ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.977

У. БАДАМ

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ ЖИВУЧЕСТИ

1. Постановка задачи

Проблема живучести управляемых систем рассматривается в статье [1]. В ней предложена аксиоматика, математическая формализация и подходы к проблеме на основе анализа нескольких содержательных примеров из экономики, экологии и энергетики. Дальнейшему развитию теории применительно к линейным дискретным системам управления посвящена работа [2]. В данной статье основное внимание сосредоточено на исследовании задач живучести, в которых целевое назначение системы задается нелинейными функциональными ограничениями. Анализ задач проводится традиционными методами теории оптимизации.

Пусть целевое назначение системы имеет вид

$$f(u,v) \le 0, \quad u \in U \subset E^r, \quad v \in V = [0,1]^s \subset E^s. \tag{1}$$

Здесь $u = (u, u_1, \dots, u_r)$ — вектор управляющих воздействий, $v = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ — вектор возмущений, $f(u,v)$ — непрерывная и непрерывно дифференцируемая по аргументам u, v скалярная функция с градиентом $f_v \neq 0$ при $f(u,v) = 0$, $U \subset E^r$ — непустой компакт, V — стандартный куб размерности s. Целевое условие состоит в нахождении такого управления $u \in U$, которое обеспечивает выполнение неравенства (1) для всех возмущений $v \in V$ или для максимального в некотором смысле подмножества возмущений из V.

При фиксированном $u \in U$ определим множество “неопасных” возмущений $V(u) = \{v \in V : f(u,v) \le 0\}$. Задача повышения живучести состоит в максимизации лебегова объема множества неопасных возмущений

$$I(u) = \mu(V(u)) \to \max, \quad u \in U. \tag{2}$$

Примем за меру множества $V(u)$ интеграл

$$\mu(V(u)) = \int_{V(u)} \rho(v)dv,$$

где $\rho(v) \ge 0$ — заданная непрерывная функция. Ее можно трактовать как функцию “плотности” возмущений. Тогда задача (2) примет вид

$$J(u) = -\int_{V(u)} \rho(v)dv \to \min, \quad u \in U. \tag{3}$$

2. Вычисление градиента показателя живучести

Введем обозначения

$$V(u+\Delta u) = \{v : f(u+\Delta u,\, v) \le 0\}, \quad V(u) = \{v : f(u,v) \le 0\},$$
$$V_-(u,\, u+\Delta u) = \{v : f(u,v) \le 0,\; f(u+\Delta u,\, v) \ge 0\},$$
$$V_+(u,\, u+\Delta u) = \{v : f(u,v) \ge 0,\; f(u+\Delta u,\, v) \le 0\}.$$

Вычислим приращение показателя живучести

$$\Delta J(u) = J(u+\Delta u) - J(u) = -\Big[\int\limits_{V(u+\Delta u)} \rho(v)dv - \int\limits_{V(u)} \rho(v)dv\Big].$$

Для фиксированных u, $u+\Delta u$ из U имеем

$$\int\limits_{V(u+\Delta u)} \rho(v)dv = \int\limits_{V(u)} \rho(v)dv - \int\limits_{V_-(u,u+\Delta u)} \rho(v)dv + \int\limits_{V_+(u,u+\Delta u)} \rho(v)dv,$$

поэтому

$$\Delta J(u) = \int\limits_{V_+(u,u+\Delta u)} \rho(v)dv - \int\limits_{V_-(u,u+\Delta u)} \rho(v)dv. \tag{4}$$

Все дальнейшие построения будем вести в пространстве параметров $v_1, v_2, \ldots, v_s$ при фиксированных u, $u+\Delta u$. В точке v поверхности $f(u,v) = 0$ определен градиент $f_v(u,v)$. Через точку v в направлении градиента проведем прямую L: $\omega = v + \lambda f_v(u,v)$, $|\lambda| < \infty$. Точка пересечения прямой L с поверхностью $f(u+\Delta u,\, v) = 0$ должна удовлетворять уравнению $\varphi(u,v,\lambda,\Delta u) = f(u+\Delta u,\, v+\lambda f_v(u,v)) = 0$. Легко убедиться, что левая часть этого уравнения непрерывно дифференцируема по λ и удовлетворяет условиям $\varphi(u,v,0,0) = 0$, $\varphi_\lambda(u,v,0,0) = \|f_v(u,v)\|^2 > 0$. В этом случае теорема о неявной функции гарантирует существование единственного дифференцируемого в малой окрестности точки u, v, $\Delta u = 0$ решения

$$\lambda = \lambda(u,v,\Delta u) = a(u,v)'\Delta u + o(u,v,\|\Delta u\|), \tag{5}$$

для которого справедливо тождество

$$f(u+\Delta u,\, v+\lambda(u,v,\Delta u) f_v(u,v)) \equiv 0. \tag{6}$$

Здесь остаточный член $o(u,v,\|\Delta u\|)$ равномерно по u, v имеет порядок малости выше $\|\Delta u\|$, поэтому будем обозначать его $o(\|\Delta u\|)$.

Из (6) путем дифференцирования по Δu находим

$$a(u,v) = -\frac{1}{\|f_v(u,v)\|^2} f_u(u,v). \tag{7}$$

Подставив (7) в (5), получим

$$\lambda(u,v,\Delta u) = -\frac{f_u'(u,v)\Delta u}{\|f_v(u,v)\|^2} + o(\|\Delta u\|). \tag{8}$$

Соответствующая $\lambda = \lambda(u,v,\Delta u)$ точка

$$\omega(u,v,\Delta u) = v + \lambda(u,v,\Delta u) f_v(u,v) + o(\|\Delta u\|) \tag{9}$$

лежит на поверхности $f(u+\Delta u,\, v) = 0$. Очевидно, при $\lambda(u,v,\Delta u) < 0$ точка $\omega(u,v,\Delta u)$ находится в области $V_-(u,\, u+\Delta u)$ и при $\lambda(u,v,\Delta u) > 0$ — в области $V_+(u,\, u+\Delta u)$.

Обозначим

$$S_+(u,u+\Delta u) = \{v \in V : f(u,v) = 0,\ \lambda(u,v,\Delta u) > 0\},$$
$$S_-(u,u+\Delta u) = \{v \in V : f(u,v) = 0,\ \lambda(u,v,\Delta u) < 0\}. \tag{10}$$

Вычислим объем элементарного цилиндра, ограниченного поверхностями $f(u,v) = 0$, $f(u+\Delta u, v) = 0$, с образующей, параллельной градиенту $f_v(u,v)$, и с площадью поперечного сечения ds. Для высоты цилиндра $h = \|\omega(u,v,\Delta u) - v\|$ с учетом (9) получим $h = |\lambda(u,v,\Delta u)|\, \|f_v(u,v)\| + o(\|\Delta u\|)$. Поэтому объем элементарного цилиндра вычисляется по формуле $dv = h\,ds = |\lambda(u,v,\Delta u)|\, \|f_v(u,v)\| ds + o(\|\Delta u\|)ds$.

Учитывая знаки функции $\lambda(u,v,\Delta u)$ в областях (10) и формулу (8), получим

$$dv = -\frac{f_u(u,v)'\Delta u}{\|f_v(u,v)\|}ds + o(\|\Delta u\|)ds, \quad (u,v) \in S_+(u,u+\Delta u),$$
$$dv = \frac{f_u(u,v)'\Delta u}{\|f_v(u,v)\|}ds + o(\|\Delta u\|)ds, \quad (u,v) \in S_-(u,u+\Delta u). \tag{11}$$

Для перехода в правой части равенства (4) от интеграла по объему к интегралу по поверхности используем определение интеграла. С этой целью будем считать, что множества V_+, V_- разбиты на попарно непересекающиеся цилиндры V_{i+}, V_{i-} по описанному выше правилу так, что

$$V_+ = \bigcup_{i=1}^{n} V_{i+}, \quad V_{i+} \bigcap V_{j+} = \phi \quad \text{при } i \neq j,$$
$$V_- = \bigcup_{i=1}^{n} V_{i-}, \quad V_{i-} \bigcap V_{j-} = \phi \quad \text{при } i \neq j$$

и $\operatorname{mes} V_{i+} = dv_{i+}$, $\operatorname{mes} V_{i-} = dv_{i-}$, $i = \overline{1,n}$. Выберем в каждом элементарном цилиндре V_{i+}, V_{i-} произвольную точку v_{i+}, v_{i-}, $i = \overline{1,n}$, лежащую на поверхности $f(u,v) = 0$. Тогда с учетом (11) имеем

$$\int_{V_+} \rho(v)dv = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(v_{i+})dv_{i+} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(v_{i+})\Big(-\frac{f_u(u,v_{i+})'\Delta u}{\|f_v(u,v_{i+})\|}\Big) ds_{i+} + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \rho(v_{i+}) o(u, v_{i+}, \|\Delta u\|) ds_{i+},$$

где ds_{i+} — "площадь" поперечного сечения элементарного цилиндра V_{i+}. В пределе получим

$$\int_{V_+} \rho(v)dv = \int\limits_{S_+(u,u+\Delta u)} \rho(v)\Big[-\frac{f_u(u,v)'\Delta u}{\|f_v(u,v)\|}\Big] ds + \eta,$$
$$\eta = \int\limits_{S_+(u,u+\Delta u)} \rho(v) o(u,v,\|\Delta u\|) ds. \tag{12}$$

Оценим остаточный член η. Выберем произвольное малое $\varepsilon > 0$. В силу равномерной малости остаточного члена $o(u,v,\|\Delta u\|)$ в области $U \times V$ по Δu найдется такое малое $\delta > 0$, что

$$\frac{|o(u,v,\|\Delta u\|)|}{\|\Delta u\|} < \varepsilon \quad \text{для всех } u \in U,\, v \in V \text{ при } \|\Delta u\| < \delta.$$

Тогда

$$|\eta| = \Big| \int_{S_+} \rho(v) o(u,v,\|\Delta u\|) ds \Big| \leq \varepsilon \|\Delta u\| \int_{S_+} \rho(v) ds.$$

Следовательно,
$$0 \le \frac{|\eta|}{\|\Delta u\|} \le \varepsilon \int_{S_+} \rho(v)dv.$$
Поскольку ε — произвольно малое положительное число, то $|\eta| = o(\|\Delta u\|)$ и (12) запишется в виде
$$\int_{V_+} \rho(v)dv = \int_{S_+} \rho(v)\Big(- \frac{f_u(u,v)'\Delta u}{\|f_v(u,v)\|}\Big) ds + \widehat{\imath}_+(\|\Delta u\|).$$
Действуя аналогично, получим
$$\int_{V_-} \rho(v)dv = \int_{S_-} \rho(v)\Big(\frac{f_u(u,v)'\Delta u}{\|f_v(u,v)\|}\Big) ds + \widehat{\imath}_-(\|\Delta u\|).$$
В результате формула (4) примет вид
$$\Delta J(u) = \Big(- \int_S \frac{\rho(v)}{\|f_v(u,v)\|} f_u(u,v) ds\Big)' \Delta u + \widehat{\imath}(\|\Delta u\|),$$
где $S = S_+ \bigcup S_-$, $\widehat{\imath}(\|\Delta u\|) = \widehat{\imath}_+(\|\Delta u\|) + \widehat{\imath}_-(\|\Delta u\|)$. Отсюда имеем
$$\operatorname{grad} J(u) = - \int_S \frac{\rho(v)}{\|f_v(u,v)\|} f_u(u,v) ds. \tag{13}$$
Здесь ds — лебеговый элемент “площади” поверхности S.

3. Необходимые условия оптимальности

Формула (13) позволяет в конструктивной форме записать для задачи (3) известные в теории выпуклой оптимизации [3] необходимые условия оптимальности.

Теорема. *Пусть u^* — локальное решение задачи* (3), *причем множество U выпуклое и функция $J(u)$ непрерывно дифференцируема на U. Тогда*
$$\langle \operatorname{grad} J(u^*), u - u^* \rangle \ge 0 \quad \forall u \in U.$$

Доказательство этого утверждения аналогично [3].

Перейдем к детализации метода условного градиента [3] для поиска оптимальных решений в задаче (3). Пусть задано начальное приближение $u^0 \in U$ и методом условного градиента вычислено $u^k \in U$. Определим $\overline{u}^k \in U$ из решения вспомогательной задачи
$$J_k(\overline{u}^k) = \min_{u \in U} J_k(u) \quad (J_k(u) = \langle \operatorname{grad}(u^k), u - u^k \rangle).$$
На отрезке прямой
$$u^k(\alpha) = u^k + \alpha(\overline{u}^k - u^k), \quad \alpha \in [0,1],$$
введем функцию одной переменной
$$\Phi_k(\alpha) = J(u^k(\alpha)), \quad \alpha \in [0,1],$$
и решим задачу одномерной минимизации
$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha \in [0,1]} \Phi_k(\alpha). \tag{14}$$
Следующее приближение найдем по формуле
$$u^{k+1} = u^k(\alpha_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
Понятно, что точное определение α_k из условия (14) методами одномерной минимизации возможно далеко не всегда, поэтому обычно на практике задают $\alpha_k = 1$ и проверяют условие убывания $J(u^{k+1}) < J(u^k)$. Если оно не выполняется, то берут $\alpha_k = 0.5$ до тех пор, пока это условие

выполнится. Практическим критерием окончания процесса вычислений естественно выбрать неравенства

$$|J_k(\overline{u}^k)| \le \delta_1, \quad J(u^k) - J(u^{k+1}) \le \delta_2,$$

где δ_1, δ_2 — согласованные числа, характеризующие точность счета.

Литература

1. Ащепков Л.Т. *К проблеме повышения живучести управляемых систем* // Модели и мет. исслед. операций. – Новосибирск: Наука, 1988.
2. Долгий Д.В. *Управление линейными системами в условиях неопределенности*: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Владивосток, 1995.
3. Васильев О.В. *Лекции по методам оптимизации.* – Иркутск: Изд-во Иркутск. ун-та, 1994.

Институт физики и технологии
Академии наук Монголии

Поступила
27.08.2001