ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 4 (431)

УДК 517.958

П.С. КРАСИЛЬНИКОВ

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ЛАГРАНЖА-ИМШЕНЕЦКОГО

Введение

Известно [1], что любое решение вполне интегрируемого уравнения в частных производных первого порядка может быть получено из полного интеграла методом вариации произвольных постоянных.

Цель статьи — дополнить классические исследования описанием разбиения пространства ростков аналитических решений уравнения первого порядка на классы эквивалентности, изучить эти классы на пространстве 2-струй ростков решений и дать им геометрическую интерпретацию. Результаты исследований применяются для описания строения пространства аналитических интегралов уравнений задачи двух тел.

Считаем, что все карты исследуемых многообразий имеют класс C^ω.

1. Основные результаты

Пусть $J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ — пространство 1-струй действительных функций от n переменных, имеющее локальные координаты $(x_1\dots x_n, z, p_1\dots p_n)$. Уравнение в частных производных

$$F(\mathbf{x},\mathbf{p})=0,\quad \mathbf{x}=(x_1\dots x_n),\quad \mathbf{p}=(p_1\dots p_n), \tag{1}$$

$\sum\limits_{j=1}^{n} F^2_{p_j}\neq 0$, будем интерпретировать как замкнутое подмногообразие в этом пространстве. Геометрическое решение уравнения (1) есть иммерсия $\mathbf{i}: M^n\to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $\mathbf{i}=(\mathbf{x}, z(\mathbf{x}),\mathbf{p}(\mathbf{x}))$, n-мерного многообразия $M^n\subset\mathbb{R}^n$, для которой $\mathbf{i}(M^n)\subset F^{-1}(0)$, при этом каноническая 1-форма $\theta=dz-\sum\limits_{j=1}^{n}p_j dx_j$ обращается в нуль тождественно на $\mathbf{i}(M^n)$. Классическое решение $z: M^n\to\mathbb{R}^1$ есть $\mathrm{Pr}\circ\mathbf{i}$, где $\mathrm{Pr}(\mathbf{x},z,\mathbf{p})=z$.

Будем говорить, что n-параметрическое аналитическое семейство функций $\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{c})+c_n$, $\mathbf{x}\in M^n$, $\mathbf{c}\in N^{n-1}\subset\mathbb{R}^{n-1}$ ($\mathbf{c}=(c_1,\dots,c_{n-1})$ — вектор произвольных постоянных) есть классический полный интеграл уравнения (1), если $F(\mathbf{x},\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{c}))\equiv 0$, при этом $\operatorname{rank}\mathbf{w}_{\mathbf{x}\mathbf{c}}=n-1$ в каждой точке области $D=M^n\times N^{n-1}$.

Отображение $\mathbf{j}^1\mathbf{w}:(M^n\times N^{n-1}\times\mathbb{R}^1)\to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^1)$, $\mathbf{j}^1\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{c},c_n)=(\mathbf{x},\mathbf{w}(\mathbf{x},\mathbf{c})+c_n,\ \mathbf{w}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{c}))$ является локальной параметризацией многообразия $F^{-1}(0)$ [1]. Исключая вектор $\mathbf{c}$ из $(n-1)$ уравнений совокупности $\mathbf{p}=\mathbf{w}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{c})$ и подставляя его в оставшееся уравнение этой же системы, получим равенство (1) [2].

В новых локальных координатах $\mathbf{x}$, $\mathbf{c}$ уравнение $\theta=0$ примет вид

$$\mathbf{j}^1\mathbf{w}^*\theta\equiv\sum_{j=1}^{n-1}\mathbf{w}_{c_j}(\mathbf{x},\mathbf{c})dc_j+dc_n=0. \tag{2}$$

Геометрическое решение уравнения (2) есть иммерсия $\mathbf{j}: M^n\to\mathbb{R}^{2n}$, $\mathbf{j}=(\mathbf{x},\mathbf{c}(\mathbf{x}),c_n(\mathbf{x}))$, для которой $\mathbf{j}^1\mathbf{w}^*\theta$ обращается в нуль тождественно на $\mathbf{j}(M^n)$. Классическое решение есть $(\mathbf{c},c_n): M^n\to\mathbb{R}^n$.

Фиксируем точку $(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, c_{n0}) \in D \times \mathbb{R}^1$. Положим $\mathbf{j}^1\mathbf{w}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, c_{n0}) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{p}_0)$.

Лемма 1. *Множество* $\{\widehat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{i}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{z}_0, \mathbf{p}_0)\}$ *ростков в* $\mathbf{x}_0$ *геометрических решений уравнения* (1) *находится в биективном соответствии* h *с множеством* $\{\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}_0) : \mathbf{j}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, c_{n0})\}$ *ростков в* $\mathbf{x}_0$ *геометрических решений уравнения* (2). *Биекция* $h(\widehat{\mathbf{j}}) = \widehat{\mathbf{i}}$ *имеет следующий вид:*

$$h(\widehat{\mathbf{j}}) = \mathbf{j}^1\mathbf{w}(\widehat{\mathbf{j}}). \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, любому ростку $\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}_0)$ соответствует единственный росток $\widehat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_0)$, вычисленный по формуле (3). Это же равенство устанавливает обратное соответствие: любому ростку $\widehat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_0)$ отвечает единственный росток $\widehat{\mathbf{j}}(\mathbf{x}_0)$ по крайней мере для некоторой окрестности $\Omega(\mathbf{c}_0, c_{n0}) \subset N^{n-1} \times \mathbb{R}^n$, не зависящей от выбора ростка $\widehat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_0)$.

Дифференцируя последние n равенств системы (3) по $\mathbf{x}$ и принимая во внимание (2), получим

$$(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) = (\mathbf{w}_{\mathbf{xc}} \cdot \mathbf{c}_{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0).$$

Здесь $(\mathbf{x}, z, z_{\mathbf{x}})$ — один из представителей ростка $\widehat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_0)$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{rank}(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) = \operatorname{rank} \mathbf{c}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \leq n - 1. \tag{4}$$

В самом деле, запишем неравенства Сильвестра

$$\operatorname{rank}(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) \leq \min(\operatorname{rank} \mathbf{w}_{\mathbf{xc}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0), \operatorname{rank} \mathbf{c}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)),$$
$$\operatorname{rank}(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) \geq \operatorname{rank} \mathbf{w}_{\mathbf{xc}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) + \operatorname{rank} \mathbf{c}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) - (n - 1).$$

Учитывая, что в области D ранг матрицы $\mathbf{w}_{\mathbf{xc}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0)$ равен $n-1$, имеем требуемое утверждение. Принимая во внимание произвольность выбора точки $(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, c_{n0})$ и ростка $\widehat{\mathbf{i}}(\mathbf{x}_0)$, приходим также к следующей лемме.

Лемма 2. *Росток классического решения* $z(\mathbf{x})$ *уравнения* (1) *является ростком решения* n*-мерного аналога уравнения Монжа-Ампера*

$$\det(z(\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{c}))_{\mathbf{xx}} = 0, \quad z_{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}). \tag{5}$$

В частном случае, когда $n = 2$, (5) — *параболическое уравнение Монжа-Ампера.*

Следствие 1. Уравнение (1) есть промежуточный интеграл уравнения (5).

Следствие 2. Если $z(\mathbf{x})$ есть классическое решение уравнения (1) и $(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) \in D$ $(z_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{w}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0))$, тогда матрица $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0)$ является особой.

Пусть $\widetilde{\mathbf{T}}$ — пространство ростков аналитических решений $z : M^n \to \mathbb{R}^1$ уравнения (1), $\mathbf{T}$ — его подпространство, состоящее из ростков решений локально постоянного ранга матрицы $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}$.

Рассмотрим также пространство $\mathbf{T}^{(2)}$, состоящее из 2-струй ростков решений $z : M^n \to \mathbb{R}^1$. На этом пространстве ростки $\widehat{z}_1(\mathbf{x}_0), \widehat{z}_2(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{T}$ “склеиваются”, если они имеют касание второго порядка в точке $\mathbf{x}_0$.

Произвольное многообразие L будем называть монотонно стратифицированным [3], если оно распадается на попарно непересекающиеся подмногообразия $L_1, \ldots, L_t$, удовлетворяющие условию $\overline{L}_k = \bigcup\limits_{j=1}^{k} L_j$ при всех $k = 1, \ldots, t$ (здесь $\overline{L}_k$ — замыкание L_k). Отдельные подмногообразия L_k будем называть стратами.

Сформулируем теорему, описывающую строение пространства $\mathbf{T}$. С этой целью введем следующие обозначения: π есть регулярная L-поверхность в пространстве произвольных постоянных

$c_1, \dots, c_n$, при этом $(\mathbf{c}_0, c_{n0}) \in \pi$; $(\mathbf{w} + c_n)_\pi$ есть L-параметрическое семейство функций, являющееся ограничением $(\mathbf{w} + c_n)$ на π; $\widehat{D}_\pi(\mathbf{x}_0)$ есть росток дискриминанты этого семейства (если $\dim \pi = 0$, полагаем $\widehat{D}_\pi = (\widehat{\mathbf{w}} + c_n)_\pi$); $(\cdot)$ — это $(\mathbf{x}_0, z_0, \mathbf{p}_0)$;

$$\mathbf{k}_L^{(\cdot)} = \{\widehat{z} : z(\mathbf{x}_0) = z_0,\ z_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0,\ \operatorname{rank}(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0) = L\}. \tag{6}$$

Пусть R — отношение эквивалентности, являющееся касанием второго порядка в точке $\mathbf{x}_0$. Следующая теорема обобщает классические результаты [4], [5].

Теорема (Лагранжа-Имшенецкого). I. *Полный интеграл $\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + c_n$ уравнения $F = 0$ разбивает пространство $\mathbf{T}$ на n классов эквивалентности, содержащих ростки с фиксированным рангом матрицы $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}$,*

$$\mathbf{T} = \bigcup_{L=0}^{n-1} \mathbf{T}_L, \quad \mathbf{T}_i \bigcap \mathbf{T}_j = 0, \quad \text{если } i \neq j. \tag{7}$$

Подпространства $\mathbf{T}_L$ имеют геометрическое описание

$$\mathbf{T}_L = \bigcup_{(\cdot)} \mathbf{k}_L^{(\cdot)}, \tag{8}$$

причем для любой точки $(\cdot)$ существует окрестность $\Omega(\mathbf{c}_0, c_{n0}) \subset N^{n-1} \times \mathbb{R}^1$, для которой

$$\mathbf{k}_L^{(\cdot)} = \{\widehat{D}_\pi : \pi \subset \Omega,\ (\mathbf{c}_0, c_{n0}) \in \pi,\ \dim \pi = L\}. \tag{9}$$

II. *Разбиение многообразия $\mathbf{T}^{(2)}$ по рангам второго дифференциала $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}$ является монотонной стратификацией, коразмерность стратов $\mathbf{T}_L^{(2)} = \mathbf{T}_L / R$ вычисляется по формуле*

$$\operatorname{codim} \mathbf{T}_L^{(2)} = (n - L - 1)(n - L)/2.$$

Из теоремы следует, что подпространство $\mathbf{T}_L$ состоит из ростков дискриминант всевозможных L-параметрических семейств функций $(\mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) + c_n)_\pi$. Отметим, что эта формулировка отличается от классической, существенно дополняя ее. Так, традиционно утверждается [5], что любое гладкое решение с отмеченной точкой $(\cdot)$ входит вместе с некоторой окрестностью $B(\mathbf{x}_0) \times \Omega(\mathbf{c}_0, c_{n0})$ либо в семейство полного интеграла

$$\{D_\pi : \pi \subset \Omega,\ (\mathbf{c}_0, c_{n0}) \in \pi,\ \dim \pi = 0\},$$

либо принадлежит семейству общего интеграла

$$\{D_\pi : \pi \subset \Omega,\ (\mathbf{c}_0, c_{n0}) \in \pi,\ 1 \leq \dim \pi \leq n - 1\},$$

при этом описание более "тонкой структуры" (7)–(9) пространства $\mathbf{T}$, а также описание стратификации $\mathbf{T}^{(2)}$ отсутствует.

2. Доказательство теоремы

Имеет место

Лемма 3. *Пространство $\mathbf{T}^{(2)}$ является гладким подмногообразием пространства $J^2(M^n, \mathbb{R}^1)$.*

Справедливость леммы вытекает из того факта, что уравнение (1) накладывает ограничение на первые и вторые производные искомого решения $z : M^n \to \mathbb{R}^1$. Действительно, пусть

$$(x_1, \dots, x_n), z, (p_1, \dots, p_n), \quad \|a_{ij}\|_1^n \ \ (a_{ij} = a_{ji}) \tag{10}$$

— локальные координаты струи $j^2_{\mathbf{x}} z$ в $J^2(M^n, \mathbb{R}^1)$. Тогда числа

$$(x_1, \dots, x_n), z, (p_2, \dots, p_n), \quad \|a_{ij}\|_2^n,$$

входящие в совокупность (10), являются локальными координатами на $\mathbf{T}^{(2)}$; они однозначно задают струю $j^2_{\mathbf{x}} z$ из этого пространства, т. к. всегда существует единственное решение задачи Коши $z|_{x_1} = \varphi(\overline{\mathbf{x}})$, где φ — любой представитель 2-струи $j^2_{\mathbf{x}} f(\overline{\mathbf{x}}, z, \overline{\mathbf{p}}, \|a_{ij}\|^n_2)$ ($\overline{\mathbf{x}} = (x_2, \dots, x_n)$, $\overline{\mathbf{p}} = (p_2, \dots, p_n)$). Оставшиеся величины p_1, $a_{1j} = a_{j1}$ определяются следующим образом: p_1 находится из уравнения (1), параметры a_{1j} — из системы уравнений

$$F^T_{\mathbf{x}} + \|a_{ij}\|^n_1 (F_{p_1}, \dots, F_{p_n})^T = 0,$$

являющихся дифференциальными следствиями тождества $F(\mathbf{x}, z_{\mathbf{x}}) = 0$ ($a_{ij} = z_{x_i x_j}$).

Доказательство теоремы. Фиксируем точку $(\mathbf{x}, \mathbf{c}_0, c_{n0}) \in D \times \mathbb{R}^1$. Пусть

$$\mathbf{q}^{(*)} = \{(\widehat{\mathbf{c}}, \widehat{c}_n) : \mathbf{c}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}_0, \;\; c_n(\mathbf{x}_0) = c_{n0}\}, \quad (*) - (\mathbf{x}_0, \mathbf{c}_0, c_{n0}),$$

— семейство ростков классических решений уравнения (2) с данной 0-струей $j^0_{x_0}(\mathbf{c}, c_n)$,

$$\mathbf{k}^{(\cdot)} = \{\widehat{z} : z(\mathbf{x}_0) = z_0, \;\; z_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0\}$$

— семейство ростков классических решений уравнения (1) с данной 1-струей $j^1_{\mathbf{x}_0} z$. Из вида уравнения (2) следует, что матрица Якоби $\mathbf{A} = (\mathbf{c}, c_n)_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$ вырождена, при этом $\operatorname{rank} \mathbf{A} = \operatorname{rank} \mathbf{c}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$. Очевидно, условие $\operatorname{rank} \mathbf{A} = L \le n - 1$ задает отношение эквивалентности на $\mathbf{q}^{(*)}$, разбивающее это семейство на классы эквивалентности.

Из условия (4) и равенства (3), устанавливающего биективное соответствие между $\mathbf{k}^{(\cdot)}$ и $\mathbf{q}^{(*)}$, вытекает, что $\mathbf{k}^{(\cdot)}$ также распадается на классы эквивалентности $\mathbf{k}^{(\cdot)}_L$ ($L = 0, \dots, n-1$), имеющие вид (6). Очевидно, $\mathbf{T}_L$ ($L = 0, \dots, n-1$) — классы эквивалентности на $\mathbf{T}$.

Теперь, следуя работам [1], [2], [5], дадим геометрическое описание $\mathbf{k}^{(\cdot)}_L$. Пусть $z(\mathbf{x}_0) \in \mathbf{k}^{(\cdot)}_L$. Росток отображения $(\mathbf{c}, c_n) : M^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемого формулой (3), является ростком классического решения уравнения (2). Из теоремы Якоби следует, что в некоторой окрестности $U(\mathbf{x}_0)$ функции $c_i : M^n \to \mathbb{R}^1$ связаны между собой зависимостями

$$c_{L+1} = \psi_1(c_1, \dots, c_L), \dots, c_n = \psi_{n-L}(c_1, \dots, c_L). \tag{11}$$

Очевидно, (11) — регулярная L-поверхность, принадлежащая области $N^{n-1} \times \mathbb{R}^1$ и проходящая через фиксированную точку $(\mathbf{c}_0, c_{n0})$. Запишем уравнение (2) в локальных координатах c_j поверхности (11). Для этого подставим (11) в уравнение (2) и приравняем коэффициенты при дифференциалах $dc_1, \dots, dc_L$

$$\mathbf{w}_{c_k} + \sum_{j=1}^{n-L-1} \mathbf{w}_{c_{j+L}} \frac{\partial \psi_j}{\partial c_k} + \frac{\partial \psi_{n-L}}{\partial c_k} = 0 \quad (k = 1, \dots, L). \tag{12}$$

Поверхность (11) обозначим через π, рассмотрим также ограничение $(\mathbf{w} + c_n)_\pi$. Тогда уравнения (12) примут вид

$$\frac{\partial(\mathbf{w} + c_n)_\pi}{\partial c_1} = 0, \; \dots, \; \frac{\partial(\mathbf{w} + c_n)_\pi}{\partial c_L} = 0. \tag{13}$$

Пусть $(c_1, \dots, c_L) : M^n \to \mathbb{R}^L$ — частное решение уравнений (13). Из равенства (3) следует, что росток

$$\widehat{z}(\mathbf{x}_0) = (\mathbf{w} + c_n)_\pi(\mathbf{x}, \widehat{c}_1(\mathbf{x}), \dots, \widehat{c}_L(\mathbf{x}))(\mathbf{x}_0) \tag{14}$$

является ростком решения уравнения (1). Итак, $\widehat{z}(\mathbf{x}_0)$ — росток дискриминанты L-параметрического семейства функций $(\mathbf{w} + c_n)_\pi$. Если провести рассуждения в обратном порядке, то придем к выводу, что $\mathbf{k}^{(\cdot)}_L$ совпадает со всем семейством ростков таких дискриминант, когда π пробегает все множество L-поверхностей, проходящих через точку $(\mathbf{c}_0, c_{n0})$. Часть I теоремы доказана.

Отметим, что росток $\widehat{z}(\mathbf{x}_0)$ не является, вообще говоря, ростком дискриминанты D_π, если $\mathbf{x}_0$ — точка падения ранга матрицы $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}$: теорема Якоби здесь не применима.

II. Пусть $\mathbf{T}^{(1)}$ — пространство 1-струй решений $z : M^n \to \mathbb{R}^1$ уравнения (1), имеющее локальные координаты $x_1, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n$. Рассмотрим проекцию $\mathbf{T}^{(2)} \to \mathbf{T}^{(1)}$, являющуюся гладким расслоением. Слой над точкой $x_1, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n$ можно отождествить с пространством квадратичных форм от $(n-1)$ переменных, поэтому он диффеоморфен пространству $L^{\mathrm{sim}}(n-1, n-1)$ симметричных матриц $\|b_{ij}\|_2^n$, где $b_{ij} = a_{ij} - \mathbf{w}_{x_i x_j}$, $a_{ij} = z_{x_i x_j}$. Последнее допускает монотонную стратификацию по рангам его элементов [6]: множество матриц ранга L является гладким подмногообразием коразмерности $(n - L - 1)(n - L)/2$, а его замыкание состоит из многообразий матриц ранга не выше L. Отсюда следует, что многообразие $\mathbf{T}^{(2)}$ также стратифицировано по рангам матрицы $\|b_{ij}\|_2^n$, страты имеют ту же самую коразмерность, а их замыкание состоит из многообразия струй с квадратичным дифференциалом, удовлетворяющим условию $\operatorname{rank} \|b_{ij}\|_2^n \le L$. Теорема доказана.

В частном случае эта теорема описывает строение пространства аналитических первых интегралов системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in M^n, \quad \mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n).$$

Действительно, соответствующее уравнение первого порядка

$$\sum_{j=1}^{n} X_j(\mathbf{x}) z_{x_j} = 0 \tag{15}$$

имеет классический полный интеграл $(\mathbf{w} + c_n)$, где $\mathbf{w} = \sum\limits_{j=1}^{n-1} z_j c_j$. Здесь $\{z_j : U_j \to \mathbb{R}^1,\ U_j \subset M^n\}$ — интегральный базис уравнения (15). Определим пространство аналитических решений $z : U \to \mathbb{R}^1$, $U \subset M^n$, с отмеченными точками $(\cdot)$ на них:

$$\mathbf{T} = \bigcup_{(\cdot)} \mathbf{k}^{(\cdot)}, \quad \mathbf{k}^{(\cdot)} = \{z : z(\mathbf{x}_0) = z_0,\ z_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{p}_0\}.$$

Линейность $\mathbf{w}$ (относительно c_j) позволяет усилить формулировку теоремы, отказавшись от факторизации пространства $\mathbf{T}$ по росткам: разбиение $\mathbf{T}$ на классы эквивалентности, а также представление $z(\mathbf{x})$ в виде дискриминанты семейства $(\mathbf{w} + c_n)_\pi$, сохраняет силу (дискриминанта D_π при этом определяется в целом, т. е. представляет совокупность всех своих локальных участков).

3. Строение пространства первых интегралов задачи двух тел

Опишем строение пространства аналитических первых интегралов задачи двух тел. Интеграл энергии, интеграл площадей и два скалярных интеграла Лапласа имеют вид

$$H \equiv (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2 - \mu/r = h, \quad f_1 \equiv x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1 = \lambda_1,$$
$$f_2 \equiv -\mu x_1/r + \dot{x}_2 f_1 = \lambda_2, \quad f_3 \equiv -\mu x_2/r - \dot{x}_1 f_1 = \lambda_3,$$
$$h, \lambda_j = \mathrm{const}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \mu \text{ — параметр.}$$

Полный интеграл допускает представление $\mathbf{w} + c_4 = \sum\limits_{j=1}^{3} f_j c_j + c_4$. Вычисления показывают, что $\operatorname{rank} \mathbf{w}_{\mathbf{xc}} = 3$ всюду в области изменения переменных x_1, x_2, $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$ и произвольных постоянных c_j, за исключением вырожденного подмножества, отвечающего нулевому значению интеграла площадей f_1. Как известно, в этом особом случае два гравитирующих тела движутся по прямой. Таким образом, необходимо исключить из рассмотрения прямолинейные орбиты, тогда $(\mathbf{w} + c_4)$ будет удовлетворять условию невырожденности.

В представлении

$$T = \mathbf{T}_0 \bigcup \mathbf{T}_1 \bigcup \mathbf{T}_2 \bigcup \mathbf{T}_3$$

каждое из непересекающихся подпространств $\mathbf{T}_L$ состоит из аналитических интегралов $z(\mathbf{x})$, имеющих фиксированный ранг матрицы $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}$, равный L. Напомним, что для каждого интеграла $z(\mathbf{x})$ исключаем из рассмотрения вырожденное множество точек падения ранга этой матрицы.

Очевидно, интегралы f_1, f_2, f_3 принадлежат подпространству $\mathbf{T}_0$, если исключить из рассмотрения начало координат. Покажем, что интеграл $H = h$ принадлежит подпространству $\mathbf{T}_3$.

Из формулы (4) следует, что ранг матрицы $(z - \mathbf{w})_{\mathbf{xx}}$ совпадает с рангом матрицы $\mathbf{c}_{\mathbf{x}}$, где $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (c_1(\mathbf{x}), c_2(\mathbf{x}), c_3(\mathbf{x}))$ — вектор вариации постоянных c_j, удовлетворяющий в силу (3) уравнениям

$$H_{\mathbf{x}} = \mathbf{w}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})).$$

Вычисления показывают, что

$$c_1(\mathbf{x}) = -2H/f_1, \quad c_2(\mathbf{x}) = f_2/f_1^2, \quad c_3(\mathbf{x}) = f_3/f_1^2. \tag{16}$$

Учитывая, что интеграл энергии $H = h$ зависит в силу классического соотношения

$$f_2^2 + f_3^2 - 3Hf_1^2 = \mu^2 \tag{17}$$

от интегралов f_j, приходим к выводу, что вариации (16) независимы между собой, т. к. в противном случае имели бы зависимость между интегралами Лапласа и интегралом площадей. Итак, $\operatorname{rank} \mathbf{c}_{\mathbf{x}} = 3$, поэтому $H \in T_3$ (начало координат исключаем). Отсюда следует, что интеграл энергии является огибающей некоторого трехпараметрического подсемейства $(\mathbf{w} + c_4)_\pi$, $\dim \pi = 3$, полного интеграла $(\mathbf{w} + c_4)$.

Получим уравнение поверхности π. Для этого следует подсчитать оставшуюся вариацию $c_4(\mathbf{x})$. Имеем

$$c_4(\mathbf{x}) = H(\mathbf{x}) - \mathbf{w}(\mathbf{x}, \mathbf{c}(\mathbf{x})) = H - \mu^2/f_1^2. \tag{18}$$

Если теперь из уравнений (16), (18) выразить H, f_j через c_j и подставить полученные выражения в (17), то получим функциональную связь между c_j, которая определяет поверхность π,

$$s^3(c_2^2 s + c_3^2 s + c_1) = \mu^2.$$

Здесь $s(c_1, c_4)$ — корень кубического уравнения

$$c_1 s^3 + 2c_4 s^2 + 2\mu^2 = 0.$$

Литература

1. Рашевский П.К. *Геометрическая теория уравнений с частными производными.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1947. – 354 с.
2. Гюнтер Н.М. *Интегрирование дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных.* – М.–Л.: Гостехиздат, 1934. – 359 с.
3. Залгаллер В.А. *Теория огибающих.* – М.: Наука, 1975. – 104 с.
4. Степанов В.В. *Курс дифференциальных уравнений.* – 6-е изд. – М.: ГИТТЛ, 1953. – 468 с.
5. Имшенецкий В.Г. *Интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными 1-го и 2-го порядков.* – М.: Изд-во Моск. матем. о-ва, 1916. – 412 с.
6. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. *Особенности дифференцируемых отображений. Классификация критических точек, каустик и волновых фронтов.* – М.: Наука, 1982. – 304 с.

Московский авиационный институт

Поступила 20.09.1995