно по Шнорру. Это значит, что для любого теста Шнорра $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (c_i, d_i)$ выполняется $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$ и мера множества $V_i = (c_i, d_i)$ равномерно вычислима. Так как, по предположению, $x + u$ неслучайно, мера множества $R_i = (r_i, s_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(R_i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере R_i, где $x + u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap^{\infty}(r_i, s_i)$. По лемме 1 существуют тесты Шнорра

$V_i' = (c_i', d_i')$ и $R_i' = (r_i', s_i')$, где c_i', d_i', r_i', s_i' — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i' - d_i', s_i' - c_i')$, где $r_i' - d_i', s_i' - c_i'$ — равномерно вычислимые концы по i, так как разность вычислимых концов также вычислима. Однако, условие $\lambda((r_i' - d_i', s_i' - c_i')) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((r_i' - d_i', s_i' - c_i'))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((r_{i_j}' - d_{i_j}', s_{i_j}' - c_{i_j}')) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (r_j' - d_j', s_j' - c_j')$, так же образует тест Шнорра. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $x + u$ — случайно по Шнорру.

Пусть вещественное число x — слабо 2-случайно, а вещественное число u — слабо 2-неслучайно. По предположению $x + u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ неслучайно. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i - d_i, s_i - c_i)$. Мера множества $(r_i - d_i, s_i - c_i)$ не превосходит меры множеств (r_i, s_i) и (c_i, d_i), и так как $(R_i)_{i\in\omega}$ и $(V_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тесты, стремится к нулю. Следовательно, $(R_i')_{i\in\omega}$, где $R_i' = (r_i - d_i, s_i - c_i)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $x + u$ — слабо 2-случайно.

г) Пусть вещественные числа u и z — МЛ-неслучайны. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, и для любого МЛ-теста $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (c_i, d_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Покажем, что и их сумма $u + z$ — неслучайна , то есть существует МЛ-тест, который она не проходит. Тогда $u+z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i+d_i, b_i+c_i)$. Мера множества (a_i+d_i, b_i+c_i) не превосходит меры множеств (a_i, b_i) и (c_i, d_i), и так как $(U_i)_{i\in\omega}$ и $(V_i)_{i\in\omega}$ — МЛ-тесты, то не превосходит 2^{-i}. Следовательно, $(R_i)_{i\in\omega}$, где $R_i = (a_i + d_i, b_i + c_i)$ так же образует МЛ-тест. Причем $u + z$ не проходят этот тест. Следовательно, $u + z$ — МЛ-неслучайно.

Пусть вещественные числа u и z — неслучайны по Шнорру. Это значит, что меры множеств $U_i = (a_i, b_i)$ и $V_i = (c_i, d_i)$ равномерно вычислимы. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i)$ и мере V_i, где $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap^{\infty}(c_i, d_i)$. По лемме 1 существуют тесты Шнорра $U_i' = (a_i', b_i')$ и $V_i' = (c_i', d_i')$, где a_i', b_i', c_i', d_i' — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $u+z \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i'+d_i', b_i'+c_i')$, где $a_i'+d_i', b_i'+c_i'$ — равномерно вычислимые концы по i, так как сумма вычислимых концов также вычислима. Однако, условие $\lambda((a_i'+d_i', b_i'+c_i')) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((a_i' + d_i', b_i' + c_i'))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((a_{i_j}' + d_{i_j}', b_{i_j}' + c_{i_j}')) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (a_j' + d_j', b_j' + c_j')$, так же образует тест Шнорра. Причем $u + z$ не проходит этот тест. Значит $u + z$ — неслучайно по Шнорру.

Пусть вещественные числа u и z — слабо 2-неслучайны. Тогда $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ и $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Покажем, что и число $u+z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i+d_i, b_i+c_i)$ неслучайно. Мера множества $(a_i + d_i, b_i + c_i)$ не превосходит меры множеств (a_i, b_i) и (c_i, d_i), и так как $(U_i)_{i\in\omega}$ и $(V_i)_{i\in\omega}$ — обобщенные МЛ-тесты, стремится к нулю. Следовательно, $(R_i)_{i\in\omega}$, где $R_i = (a_i + d_i, b_i + c_i)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем $u + z$ не проходит этот тест. Значит $u + z$ — слабо 2-неслучайно.

д) По условию вещественные числа x и y — случайны по одной из рассматриваемых случайностей. Возьмем $y = -x$. Тогда сумма $x + y = 0$ будет

неслучайной по той же случайности, так как для любого рационального числа можно подобрать соответсвующий тест, который оно не проходит.

Теперь рассмотрим операцию умножения вещественных чисел и обратную к ней.

Предложение 2. Пусть x, y — случайные вещественные числа и z, u — неслучайные по одной из предложенных случайностей. Тогда соответственно:

а) $1/x$ — случайно;

б) $1/z$ — неслучайно;

в) $x \cdot z$ — неслучайно;

г) $u \cdot z$ — неслучайно;

Существуют x, y — случайные вещественные числа и z, u — неслучайные, что:

д) $x \cdot y$ — неслучайно;

***Доказательство*:**

а) Пусть вещественное число x — МЛ-случайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Для доказательства случайности числа $1/x$, предположим,что оно неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. А именно, пусть $1/x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$, для некоторого теста $(R_i)_{i\in\omega}$. Можно считать, что r_i, s_i одного и того же знака, что и x, и $|r_i|, |s_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого t. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(1/s_i, 1/r_i)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((1/s_i, 1/r_i)) = 1/r_i - 1/s_i = \frac{(s_i - r_i)}{s_i r_i} \leq \frac{2^{-i}}{s_i r_i} \leq \frac{2^{-i}}{\frac{1}{2^t}\cdot\frac{1}{2^t}} \leq 2^{-i+2t}$. Рассмотрим тест $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (1/s_{i+2t}, 1/r_{i+2t})$. Тогда $\lambda(R'_i) \leq 2^{-(i+2t)+2t} = 2^{-i}$. Так как $\bigcap R'_i \supset \bigcap R_i$, то, следовательно, $x \in \bigcap R'_i$. А значит x не проходит этот МЛ-тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $1/x$ — МЛ-случайно.

Пусть вещественное число x — случайно по Шнорру. Так как, по предположению, $1/x$ неслучайно, мера множества $R_i = (r_i, s_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере R_i, где $1/x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap^{\infty}(r_i, s_i)$. По лемме 1 существует тест Шнорра $R'_i = (r'_i, s'_i)$, где r'_i, s'_i — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(1/s'_i, 1/r'_i)$, где $1/s'_i, 1/r'_i$ — равномерно вычислимые концы по i, так как обратное по умножению вычислимое число также вычислимо. Однако, условие $\lambda((1/s'_i, 1/r'_i)) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((1/s'_i, 1/r'_i))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((1/s'_{i_j}, 1/r'_{i_j})) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (1/s'_j, 1/r'_j)$, так же образует тест Шнорра. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $1/x$ — случайно по Шнорру.

Пусть вещественное число x — слабо 2-случайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(1/s_i, 1/r_i)$ стремится к нулю. По предположению $1/x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ неслучайно. А r_i, s_i одного и того же знака, что и x, и $|r_i|, |s_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого t. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(1/s_i, 1/r_i)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((1/s_i, 1/r_i)) = 1/r_i - 1/s_i = \frac{(s_i - r_i)}{s_i r_i} \leq \frac{(s_i - r_i)}{\frac{1}{2^t}\cdot\frac{1}{2^t}} = 2^{2t} \cdot (s_i - r_i)$. Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, то $(s_i - r_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $2^{2t} \cdot (s_i - r_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (1/s_i, 1/r_i)$ так

же образует обобщенный МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $1/x$ — слабо 2-случайно.

б) Пусть вещественное число z — МЛ-неслучайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Можно считать, что a_i, b_i одного и того же знака, что и z, и $|a_i|, |b_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого t. Покажем, что и число $1/z$ — неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. Тогда $1/z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(1/b_i, 1/a_i)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((1/b_i, 1/a_i)) = 1/a_i - b_i = \frac{(b_i - a_i)}{a_i b_i} \leq \frac{2^{-i}}{a_i b_i} \leq \frac{2^{-i}}{\frac{1}{2^t}\cdot\frac{1}{2^t}} \leq 2^{-i+2t}$. Рассмотрим тест $(V_i')_{i\in\omega}$, где $V_i' = (1/b_{i+2t}, 1/a_{i+2t})$. Тогда $\lambda(V_i') \leq 2^{-(i+2t)+2t} = 2^{-i}$. Так как $\bigcap V_i' \supset \bigcap V_i$, то, следовательно, $1/z \in \bigcap V_i'$. А значит $1/z$ не проходит этот тест. Следовательно, $1/z$ — МЛ-неслучайно.

Пусть вещественное число z — неслучайно по Шнорру. Это значит, что мера множества $U_i = (a_i, b_i)$ равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i)$. По лемме 1 существует тест Шнорра $U_i' = (a_i', b_i')$, где a_i', b_i' — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $1/z \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(1/b_i', 1/a_i')$, где $1/b_i', 1/a_i'$ — равномерно вычислимые концы по i, так как обратное по умножению вычислимое число также вычислимо. Однако, условие $\lambda((1/b_i', 1/a_i')) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((1/b_i', 1/a_i'))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((1/b_{i_j}', 1/a_{i_j}')) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (1/b_j', 1/a_j')$, так же образует тест Шнорра. Причем $1/z$ не проходит этот тест. Значит $1/z$ — неслучайно по Шнорру.

Пусть вещественное число z — слабо 2-неслучайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(1/b_i, 1/a_i)$ стремится к нулю. По условию, $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. А a_i, b_i одного и того же знака, что и z, и $|a_i|, |b_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого t. Тогда $1/z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(1/b_i, 1/a_i)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((1/b_i, 1/a_i)) = 1/a_i - 1/b_i = \frac{(b_i - a_i)}{b_i a_i} \leq \frac{(b_i - a_i)}{\frac{1}{2^t}\cdot\frac{1}{2^t}} = 2^{2t}\cdot(b_i - a_i)$. Так как $(U_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, то $(b_i - a_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $2^{2t}\cdot(b_i - a_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (1/s_i, 1/r_i)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем $1/z$ не проходит этот тест. Значит $1/x$ — слабо 2-случайно.

в) Пусть вещественное число x — МЛ-случайно, а вещественное число z — МЛ-неслучайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, и для любого МЛ-теста $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (c_i, d_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Можно считать, что c_i, d_i одного и того же знака, что и z, и $|c_i|, |d_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого t. Для доказательства случайности произведения чисел $x \cdot z$, предположим,что оно неслучайно. А именно, пусть $x \cdot z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ для некоторого теста $(R_i)_{i\in\omega}$. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\frac{r_i}{d_i}, \frac{s_i}{c_i})$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((\frac{r_i}{d_i}, \frac{s_i}{c_i})) = \frac{s_i}{c_i} - \frac{r_i}{d_i} = \frac{(s_i d_i - r_i c_i)}{c_i d_i} \leq \frac{2^{-i}}{c_i d_i} \leq \frac{2^{-i}}{\frac{1}{2^t}\cdot\frac{1}{2^t}} \leq 2^{-i+2t}$. Рассмотрим тест $(S_i')_{i\in\omega}$, где $S_i' = (\frac{r_{i+2t}}{d_{i+2t}}, \frac{s_{i+2t}}{c_{i+2t}})$. Тогда $\lambda(S_i') \leq 2^{-(i+2t)+2t} = 2^{-i}$. Так как $\bigcap S_i' \supset \bigcap S_i$, то, следовательно, $x \in \bigcap S_i'$. А значит x не проходит этот МЛ-тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $x \cdot z$ — МЛ-случайно.

Пусть вещественное число x — случайно по Шнорру, а вещественное число z

— неслучайно по Шнорру. Это значит, что для любого теста Шнорра $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (c_i, d_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$ и мера множества $V_i = (c_i, d_i)$ равномерно вычислима. Так как, по предположению, $x{\cdot}z$ неслучайно, мера множества $R_i = (r_i, s_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере R_i, где $x \cdot z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap^{\infty}(r_i, s_i)$. По лемме 1 существуют тесты Шнорра $V_i' = (c_i', d_i')$ и $R_i' = (r_i', s_i')$, где c_i', d_i', r_i', s_i' — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\frac{r_i'}{d_i'}, \frac{s_i'}{c_i'})$, где $\frac{r_i'}{d_i'}, \frac{s_i'}{c_i'}$ — равномерно вычислимые концы по i, так как частное вычислимых концов также вычислимо. Однако, условие $\lambda((\frac{r_i'}{d_i'}, \frac{s_i'}{c_i'})) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((\frac{r_i'}{d_i'}, \frac{s_i'}{c_i'}))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((\frac{r_{i_j}'}{d_{i_j}'}, \frac{s_{i_j}'}{c_{i_j}'})) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (\frac{r_j'}{d_j'}, \frac{s_j'}{c_j'})$, так же образует тест Шнорра. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $x \cdot z$ — случайно по Шнорру.

Пусть вещественное число x — слабо 2-случайно, а вещественное число u — слабо 2-неслучайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(\frac{r_i}{d_i}, \frac{s_i}{c_i})$ стремится к нулю. По условию, $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. А a_i, b_i одного и того же знака, что и z, и $|a_i|, |b_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого t. Так же, по предположению, $x \cdot z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ неслучайно. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} S_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\frac{r_i}{d_i}, \frac{s_i}{c_i})$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((\frac{r_i}{d_i}, \frac{s_i}{c_i})) = \frac{s_i}{c_i} - \frac{r_i}{d_i} = \frac{(s_i d_i - r_i c_i)}{c_i d_i} \leq \frac{(s_i d_i - r_i c_i)}{\frac{1}{2^t}\cdot\frac{1}{2^t}} \leq 2^{2t} \cdot (s_i d_i - r_i c_i)$. Так как $(U_i)_{i\in\omega}$ и $(R_i)_{i\in\omega}$ — обобщенные МЛ-тесты, то $(s_i d_i - r_i c_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $2^{2t} \cdot (s_i d_i - r_i c_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(S_i)_{i\in\omega}$, где $S_i = (\frac{r_i}{d_i}, \frac{s_i}{c_i})$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $x \cdot z$ — слабо 2-случайно.

г) Пусть вещественные числа u и z — МЛ-неслучайны. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, и для любого МЛ-теста $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (c_i, d_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Покажем, что и их произведение $u \cdot z$ — неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. Тогда $u \cdot z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i c_i, b_i d_i)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((a_i c_i, b_i d_i)) = b_i d_i - a_i c_i = b_i d_i - b_i c_i + b_i c_i - a_i c_i = b_i(d_i - c_i) + c_i(b_i - a_i) \leq b_i 2^{-i} + c_i 2^{-i} = 2^{-i}(b_i + c_i) \leq 2^{-i}(b_0 + c_0) \leq 2^{-i} \cdot q$. Рассмотрим тест $(R_i')_{i\in\omega}$, где $R_i' = (a_{i+1+[\log_2 q]} c_{i+1+[\log_2 q]}, b_{i+1+[\log_2 q]} d_{i+1+[\log_2 q]})$. Тогда $\lambda(R_i') \leq 2^{-(i+1+[\log_2 q])} q = 2^{-i}$. Так как $\bigcap R_i' \supset \bigcap R_i$, то, следовательно, $u \cdot z \in \bigcap R_i'$. А значит $u \cdot z$ не проходит этот тест. Следовательно, $u \cdot z$ — неслучайно.

Пусть вещественные числа u и z — неслучайны по Шнорру. Это значит, что меры множеств $U_i = (a_i, b_i)$ и $V_i = (c_i, d_i)$ равномерно вычислимы. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i)$ и мере V_i, где $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap^{\infty}(c_i, d_i)$. По лемме 1 существуют тесты Шнорра $U_i' = (a_i', b_i')$ и $V_i' = (c_i', d_i')$, где a_i', b_i', c_i', d_i' — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $u \cdot z \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i' c_i', b_i' d_i')$, где $a_i' c_i', b_i' d_i'$ — равномерно вычислимые концы по i, так как произведение вычислимых концов также вычислимо. Однако, условие $\lambda((a_i' c_i', b_i' d_i')) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((a_i' c_i', b_i' d_i'))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность

индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((a'_{i_j}c'_{i_j}, b'_{i_j}d'_{i_j})) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (a'_j c'_j, b'_j d'_j)$, так же образует тест Шнорра. Причем $u \cdot z$ не проходит этот тест. Значит $u \cdot z$ — неслучайно по Шнорру.

Пусть вещественные числа u и z — слабо 2-неслучайны. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(a_i c_i, b_i d_i)$ стремится к нулю. По условию, $u \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ и $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Тогда $u \cdot z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i c_i, b_i d_i)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((a_i c_i, b_i d_i)) = b_i d_i - a_i c_i = b_i d_i - b_i c_i + b_i c_i - a_i c_i = b_i(d_i - c_i) + c_i(b_i - a_i)$. Так как $(U_i)_{i\in\omega}$ и $(V_i)_{i\in\omega}$ — обобщенные МЛ-тесты, то $(d_i - c_i)$ и $(b_i - a_i)$ стремятся к нулю, а значит и сумма $b_i(d_i - c_i) + c_i(b_i - a_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(R_i)_{i\in\omega}$, где $R_i = (a_i c_i, b_i d_i)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем $u \cdot z$ не проходит этот тест. Значит $u \cdot z$ — слабо 2-неслучайно.

д) По условию вещественные числа x и y — случайны по одной из рассматриваемых случайностей. Возьмем $y = 1/x$. Тогда произведение $x \cdot y = 1$ будет неслучайным по той же случайности, так как для любого рационального числа можно подобрать соответсвующий тест, который оно не проходит.

Также рассмотрим операции возведения в степень и обратную к ней.

Предложение 3. Пусть x, y — случайные вещественные числа и z, u — неслучайные по одной из предложенных случайностей. Тогда соответственно:

а) x^2 — случайно;

б) z^2 — неслучайно;

в) $\sqrt{x}$ — случайно;

г) $\sqrt{z}$ — неслучайно;

***Доказательство*:**

а) Пусть вещественное число x — МЛ-случайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Для доказательства случайности числа x^2, предположим,что оно неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. А именно, пусть $x^2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$, для некоторого теста $(R_i)_{i\in\omega}$. Можно считать, что r_i, s_i одного и того же знака, что и x, и $|r_i|, |s_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого четного t. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\sqrt{r_i}, \sqrt{s_i})$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((\sqrt{r_i}, \sqrt{s_i})) = \sqrt{s_i} - \sqrt{r_i} \leq \frac{2^{-i}}{\sqrt{s_i}+\sqrt{r_i}} \leq \frac{2^{-i}}{\frac{1}{\sqrt{2^t}}+\frac{1}{\sqrt{2^t}}} \leq 2^{-i-1+\frac{t}{2}}$. Рассмотрим тест $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (1/s_{i-1+\frac{t}{2}}, 1/r_{i-1+\frac{t}{2}})$. Тогда $\lambda(R'_i) \leq 2^{-(i-1+\frac{t}{2})-1+\frac{t}{2}} = 2^{-i}$. Так как $\bigcap R'_i \supset \bigcap R_i$, то, следовательно, $x \in \bigcap R'_i$. А значит x не проходит этот МЛ-тест, что противоречит случайности x. Следовательно, x^2 — МЛ-случайно.

Пусть вещественное число x — случайно по Шнорру. Так как, по предположению, x^2 неслучайно, мера множества $R_i = (r_i, s_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере R_i, где $x^2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap^{\infty}(r_i, s_i)$. По лемме 1 существует тест Шнорра $R'_i = (r'_i, s'_i)$, где r'_i, s'_i — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\sqrt{r'_i}, \sqrt{s'_i})$, где $\sqrt{r'_i}, \sqrt{s'_i}$ — равномерно вычислимые концы по i, так как извлеченное из квадратного корня вычислимое число также вычислимо. Однако, условие $\lambda((\sqrt{r'_i}, \sqrt{s'_i})) \leq 2^{-i}$

не обязательно выполняется, но $\lambda((\sqrt{r'_i}, \sqrt{s'_i}))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((\sqrt{r'_{i_j}}, \sqrt{s'_{i_j}})) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (\sqrt{r'_j}, \sqrt{s'_j})$, так же образует тест Шнорра. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, x^2 — случайно по Шнорру.

Пусть вещественное число x — слабо 2-случайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(\sqrt{r_i}, \sqrt{s_i})$ стремится к нулю. По предположению $x^2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ неслучайно. А r_i, s_i одного и того же знака, что и x, и $|r_i|, |s_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого четного t. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\sqrt{r_i}, \sqrt{s_i})$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((\sqrt{r_i}, \sqrt{s_i})) = \sqrt{s_i} - \sqrt{r_i} \leq \frac{s_i - r_i}{\sqrt{s_i}+\sqrt{r_i}} \leq \frac{s_i - r_i}{\frac{1}{\sqrt{2^t}}+\frac{1}{\sqrt{2^t}}} \leq 2^{\frac{t}{2}-1} \cdot (s_i - r_i)$. Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, то $(s_i - r_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $2^{\frac{t}{2}-1} \cdot (s_i - r_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(R'_i)_{i\in\omega}$, где $R'_i = (\sqrt{r_i}, \sqrt{s_i})$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, x^2 — слабо 2-случайно.

б) Пусть вещественное число z — МЛ-неслучайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Можно считать, что a_i, b_i одного и того же знака, что и z. Покажем, что и число z^2 — неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. Тогда $z^2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i^2, b_i^2)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((a_i^2, b_i^2)) = b_i^2 - a_i^2 \leq 2^{-i} \cdot (b_i + a_i) \leq 2^{-i} \cdot z \leq 2^{-i} \cdot q$. Рассмотрим тест $(V'_i)_{i\in\omega}$, где $V'_i = (a^2_{i+1+[log_2 q]}, b^2_{i+1+[\log_2 q]})$. Тогда $\lambda(V'_i) \leq 2^{-(i+1+[\log_2 q])} \cdot q = 2^{-i}$. Так как $\bigcap V'_i \supset \bigcap V_i$, то, следовательно, $z^2 \in \bigcap V'_i$. А значит z^2 не проходит этот тест. Следовательно, z^2 — МЛ-неслучайно.

Пусть вещественное число z — неслучайно по Шнорру. Это значит, что мера множества $U_i = (a_i, b_i)$ равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i)$. По лемме 1 существует тест Шнорра $U'_i = (c_i, d_i)$, где c_i, d_i — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $z^2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i^2, d_i^2)$, где c_i^2, d_i^2 — равномерно вычислимые концы по i, так как возведенное в квадрат вычислимое число также вычислимо. Однако, условие $\lambda((c_i^2, d_i^2)) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((c_i^2, d_i^2))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((c_{i_j}^2, d_{i_j}^2)) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (c_j^2, d_j^2)$, так же образует тест Шнорра. Причем z^2 не проходит этот тест. Значит z^2 — неслучайно по Шнорру.

Пусть вещественное число z — слабо 2-неслучайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества (a_i^2, b_i^2) стремится к нулю. По условию, $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. А a_i, b_i одного и того же знака, что и z. Тогда $z^2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i^2, b_i^2)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((a_i^2, b_i^2)) = b_i^2 - a_i^2 \leq (b_i - a_i)(b_i + a_i)$. Так как $(U_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, то $(b_i - a_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $(b_i - a_i)(b_i + a_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (a_i^2, b_i^2)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем z^2 не проходит этот тест. Значит z^2 — слабо 2-случайно.

в) Пусть вещественное число x — МЛ-случайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Для

доказательства случайности числа $\sqrt{x}$, предположим,что оно неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. А именно, пусть $\sqrt{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$, для некоторого теста $(R_i)_{i\in\omega}$. Можно считать, что r_i, s_i одного и того же знака, что и x. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i^2, s_i^2)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((r_i^2, s_i^2)) = s_i^2 - r_i^2 \leq 2^{-i} \cdot (s_i + r_i) \leq 2^{-i} \cdot z \leq 2^{-i} \cdot q$. Рассмотрим тест $(R_i')_{i\in\omega}$, где $R_i' = (r^2_{i+1+[\log_2 q]}, s^2_{i+1+[\log_2 q]})$. Тогда $\lambda(R_i') \leq 2^{-(i+1+[\log_2 q])} \cdot q = 2^{-i}$. Так как $\bigcap R_i' \supset \bigcap R_i$, то, следовательно, $x \in \bigcap R_i'$. А значит x не проходит этот МЛ-тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $\sqrt{x}$ — МЛ-случайно.

Пусть вещественное число x — случайно по Шнорру. Так как, по предположению, $\sqrt{x}$ неслучайно, мера множества $R_i = (r_i, s_i)$ равномерно вычислима. Это значит, что существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере R_i, где $\sqrt{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap^{\infty}(r_i, s_i)$. По лемме 1 существует тест Шнорра $R_i' = (c_i, d_i)$, где c_i, d_i — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i^2, d_i^2)$, где c_i^2, d_i^2 — равномерно вычислимые концы по i, так как возведенное в квадрат вычислимое число также вычислимо. Однако, условие $\lambda((c_i^2, d_i^2)) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((c_i^2, d_i^2))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((c_{i_j}^2, d_{i_j}^2)) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (c_j^2, d_j^2)$, так же образует тест Шнорра. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $\sqrt{x}$ — случайно по Шнорру.

Пусть вещественное число x — слабо 2-случайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества (r_i^2, s_i^2) стремится к нулю. По предположению $\sqrt{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} R_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i, s_i)$ неслучайно. А r_i, s_i одного и того же знака, что и x. Тогда $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(r_i^2, s_i^2)$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((r_i^2, s_i^2)) = s_i^2 - r_i^2 \leq (s_i - r_i)(s_i + r_i)$. Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, то $(s_i - r_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $(s_i - r_i)(s_i + r_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(R_i')_{i\in\omega}$, где $R_i' = (r_i^2, s_i^2)$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем x не проходит этот тест, что противоречит случайности x. Следовательно, $\sqrt{x}$ — слабо 2-случайно.

г) Пусть вещественное число z — МЛ-неслучайно. Это значит, что для любого МЛ-теста $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$ выполняется $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Можно считать, что a_i, b_i одного и того же знака, что и z, и $|a_i|, |b_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого четного t. Покажем, что и число $\sqrt{z}$ — неслучайно, то есть существует МЛ-тест, который оно не проходит. Тогда $\sqrt{z} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i})$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i})) = \sqrt{b_i} - \sqrt{a_i} \leq \frac{2^{-i}}{\sqrt{b_i}+\sqrt{a_i}} \leq \frac{2^{-i}}{\frac{1}{\sqrt{2^t}}+\frac{1}{\sqrt{2^t}}} \leq 2^{-i-1+\frac{t}{2}}$. Рассмотрим тест $(V_i')_{i\in\omega}$, где $V_i' = (1/b_{i-1+\frac{t}{2}}, 1/a_{i-1+\frac{t}{2}})$. Тогда $\lambda(V_i') \leq 2^{-(i-1+\frac{t}{2})-1+\frac{t}{2}} = 2^{-i}$. Так как $\bigcap V_i' \supset \bigcap V_i$, то, следовательно, $\sqrt{z} \in \bigcap V_i'$. А значит $\sqrt{z}$ не проходит этот тест. Следовательно, $\sqrt{z}$ — МЛ-неслучайно.

Пусть вещественное число z — неслучайно по Шнорру. Это значит, что мера множества $U_i = (a_i, b_i)$ равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i)$. По лемме 1 существует тест Шнорра $U_i' = (a_i', b_i')$, где a_i', b_i' — равномерно вычислимые концы по i. Тогда $\sqrt{z} \in \bigcap_{i=1}^{\infty}(\sqrt{a_i'}, \sqrt{b_i'})$, где $sqrta_i', \sqrt{b_i'}$ — равномерно вычислимые концы по i, так как извлеченное из квадратного корня

вычислимое число также вычислимо. Однако, условие $\lambda((\sqrt{a'_i}, \sqrt{b'_i})) \leq 2^{-i}$ не обязательно выполняется, но $\lambda((\sqrt{a'_i}, \sqrt{b'_i}))$ стремится к нулю. Поэтому можно выделить последовательность индексов $i_1, i_2, i_3...$ такую, что $\lambda((\sqrt{a'_{i_j}}, \sqrt{b'_{i_j}})) \leq 2^{-j}$. Следовательно, $(S_j)_{j\in\omega}$, где $S_j = (\sqrt{a'_j}, \sqrt{b'_j})$, так же образует тест Шнорра. Причем $\sqrt{z}$ не проходит этот тест. Значит $\sqrt{z}$ — неслучайно по Шнорру.

Пусть вещественное число z — слабо 2-неслучайно. В этом случае необходимо доказать, что мера множества $(\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i})$ стремится к нулю. По условию, $z \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. А a_i, b_i одного и того же знака, что и z, и $|a_i|, |b_i| \geq \frac{1}{2^t}$ для некоторого четного t. Тогда $\sqrt{z} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i})$. Выполняются следующие соотношения: $\lambda((\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i})) = \sqrt{b_i} - \sqrt{a_i} \leq \frac{b_i - a_i}{\sqrt{b_i} + \sqrt{a_i}} \leq \frac{b_i - a_i}{\frac{1}{\sqrt{2^t}} + \frac{1}{\sqrt{2^t}}} \leq 2^{\frac{t}{2}-1} \cdot (b_i - a_i)$. Так как $(U_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ-тест, то $(b_i - a_i)$ стремится к нулю, а значит и произведение $2^{\frac{t}{2}-1} \cdot (b_i - a_i)$ тоже стремится к нулю. Следовательно, $(V'_i)_{i\in\omega}$, где $V'_i = (\sqrt{a_i}, \sqrt{b_i})$ так же образует обобщенный МЛ-тест. Причем $\sqrt{z}$ не проходит этот тест. Значит $\sqrt{z}$ — слабо 2-случайно.

3 Случайность в $\mathbb{R}^2$

Итак, вещественное число x является случайным, если x проходит каждый тест, то есть $x \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$. В пространстве $\mathbb{R}$ мы выбираем равномерно вычислимо перечислимую последовательность открытых множеств $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$. Теперь рассмотрим определение случайности вещественных чисел на пространстве $\mathbb{R}^2$. Базовые множества для тестов можно выбирать по разному. Рассмотрим следующие естественные варианты.

Определение 12. *Пусть $(U_i)_{i\in\omega}$ равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств, таких что $\forall i \in \omega$ выполняется $\lambda U_i \leq 2^{-i}$.*

1) *Последовательность $(U_i)_{i\in\omega}$ называется МЛ$_1$-тестом, если $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$;*

2) *Последовательность $(U_i)_{i\in\omega}$ называется МЛ$_2$-тестом, если $U_i = B_{r_i}(w_i)$, где B — круг с центром w_i и радиуса r_i;*

3) *Последовательность $(U_i)_{i\in\omega}$ называется МЛ$_3$-тестом, если $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$;*

Используя таким образом определенные тесты, можно дать следующие определения МЛ-случайности в $\mathbb{R}^2$.

Определение 4.1. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является МЛ$_1$-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый МЛ$_1$-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Определение 4.2. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является МЛ$_2$-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый МЛ$_2$-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$, где B — круг с центром w_i и радиуса r_i.

Определение 4.3. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является МЛ$_3$-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый МЛ$_3$-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Кроме этого, возможно определить случайность $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ опираясь на понятие МЛ-случайности в $\mathbb{R}$. Возможны два варианта.

Определение 13. 1) *Точка $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ является МЛ$_4$-случайной, если x_1 и x_2 — МЛ-случайные вещественные числа;*

2) *Точка $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ является МЛ$_5$-случайной, если x_1 или x_2 — МЛ-случайные вещественные числа;*

Аналогично определим случайность по Шнорру на пространстве $\mathbb{R}^2$.

Определение 14. *Пусть $(U_i)_{i\in\omega}$ равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств , таких что $\forall i \in \omega$ выполняется $\lambda U_i \leq 2^{-i}$, где λU_i — равномерно вычислимая мера.*

1) *Последовательность $(U_i)_{i\in\omega}$ называется S_1-тестом, если $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$;*

2) *Последовательность $(U_i)_{i\in\omega}$ называется S_2-тестом, если $U_i = B_{r_i}(w_i)$, где B — круг с центром w_i и радиуса r_i;*

3) *Последовательность* $(U_i)_{i\in\omega}$ *называется* S_3*-тестом, если* $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, *где* $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$;

Используя таким образом определенные тесты, можно дать следующие определения случайности по Шнорру в $\mathbb{R}^2$.

Определение 4.1. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является S_1-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый S_1-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Определение 4.2. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является S_2-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый S_2-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$, где B — круг с центром w_i и радиуса r_i.

Определение 4.3. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является S_3-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый S_3-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Кроме этого, возможно определить случайность $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ опираясь на понятие случайности по Шнорру в $\mathbb{R}$. Возможны два варианта.

Определение 15. 1) *Точка* $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *является* S_4*-случайной, если* x_1 *и* x_2 *— случайные по Шнорру вещественные числа;*

2) *Точка* $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ *является* S_5*-случайной, если* x_1 *или* x_2 *— случайные по Шнорру вещественные числа;*

Аналогично определим обобщенную МЛ-случайность на пространстве $\mathbb{R}^2$.

Определение 16. *Пусть* $(U_i)_{i\in\omega}$ *равномерно вычислимо перечислимая последовательность открытых множеств, таких что* $\forall i \in \omega$ *выполняется* $\lambda U_i \to 0$.

1) *Последовательность* $(U_i)_{i\in\omega}$ *называется обобщенным МЛ*$_1$*-тестом, если* $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$;

2) *Последовательность* $(U_i)_{i\in\omega}$ *называется обобщенным МЛ*$_2$*-тестом, если* $U_i = B_{r_i}(w_i)$, *где* B *— круг с центром* w_i *и радиуса* r_i;

3) *Последовательность* $(U_i)_{i\in\omega}$ *называется обобщенным МЛ*$_3$*-тестом, если* $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, *где* $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$;

Используя таким образом определенные тесты, можно дать следующие определения обобщенной МЛ-случайности в $\mathbb{R}^2$.

Определение 4.1. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является обобщенно МЛ$_1$-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый обобщенный МЛ$_1$-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Определение 4.2. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является обобщенно МЛ$_2$-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый обобщенный МЛ$_2$-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$, где B - круг с центром w_i и радиуса r_i.

Определение 4.3. $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ является обобщенно МЛ$_3$-случайным, если $\overline{x}$ проходит каждый обобщенный МЛ$_3$-тест, то есть $\overline{x} \notin \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, $a_i, b_i \in \mathbb{Q}$.

Кроме этого, возможно определить случайность $\overline{x} \in \mathbb{R}^2$ опираясь на понятие обобщенной МЛ-случайности в $\mathbb{R}$. Возможны два варианта.

Определение 17. 1) *Точка $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ является обобщенно МЛ$_4$-случайной, если x_1 и x_2 — обобщенно МЛ-случайные вещественные числа;*

2) *Точка $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ является обобщенно МЛ$_5$-случайной, если x_1 или x_2 — обобщенно МЛ-случайные вещественные числа;*

Проверим, какие соотношения есть между приведенными определениями. Очевидно, что 5.1 и 5.2 не эквивалентны.

***Теорема 1*:** Пусть $\overline{x} = (x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\overline{x}$ (обобщенно) МЛ$_2$-случайно $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ (обобщенно) МЛ$_3$-случайно.

***Доказательство*:**

"$\Rightarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1,\, x_2)$ не проходит МЛ$_2$−тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$. Это значит, что $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(B_{r_i}(w_i))$. Мера этого множества $\mu(U_i) = \pi r_i^2 \leq 2^{-i}$. Отсюда получается неравенство $r_i \leq \sqrt{\frac{2^{-i}}{\pi}} \leq \sqrt{2^{-i+1}} = 2^{\frac{-i+1}{2}}$. Возьмем МЛ$_3$−тест $\widetilde{U}_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i) = 2r_i$. Покажем, что $\overline{x}$ не проходит МЛ$_3$−тест, то есть $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \widetilde{U}_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i) = 2r_i$. Мера множества $\mu(\widetilde{U}_i) = 4r_i^2 \leq 4(2^{\frac{-i+1}{2}})^2 = 2^2 \cdot 2^{-i+1} = 2^{-i+3}$. Получим, что меры множеств $B_{r_i}(w_i)$ и $V_i = \widetilde{U}_{i+3}$ совпадают, и, так как $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$, является МЛ$_2$−тестом, не превосходят 2^{-i}. Тогда $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = \widetilde{U}_{i+3}$, является МЛ$_3$−тестом, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по МЛ$_3$.

Пусть $\overline{x} = (x_1,\, x_2)$ не проходит обобщенный МЛ$_2$−тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$. Необходимо доказать, что мера множества $(a_i, b_i)\times(c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i) = 2r_i$ стремится к нулю. По условию, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(B_{r_i}(w_i))$. Мера этого множества $\mu(U_i) = \pi r_i^2$ стремится к нулю. Возьмем тест $\widetilde{U}_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i) = 2r_i$. Мера множества $\mu(\widetilde{U}_i) = 4r_i^2$. Так как $(U_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ$_2$ тест, то πr_i^2 стремится к нулю, а значит и $4r_i^2$ стремится к нулю. Следовательно, $\widetilde{U}_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i) = 2r_i$ — обобщенный МЛ$_3$−тест, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ обобщенно неслучаен по МЛ$_3$.

"$\Leftarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1,\, x_2)$ не проходит МЛ$_3$−тест $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Это значит, что $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\times(c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Мера этого множества $\mu(V_i) = (b_i - a_i)^2 \leq 2^{-i}$. Возьмем МЛ$_2$−тест $\widetilde{V}_i = (B_{r_i}(w_i))$, где $r_i = (b_i - a_i)$. Покажем, что $\overline{x}$ не проходит МЛ$_2$−тест, то есть $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \widetilde{V}_i = (B_{r_i}(w_i))$. Мера множества $\mu(\widetilde{U}_i) = \pi r_i^2 = \pi(b_i - a_i)^2 \leq \pi \cdot 2^{-i} = \pi \cdot 2^{-i-1} \leq 2^{-i+2}$. Получим, что меры множеств $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, и $U_i = \widetilde{U}_{i+2}$ совпадают, и, так как $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$ является МЛ$_3$−тестом, не превосходят 2^{-i}. Тогда $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = \widetilde{U}_{i+1}$, является МЛ$_2$−тестом, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по МЛ$_2$.

Пусть $\overline{x} = (x_1,\, x_2)$ не проходит обобщенный МЛ$_3$−тест $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Необходимо доказать, что мера множества $(B_{r_i}(w_i))$, где $r_i = (b_i - a_i)$ стремится к нулю. По условию, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Мера этого множества $\mu(V_i) = (b_i - a_i)^2$ стремится к нулю. Возьмем тест $\widetilde{V}_i = (B_{r_i}(w_i))$, где $r_i = (b_i - a_i)$. Мера множества $\mu(\widetilde{V}_i) = \pi r_i^2 = \pi(b_i - a_i)^2$. Так как $(V_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ$_3$ тест, то $(b_i - a_i)^2$ стремится к нулю, а значит

и $\pi(b_i - a_i)^2$ стремится к нулю. Следовательно, $\widetilde{V_i} = (B_{r_i}(w_i))$, где $r_i = (b_i - a_i)$ — обобщенный МЛ$_2$−тест, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ обобщенно неслучаен по МЛ$_2$.

***Теорема 2*:** Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\overline{x}$ (обобщенно) МЛ$_3$-случайно $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ (обобщенно) МЛ$_5$-случайно.

***Доказательство*:**

"$\Rightarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит МЛ$_3$−тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Это значит, что $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Мера этого множества $\mu(U_i) = (b_i - a_i)^2 \leq 2^{-i}$. Возьмем два множества: $U_i^1 = (a_i, b_i)$ и $U_i^2 = (c_i, d_i)$. Покажем, что $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^1$, а $x_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^2$. Возьмем множество $V_i = U_i^1 \times U_i^2$. Мера этого множества $\mu(V_i) = \mu(U_i^1) \cdot \mu(U_i^2) \leq 2^{\frac{-i}{2}} \cdot 2^{\frac{-i}{2}} \leq 2^{-i}$. Получим, что меры множеств U_i и V_i совпадают и не превосходят 2^{-i}. Тогда $(V_i)_{i\in\omega}$, является МЛ$_5$−тестом, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по МЛ$_5$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит обобщенный МЛ$_3$−тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Необходимо доказать, что мера множества $U_i^1 \times U_i^2$, где $U_i^1 = (a_i, b_i)$ и $U_i^2 = (c_i, d_i)$, стремится к нулю. По условию, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Мера этого множества $\mu(U_i) = (b_i - a_i)^2$ стремится к нулю. Возьмем тест $V_i = U_i^1 \times U_i^2$, где $U_i^1 = (a_i, b_i)$ и $U_i^2 = (c_i, d_i)$. Мера множества $\mu(V_i) = \mu(U_i^1) \cdot \mu(U_i^2)$. Получим, что меры множеств U_i и V_i совпадают и стремятся к нулю. Следовательно, $(V_i)_{i\in\omega}$ — обобщенный МЛ$_5$−тест, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ обобщенно неслучаен по МЛ$_5$.

"$\Leftarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит МЛ$_5$−тест. Это значит, что $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, $x_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Следовательно, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = U_i^1 \times U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$. Мера множества $\mu(V_i) = (b_i - a_i)(d_i - c_i) \leq 2^{-i} \cdot 2^{-i} \leq 2^{-2i}$. Возьмем множество $\widetilde{V_i} = V_{i/2}$, но при этом $(b_i - a_i) \neq (d_i - c_i)$. Пусть $(b_{i/2} - a_{i/2}) < (d_{i/2} - c_{i/2})$. Тогда возьмем множество $\widetilde{R_i} = \widetilde{R_i^1} \times \widetilde{U_i^2}$, где $\widetilde{R_i^1} = (a_{i/2}, b_{i/2}) + ((b_{i/2} - a_{i/2}) - (d_{i/2} - c_{i/2}))$. Получим, что меры множеств V_i и $\widetilde{R_i} = \widetilde{R_i^1} \times \widetilde{U_i^2}$ совпадают и не превосходят 2^{-i}. Тогда $(\widetilde{R_i})_{i\in\omega}$, где $\widetilde{R_i} = \widetilde{R_i^1} \times \widetilde{U_i^2}$, является МЛ$_3$−тестом, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по МЛ$_3$−тесту $(\widetilde{R_i})_{i\in\omega}$. Аналогично, пусть $(d_{i/2} - c_{i/2}) < (b_{i/2} - a_{i/2})$. Тогда возьмем множество $\widetilde{R_i} = \widetilde{U_i^1} \times \widetilde{R_i^2}$, где $\widetilde{R_i^2} = (c_{i/2}, d_{i/2}) + ((d_{i/2} - c_{i/2}) - (b_{i/2} - a_{i/2}))$. Получим, что меры множеств V_i и $\widetilde{R_i} = \widetilde{U_i^1} \times \widetilde{R_i^2}$ совпадают и не превосходят 2^{-i}. Тогда $(\widetilde{R_i})_{i\in\omega}$, где $\widetilde{R_i} = \widetilde{U_i^1} \times \widetilde{R_i^2}$, так же является МЛ$_3$−тестом, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по МЛ$_3$.

Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит обобщенный МЛ$_5$−тест. Это значит, что $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, $x_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. Следовательно, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = U_i^1 \times U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$. Мера множества $\mu(V_i) = (b_i - a_i)(d_i - c_i)$. стремится к нулю. Возьмем множество $\widetilde{V_i} = V_{i/2}$, но при этом $(b_{i/2} - a_{i/2}) \neq (d_{i/2} - c_{i/2})$. Пусть $(b_{i/2} - a_{i/2}) < (d_{i/2} - c_{i/2})$. Тогда возьмем множество $\widetilde{R_i} = \widetilde{R_i^1} \times \widetilde{U_i^2}$, где $\widetilde{R_i^1} = (a_{i/2}, b_{i/2}) + ((b_{i/2} - a_{i/2}) - (d_{i/2} - c_{i/2}))$. Получим, что меры множеств V_i и $\widetilde{R_i} = \widetilde{R_i^1} \times \widetilde{U_i^2}$ совпадают и стремятся к нулю. Тогда $(\widetilde{R_i})_{i\in\omega}$, где $\widetilde{R_i} = \widetilde{R_i^1} \times \widetilde{U_i^2}$, является обобщенным МЛ$_3$−тестом, причем $\overline{x}$

не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ обобщенно неслучаен по МЛ$_3$−тесту $(\widetilde{R}_i)_{i\in\omega}$. Аналогично, пусть $(d_{i/2}-c_{i/2})<(b_{i/2}-a_{i/2})$. Тогда возьмем множество $\widetilde{R}_i=\widetilde{U_i^1}\times\widetilde{R_i^2}$, где $\widetilde{R_i^2}=(c_{i/2},d_{i/2})+((d_{i/2}-c_{i/2})-(b_{i/2}-a_{i/2}))$. Получим, что меры множеств V_i и $\widetilde{R}_i=\widetilde{U_i^1}\times\widetilde{R_i^2}$ совпадают и стремятся к нулю. Тогда $(\widetilde{R}_i)_{i\in\omega}$, где $\widetilde{R}_i=\widetilde{U_i^1}\times\widetilde{R_i^2}$, так же является обобщенным МЛ$_3$−тестом, причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ обобщенно неслучаен по МЛ$_3$.

***Теорема 3*:** Пусть $\overline{x}=(x_1,\,x_2)\in\mathbb{R}^2$. Тогда $\overline{x}$ (обобщенно) МЛ$_1$-случайно $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ (обобщенно) МЛ$_4$-случайно.

***Доказательство*:**

"$\Rightarrow$": Пусть $\overline{x}=(x_1,\,x_2)$ не проходит МЛ$_1$−тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i=U_i^1\times U_i^2=(a_i,b_i)\times(c_i,d_i)$, $(b_i-a_i)=(d_i-c_i)$. Это значит, что $\overline{x}\in\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\times(c_i,d_i)$, где $(b_i-a_i)=(d_i-c_i)$. Мера этого множества $\mu(U_i)=\mu(U_i^1)\cdot\mu(U_i^2)=(b_i-a_i)^2\le 2^{-i}$. При этом возможны 2 случая: 1) $\mu(U_i^1)\to 0$ или 2) $\mu(U_i)^2\to 0$. Предположим, что $\mu(U_i^1)\nrightarrow 0$ и $\mu(U_i)^2\nrightarrow 0$. Тогда $\exists\delta_1,\delta_2:\mu(U_i^1)\ge\delta_1>0$ и $\mu(U_i^2)\ge\delta_2>0$. Значит $\mu(U_i^1)\mu(U_i^2)\ge\delta_1\delta_2>0$. Следовательно, $\mu(U_i^1)\mu(U_i^2)\to 0$, а это противоречие.

Рассмотрим первый случай. По определению сходимости, $\forall\varepsilon>0\exists N:\forall j(j>N\Rightarrow\mu(U_i^1)<\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon=2^{-j}$. Тогда $\mu(U_i^1)<2^{-j}$. Пусть k_j - наименьшее i, такое, что выполняется неравенство $i>k_{j-1}$. Тогда $(V_i^1)_{i\in\omega}$, где $V_i^1=U_{k_j}^1$ образует МЛ$_4$-тест. Причем x_1 не проходит этот тест. Значит x_1 — неслучайно по МЛ$_4$.

Рассмотрим второй случай. По определению сходимости, $\forall\varepsilon>0\exists N:\forall j(j>N\Rightarrow\mu(U_i^2)<\varepsilon)$. Пусть $\varepsilon=2^{-j}$. Тогда $\mu(U_i^2)<2^{-j}$. Пусть k_j — наименьшее i, такое, что выполняется неравенство $i>k_{j-1}$. Тогда $(V_i^1)_{i\in\omega}$, где $V_i^1=U_{k_j}^2$ образует МЛ$_4$-тест. Причем x_2 не проходит этот тест. Значит x_2 — неслучайно по МЛ$_4$.

Пусть $\overline{x}=(x_1,\,x_2)$ не проходит обобщенный МЛ$_1$−тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i=U_i^1\times U_i^2=(a_i,b_i)\times(c_i,d_i)$, $(b_i-a_i)=(d_i-c_i)$. Это значит, что $\overline{x}\in\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i=\bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\times(c_i,d_i)$, где $(b_i-a_i)=(d_i-c_i)$. Мера этого множества $\mu(U_i)=\mu(U_i^1)\cdot\mu(U_i^2)=(b_i-a_i)^2$ стремится к нулю. При этом возможны 2 случая: 1) $\mu(U_i^1)\to 0$ или 2) $\mu(U_i)^2\to 0$. Предположим, что $\mu(U_i^1)\nrightarrow 0$ и $\mu(U_i)^2\nrightarrow 0$. Тогда $\exists\delta_1,\delta_2:\mu(U_i^1)\ge\delta_1>0$ и $\mu(U_i^2)\ge\delta_2>0$. Значит $\mu(U_i^1)\mu(U_i^2)\ge\delta_1\delta_2>0$. Следовательно, $\mu(U_i^1)\mu(U_i^2)\to 0$, а это противоречие.

Рассмотрим первый случай. Тогда $(U_i^1)_{i\in\omega}$ образует обобщенный МЛ$_4$-тест. Причем x_1 не проходит этот тест. Значит x_1 — обобщенно неслучайно по МЛ$_4$.

Рассмотрим второй случай. Тогда $(U_i^2)_{i\in\omega}$ образует обобщенный МЛ$_4$-тест. Причем x_2 не проходит этот тест. Значит x_2 — обобщенно неслучайно по МЛ$_4$.

"$\Leftarrow$": Пусть $\overline{x}=(x_1,\,x_2)$ неслучайно по МЛ$_4$. Рассмотрим случай неслучайности x_1. Тогда $x_1\in\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i^1=\bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$. Определим множество $U_i^2=(c,d)$, где $d-c=1$, d и c — рациональные числа. Тогда $x_2\in U_i^2=(c,d)$ и, следовательно, $\overline{x}\in\bigcap_{i=1}^{\infty}V_i=U_i^1\times U_i^2=\bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)\times(c,d)$. Мера множества $\mu(V_i)=(b_i-a_i)(d-c)=(b_i-a_i)\le 2^{-i}$. Получим, что V_i образует МЛ$_1$-тест. Причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по МЛ$_1$. Аналогично рассматривается случай неслучайности x_2.

Пусть $\overline{x}=(x_1,\,x_2)$ обобщенно неслучайно по МЛ$_4$. Рассмотрим случай обобщенной неслучайности x_1. Тогда $x_1\in\bigcap_{i=1}^{\infty}U_i^1=\bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$. Определим множество $U_i^2=(c,d)$, где $d-c=1$, d и c — рациональные числа. Тогда $x_2\in U_i^2=$

(c, d) и, следовательно, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = U_i^1 \times U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c, d)$. Мера множества $\mu(V_i) = (b_i - a_i)(d - c) = (b_i - a_i)$ стремится к нулю. Получим, что V_i образует обобщенный МЛ$_1$-тест. Причем $\overline{x}$ не проходит этот тест. Следовательно, вектор $\overline{x}$ обобщенно неслучаен по МЛ$_1$. Аналогично рассматривается случай обобщенной неслучайности x_2.

Прежде чем перейти к доказательству соотношений между определениями случайности по Шнорру, докажем несколько лемм.

Лемма 2. Если $(R_i)_{i\in\omega}$, где $R_i = B_{r_i}(w_i)$, — тест Шнорра, то существует тест Шнорра $(R'_i)_{i\in\omega}$ такой, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$, где $R'_i = B_{r'_i}(w'_i)$, а r'_i, w'_i — равномерно вычислимы по i.

***Доказательство*:** Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — тест Шнорра, то R_i — равномерно вычислимо перечислимо по i, а $R_{i+1} \subseteq R_i$. Пусть $R_{i,s} = B_{r_{i,s}}(w_{i,s})$ — перечисление R_i на шаге s. Следовательно, концы $r_{i,s}, w_{i,s}$ — вычислимы. Находим такой s, что $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i,s}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$ и $\lambda(R_{i+1,s}) - \lambda(R_{i+1}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$. Полагаем $R'_i = R_{i,s}$ и покажем, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$. Итак, $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i+1}) - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{2} \geq 0$. Значит $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$.

Лемма 3. Если $(R_i)_{i\in\omega}$, где $R_i = (a_i, b_i)\times(c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, — тест Шнорра, то существует тест Шнорра $(R'_i)_{i\in\omega}$ такой, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$, где $R'_i = (a'_i, b'_i)\times(c'_i, d'_i)$, $(b'_i - a'_i) = (d'_i - c'_i)$, а a'_i, b'_i, c'_i, d'_i — равномерно вычислимы по i.

***Доказательство*:**Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — тест Шнорра, то R_i — равномерно вычислимо перечислимо по i, а $R_{i+1} \subseteq R_i$. Пусть $R_{i,s} = (a_{i,s}, b_{i,s}) \times (c_{i,s}, d_{i,s})$ — перечисление R_i на шаге s. Следовательно, концы $a_{i_s}, b_{i_s}, c_{i,s}, d_{i,s}$ — вычислимы. Находим такой s, что $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i,s}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$ и $\lambda(R_{i+1,s}) - \lambda(R_{i+1}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$. Полагаем $R'_i = R_{i,s}$ и покажем, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$. Итак, $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i+1}) - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{2} \geq 0$. Значит $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$.

Лемма 4. Если $(R_i)_{i\in\omega}$, где $R_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, — тест Шнорра, то существует тест Шнорра $(R'_i)_{i\in\omega}$ такой, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$, где $R'_i = (a'_i, b'_i) \times (c'_i, d'_i)$, а a'_i, b'_i, c'_i, d'_i — равномерно вычислимы по i.

***Доказательство*:**Так как $(R_i)_{i\in\omega}$ — тест Шнорра, то R_i — равномерно вычислимо перечислимо по i, а $R_{i+1} \subseteq R_i$. Пусть $R_{i,s} = (a_{i,s}, b_{i,s}) \times (c_{i,s}, d_{i,s})$ — перечисление R_i на шаге s. Следовательно, концы $a_{i_s}, b_{i_s}, c_{i,s}, d_{i,s}$ — вычислимы. Находим такой s, что $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i,s}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$ и $\lambda(R_{i+1,s}) - \lambda(R_{i+1}) \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4}$. Полагаем $R'_i = R_{i,s}$ и покажем, что $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$. Итак, $\lambda(R_i) - \lambda(R_{i+1}) - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} - \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{4} \geq \frac{\lambda(R_i)-\lambda(R_{i+1})}{2} \geq 0$. Значит $R_{i+1} \subseteq R'_i \subseteq R_i$.

Перейдем к доказательству соотношений между определениями случайности по Шнорру.

***Теорема 4*:** Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\overline{x}$ S_2-случайно по Шнорру $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ S_3-случайно по Шнорру.

***Доказательство*:**

"$\Rightarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит S_2-тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = B_{r_i}(w_i)$. Это значит, что мера множества $U_i = B_{r_i}(w_i)$ равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty} B_{r_i}(w_i)$. По лемме 2 существует тест Шнорра $U'_i = B_{r'_i}(w'_i)$, где r'_i, w'_i

— равномерно вычислимы по i. Тогда для него повторяется доказательство Теоремы 1. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по S_3.

"$\Leftarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит S_3-тест $(V_i)_{i\in\omega}$, где $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Это значит, что мера множества $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере V_i, где $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. По лемме 3 существует тест Шнорра $V_i' = (a_i', b_i') \times (c_i', d_i')$, $(b_i' - a_i') = (d_i' - c_i')$, где a_i', b_i', c_i', d_i' — равномерно вычислимы по i. Тогда для него повторяется доказательство Теоремы 1. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по S_2.

***Теорема 5*:** Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\overline{x}$ S_3-случайно по Шнорру $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ S_5-случайно по Шнорру.

***Доказательство*:**

"$\Rightarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит S_3-тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. Это значит, что мера множества $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$, равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, $(b_i - a_i) = (d_i - c_i)$. По лемме 3 существует тест Шнорра $U_i' = (a_i', b_i') \times (c_i', d_i')$, $(b_i' - a_i') = (d_i' - c_i')$, где a_i', b_i', c_i', d_i' — равномерно вычислимы по i. Тогда для него повторяется доказательство Теоремы 2. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по S_3.

"$\Leftarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит S_5-тест. Это значит, что $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, $x_2 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$. И меры множеств $U_i^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, $U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(c_i, d_i)$ равномерно вычислимы. Следовательно, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = U_i^1 \times U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$, где $V_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$. То есть, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере V_i, где $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$. По лемме 4 существует тест Шнорра $U_i' = (a_i', b_i') \times (c_i', d_i')$, где a_i', b_i', c_i', d_i' — равномерно вычислимы по i. Тогда для него повторяется доказательство Теоремы 2. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по S_4.

***Теорема 6*:** Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Тогда $\overline{x}$ S_1-случайно по Шнорру $\Leftrightarrow$ $\overline{x}$ S_4-случайно по Шнорру.

***Доказательство*:**

"$\Rightarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ не проходит S_1-тест $(U_i)_{i\in\omega}$, где $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$. Это значит, что мера множества $U_i = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$ равномерно вычислима. Следовательно, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере U_i, где $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \bigcap^{\infty}(a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$. По лемме 4 существует тест Шнорра $U_i' = (a_i', b_i') \times (c_i', d_i')$, где a_i', b_i', c_i', d_i' — равномерно вычислимы по i. Тогда для него повторяется доказательство Теоремы 3. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по S_4.

"$\Leftarrow$": Пусть $\overline{x} = (x_1, x_2)$ неслучайно по S_4. Рассмотрим случай неслучайности x_1. Тогда $x_1 \in \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$, где мера множества $U_i^1 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$ равномерна вычислима. Определим множество $U_i^2 = (c, d)$, где $d - c = 1$, d и c — рациональные числа. Тогда $x_2 \in U_i^2 = (c, d)$ и, следовательно, $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i = U_i^1 \times U_i^2 = \bigcap_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i) \times (c, d)$, где мера множества V_i равномерна вычислима. То есть, существует вычислимая функция $\lambda(i)$, значение которой не превосходит 2^{-i} и равно мере V_i, где $\overline{x} \in \bigcap_{i=1}^{\infty} V_i =$

$\bigcap^{\infty}(a_i, b_i) \times (c, d)$. По лемме 4 существует тест Шнорра $U'_i = (a'_i, b'_i) \times (c', d')$, где a'_i, b'_i, c', d' — равномерно вычислимы по i. Тогда для него повторяется доказательство Теоремы 3. Следовательно, вектор $\overline{x}$ неслучаен по S_1. Аналогично рассматривается случай неслучайности x_2.

Заключение

Рассмотрено базисное понятие алгоритмической теории информации — понятие случайности вещественных чисел по Мартин-Лёфу. Приведены и доказаны свойства случайных вещественных чисел и операций над ними. Аналогично случаю вещественных чисел был рассмотрен двумерный случай и возможные определения случайных вещественных чисел на пространстве R^2. Таковыми являются случаи, когда в качестве МЛ-теста берется последовательность открытых прямоугольников, открытых кругов, открытых квадратов и случайность обеих или одной из координат $\overline{x}$. Как выяснилось, эти определения делятся между собой на 2 класса эквивалентности. Случай выбора последовательности открытых прямоугольников эквивалентен случаю случайности обеих координат $\overline{x}$. А случаи выбора последовательностей открытых кругов и открытых квадратов эквивалентен случаю случайности одной из координат $\overline{x}$.

Список литературы

[1] Downey, R. G. Algorithmic randomness [Electronic resource] / Rodney G. Downey, Jan Reimann // Scholarpedia, 2007. URL: http://www.scholarpedia.org/article/Algorithmic_randomness. (Request data: 21.03.2013).

[2] Успенский, В. А. Становление алгоритмической теории информации в России [Текст] / Владимир А. Успенский, Владимир В. Вьюгин // Информационные процессы. - 2010. - Том 10, № 2. - С.145–158.

[3] Соар, Р. И. Вычислимо перечислимые множества и степени [Текст]: Изучение вычислимых функций и вычислимо перечислимых множеств / Роберт И. Соар; перевод с англ. М.М. Арсланова. — Казань: Казанское математическое общество, 2000. — 576 с. — 700 экз. — ISBN 5-900975-22-3 (в пер.).

[4] Успенский, В. А. Четыре алгоритимических лица случайности [Текст] / Владимир А. Успенский; — М.: МЦНМО, 2006. — 48 с. — ISBN 5-94057-238-3.

[5] Успенский, В. А. Колмогоровская сложность и алгоритмическая случайность [Текст] / Владимир А. Успенский, Николай К. Верещагин, Александр Шень; — М.: МЦНМО, 2010. — 556 с. — ISBN 978-5-94057-709-6.

[6] Nies, A. Computability and Randomness [Text]/ Andr'e Nies; The University of Auckland. — New York: Oxford University Press Inc., 2009. — 433 p. — ISBN 978-0-19-923076-1.