ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 3 (502)

УДК 517.983

*Г.Г. СКОРИК*

# О НАИЛУЧШЕЙ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА УСРЕДНЯЮЩИХ ЯДЕР В ЗАДАЧЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ЗАШУМЛЕННОЙ ФУНКЦИИ

## 1. Постановка задачи и предварительные сведения

Рассматривается задача устойчивой аппроксимации производной

$$(Ty)(t) \equiv \frac{d^m y(t)}{dt^m} = x(t), \quad m \geq 1, \tag{1.1}$$

в пространстве $C(-\infty,\infty)$ , когда функция $y$ задана своим $\delta$-приближением $y_\delta$, $\|y-y_\delta\| \leq \delta$. Регуляризующее семейство операторов $R_\alpha$, которое порождает устойчивый метод аппроксимации, конструируется на основе метода средних функций [1], [2]

$$R_\alpha y_\delta(t) = \int\limits_{|t-s|\leq\alpha} \frac{d^m \omega_\alpha(t,s)}{dt^m} y_\delta(s)\, ds, \tag{1.2}$$

где $\omega_\alpha(t,s)$ — семейство усредняющих $m$-непрерывно дифференцируемых, в частности, бесконечно дифференцируемых по $t$ и $s$ функций, удовлетворяющих некоторым условиям (см. п. 2).

Для оценки погрешности метода вводится класс допустимых функций — множество равномерной регуляризации

$$M_r^p = \{y : y \in C^{m+p}(-\infty,\infty),\ \|y^{(m+p)}\|_C \leq r\},$$

где $p \geq 1$. Тогда для задачи дифференцирования (1.1) погрешность метода аппроксимации (регуляризации) $R$ на классе $M_r^p$ характеризуется величиной

$$\gamma_\delta(T;R;M_r^p) = \sup\{\|Ry_\delta - Ty\|_C : \|y-y_\delta\|_C \leq \delta,\ y \in M_r^p,\ y_\delta \in C(-\infty,\infty)\}.$$

Метод средних функций в задаче дифференцирования был предложен в [1], где при $m=1$, $p=1$ для функции Соболева $\omega_\alpha(t,s)$ была вычислена мажорантная оценка величины $\gamma_\delta(d/dt, R_\alpha, M_r^p)$ и показана оптимальность метода по порядку. В [3] рассмотрен случай $m=1$, $p=2$ и получена оценка сверху величины $\gamma_\delta$.

В данной статье для целого класса средних функций вида

$$\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)$$

точно вычислена величина $\gamma_\delta$ для произвольных $m$ и $p$ (пп. 1, 2), при подходящей связи $\alpha$, $\delta$ и $r$ показана оптимальность по порядку (п. 3). Дан отрицательный ответ на вопрос о возможности построения оптимального регуляризатора для случая $m=1$, $p=1$ на основе метода средних функций с гладкими $\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha\omega\left((t-s)/\alpha\right)$ и указан способ построения регуляризатора, сколь угодно близкого к оптимальному (п. 4).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 03-01-00099).

**Определение 1.1.** Пусть $X$, $Y$ — линейные нормированные пространства. Семейство отображений $\{R_\alpha\}$, $R_\alpha : Y \to X$, называется регуляризующим семейством операторов или регуляризующим алгоритмом (РА) задачи (1.1) в точке $y$, если выполнены условия

1. $\exists \alpha = \alpha(\delta) : \forall \delta > 0 \ \alpha(\delta) > 0 \ \& \ \lim\limits_{\delta \to 0} \alpha(\delta) = 0$,
2. $\forall \alpha > 0 \ \mathfrak{D}(R_\alpha) = Y$,
3. $\lim\limits_{\delta \to 0} \sup\limits_{y_\delta : \|y - y_\delta\| \le \delta} \|R_\alpha(\delta) y_\delta - Ty\| = 0$.

Если условие 3 выполнено для любого $y \in \mathfrak{D}(T)$, то говорят о РА для задачи (1.1). Если $\{R_\delta\}$ — РА для (1.1), то множество $\{x_\delta : x_\delta = R_\delta y_\delta, \ 0 < \delta \le \delta_0\}$ называется регуляризованным семейством приближенных решений, а каждый оператор $R_\delta$ — регуляризатором задачи.

Сформулируем задачу о нахождении наилучшего линейного регуляризатора для задачи (1.1) на множестве $M_r^p$. Пусть

$$\inf_{R \in B(Y \to X)} \gamma_\delta(T; R; M_r^p) = \Omega_\delta(T; M_r^p), \tag{1.3}$$

где $B : Y \to X$ — пространство линейных ограниченных операторов.

**Определение 1.2.** Оператор $R_\delta^*$, на котором реализуется нижняя грань в задаче (1.3), называется *оптимальным регуляризатором* задачи (1.1) на классе $M_r^p$, а $\{R_\delta^* : 0 < \delta \le \delta_0\}$ — *оптимальным регуляризующим семейством.*

Величина $\Omega_\delta(T; M_r^p)$ — погрешность оптимального метода для задачи (1.1) на классе $M_r^p$ при заданном уровне погрешности $\delta$.

**Определение 1.3.** Регуляризующее семейство операторов $\{R_\delta\}$ называется *оптимальным по порядку* на множестве $M_r^p$, если

$$\frac{\sup\left\{\|R_\delta y_\delta - Ty\|_C : y \in M_r^p, \|y - y_\delta\| \le \delta\right\}}{\Omega_\delta(T; M_r^p)} \le K < \infty, \tag{1.4}$$

где $K \ge 1$; $K = 1$ соответствует оптимальному алгоритму.

## 2. Погрешность метода средних функций

Пусть $\{\omega_\alpha(t,s)\}$ — параметризованное семейство функций, обладающее свойствами

1. $\{\omega_\alpha(t,s)\}$ — непрерывно дифференцируема по совокупности переменных до $m$-го порядка включительно (в частности, бесконечно дифференцируема);
2. носителем функции $\omega_\alpha(t,s)$ является множество $|t - s| \le \alpha$;
3. $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad \int\limits_{|t-s| \le \alpha} \omega_\alpha(t,s)\, ds = \int\limits_{|t-s| \le \alpha} \omega_\alpha(t,s)\, dt = 1$.

При этих условиях функция

$$y_\alpha(t) = \int\limits_{|t-s| \le \alpha} \omega_\alpha(t,s) y(s)\, ds \tag{2.1}$$

непрерывно дифференцируема $m$ раз и аппроксимирует $y$ при $\alpha \to 0$ в пространстве $L_p$ (см [4], с. 18–19).

Функция $y_\alpha$, определенная формулой (2.1), называется средней функцией от $y \in C(-\infty, \infty)$. Нетрудно проверить, что

$$\frac{d^m y_\alpha(t)}{dt^m} = \int\limits_{|t-s| \le \alpha} \frac{d^m \omega_\alpha(t,s)}{dt^m} y(s)\, ds.$$

Это соотношение вместе с упомянутым свойством средней функции (2.1) позволяет конструировать регуляризатор для задачи (1.1) в форме (1.2).

Приведем пример функции $\omega_\alpha(t,s)$, обладающей свойствами 1–3. Это усредняющая функция Соболева ([4], с.18)

$$\omega_\alpha(t,s) = \begin{cases} c_\alpha \exp\left[(t-s)^2/\left((t-s)^2-\alpha^2\right)\right], & |t-s|<\alpha; \\ 0, & |t-s|\ge\alpha, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $c_\alpha = \left[\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \exp\left[(t-s)^2/\left((t-s)^2-\alpha^2\right)\right] ds\right]^{-1}$.

Пусть $\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)$, где функция $\omega(x)$ $m$ раз непрерывно дифференцируема и имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$, т.е. $\omega(x)=0$ при $x\notin[-1,1]$. Величина $c_\alpha$ определяется из условия

$$\int\limits_{|t-s|\le\alpha} \omega_\alpha(t,s)\,ds = 1 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{|t-s|\le\alpha} c_\alpha\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) ds = 1 \;\Leftrightarrow\; \int\limits_{-1}^{1} \alpha c_\alpha \omega(x)\,dx = 1 \;\Leftrightarrow\; c_\alpha = \frac{1}{\alpha h},$$

где $h = \int\limits_{-1}^{1} \omega(x)\,dx$.

При этих условиях регуляризатор (1.2) принимает вид

$$R_\alpha y(t) = c_\alpha \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} \frac{d^m}{dt^m}\left(\omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)\right) y(s)\,ds = \frac{1}{\alpha^{m+1}h} \int\limits_{t-\alpha}^{t+\alpha} \omega^{(m)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y(s)\,ds.$$

Введем обозначения

$$h_k = \int_{-1}^{1} \omega(x)x^k\,dx, \quad \nu_k = \int_{-1}^{1}\left|\frac{d^k}{dx^k}\omega(x)\right| dx,$$
$$d_p = \int_0^1 \left|\int_x^1 \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds\right| dx + \int_{-1}^{0}\left|\int_{-1}^{x} \omega(s)(x-s)^{p-1}\,ds\right| dx.$$

Тогда справедлива

**Теорема 2.1.** *Пусть функция $\omega$ принадлежит $C^{(m)}(-\infty,\infty)$ и имеет своим носителем отрезок $[-1,1]$. Пусть либо $p=1$, либо функция $\omega$ такая, что $h_k=0$, $1\le k\le p-1$, тогда справедливо равенство*

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_r^p) = \frac{\delta\nu_m}{h\alpha^m} + \frac{r\,d_p\alpha^p}{h(p-1)!}. \tag{2.3}$$

*В противном случае $\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_r^p)=\infty$, т.е. погрешность метода неограниченна.*

## 3. Проблема оптимальности метода

В предыдущем разделе было показано точное значение погрешности метода. Естественно выбрать параметр $\alpha$ таким, чтобы эта погрешность была минимальной. Минимизируя правую часть равенства (2.3), находим наилучшее значение параметра

$$\alpha = \left(\frac{m\delta\nu_m(p-1)!}{prd}\right)^{\frac{1}{m+p}}.$$

При таком выборе $\alpha$

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_r^p) = \frac{d_p^{\frac{m}{m+p}}\nu_m^{\frac{p}{m+p}}}{h_m}\left(\left(\frac{p}{m(p-1)!}\right)^{\frac{m}{m+p}} + \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{m}{p}\right)^{\frac{p}{m+p}}\right)\delta^{\frac{p}{m+p}} r^{\frac{m}{m+p}}.$$

Заметим, что к настоящему времени известны оптимальные регуляризаторы при всех $m$, $p$ (см. [5]). Естественно возникает вопрос, можно ли построить оптимальный регуляризатор на основе метода средних функций?

Рассмотрим случай, когда $m = 1$, $p = 1$, а функция $\omega$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. При этих условиях $\gamma_\delta = \frac{2\sqrt{\nu_1 d_1}}{h}\sqrt{\delta r}$ — погрешность метода средних функций. Для этого же случая, когда в пространстве непрерывных функций оценивается первая производная при ограниченной второй, известен оптимальный регуляризатор с погрешностью $\Omega_\delta(T; M_r^1) = \sqrt{2\delta r}$ (см. [6]). Из определения 1.3 следует, что $K = K(\omega) = \frac{\sqrt{2\nu_1 d_1}}{h} \geq 1$. Возникает вопрос, существует ли такая функция $\omega$, чтобы коэффициент $K$ был равен единице, что означает оптимальность метода. На него отвечает

**Теорема 3.1.** *Пусть $m = 1$, $p = 1$ и функция $\omega$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда для этой функции $\omega$ константа $K$ из формулы (1.4) удовлетворяет строгому неравенству $K > 1$, т. е. метод средних функций с гладким ядром вида $\omega_\alpha(t,s) = c_\alpha \omega\left(\frac{t-s}{\alpha}\right)$ не является оптимальным, а только оптимальным по порядку.*

Хотя для случая $m = 1$ и $p = 1$ метод средних функций при любых допустимых функциях $\omega$ не будет оптимальным, можно выбрать такие $\omega$, что метод станет сколь угодно близким к оптимальному, т. е. можно говорить об асимптотической оптимальности метода средних функций.

Следующий пример показывает, как строить такие усредняющие ядра $\omega$, если в качестве основы взять функцию Соболева (2.2).

Рассмотрим последовательность функций $\{\omega_n(x)\}$ вида

$$\omega_n(x) = \begin{cases} e^{\left(\frac{x^{2n}}{x^{2n}-1}\right)}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\nu_1(\omega_n) = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} d_1(\omega_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} h(\omega_n) = 2$, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} K(\omega_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\nu_1(\omega_n) d_1(\omega_n)}}{h(\omega_n)} = 1$.

## 4. Случай дробной производной

Рассмотрим задачу вычисления дробной производной функции, заданной с погрешностью. Как и в случае $m$-й производной (см. (1.1)), оператор дробного дифференцирования является неограниченным как в пространстве $C$, так и в $L_1$. Поэтому задача аппроксимации дробной производной функции, заданной с погрешностью, относится к числу некорректно поставленных.

В соответствии с ([7], с. 95) определим дробную производную порядка $\beta$ функции $y$ по формуле

$$(Ty)(t) \equiv y^{(\beta)}(t) = \frac{\beta}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^\infty \frac{y(t) - y(t-s)}{s^{1+\beta}}\, ds.$$

Применение метода средних функций к задаче нахождения дробной производной приводит к регуляризатору

$$R_\alpha y(t) = \frac{1}{\alpha^{\beta+1} h} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{(\beta)}\left(\frac{t-s}{\alpha}\right) y(s)\, ds,$$

где функция $\omega$ принадлежит $C^1(-\infty, \infty)$ и имеет своим носителем отрезок $[-1, 1]$, $h = \int\limits_{-1}^{1} \omega(s)\, ds$.

Введем обозначение $y^{(\beta+1)} = \frac{d}{dt} y^{(\beta)}(t)$ (см. [7], с. 100) и рассмотрим два класса допустимых функций $y$:

$$M_C^r = \{y \in C(-\infty, \infty) : y^{(\beta+1)} \in C(-\infty, \infty),\ \|y^{(\beta+1)}\|_C \leq r\},$$
$$M_{L_1}^r = \{y \in L_1(-\infty, \infty) : y^{(\beta+1)} \in L_1(-\infty, \infty),\ \|y^{(\beta+1)}\|_{L_1} \leq r\}.$$

**Теорема 4.1.** *Пусть* $\omega$ *принадлежит* $C^1(-\infty,\infty)$ *и имеет своим носителем отрезок* $[-1,1]$. *Тогда*

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_C^r)=\frac{\delta\nu_\beta}{h\alpha^\beta}+\frac{r\,d\alpha}{h}, \tag{4.1}$$

$$\gamma_\delta(T;R_\alpha;M_{L_1}^r)\le\frac{\delta\nu_\beta}{h\alpha^\beta}+\frac{r\,d\alpha}{h},$$

*где* $\nu_\beta=\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\omega^{(\beta)}(s)|\,ds,\ d=\int\limits_0^1\Big|\int\limits_x^1\omega(s)\,ds\Big|\,dx+\int\limits_{-1}^0\Big|\int\limits_{-1}^x\omega(s)\,ds\Big|\,dx.$

Правая часть равенства (4.1) будет наименьшей, когда $\alpha=\left(\frac{\delta\,\nu_\beta\beta}{rd_1}\right)^{\frac{1}{1+\beta}}$. При такой связи между $\alpha$ и $\delta$

$$\gamma_\delta(T;R_{\alpha(\delta)};M_C^r)=\frac{\nu_\beta^{\frac{1}{1+\beta}}d_1^{\frac{\beta}{1+\beta}}\left(\beta^{-\frac{\beta}{1+\beta}}+\beta^{\frac{1}{1+\beta}}\right)}{h}\delta^{\frac{1}{1+\beta}}r^{\frac{\beta}{1+\beta}}.$$

**Замечание.** В работе [8] изучалась задача Стечкина о наилучшем приближении оператора дробного дифференцирования порядка $\beta$ на классе функций с ограниченной производной дробного порядка $\sigma$ в пространстве $C(0,\infty)$. При $0<\beta<\sigma<2$ найдено точное решение задачи Стечкина, а это по известной схеме (см., напр., [9]) дает оптимальный регуляризатор. Задача о регуляризации оператора дифференцирования в пространстве $C(-\infty,\infty)$, насколько нам известно, ранее не рассматривалась.

## Литература


1. Васин В.В. *Регуляризация задачи численного дифференцирования* // Матем. зап. Уральск. ун-та. – 1969. – Т. 7. – № 2. – С. 29–33.
2. Васин В.В. *Об устойчивом вычислении производной в пространстве* $C(-\infty,\infty)$ // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т. 13. – № 6. – С. 1383–1389.
3. Groetch C.W. *Optimal order of accuracy in Vasin's method for differentiation of noisy functions* // J. Optimiz. Theory. Appl. – 1992. – V. 74. – № 2. – P. 373–378.
4. Соболев С.Л. *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. – 255 с.
5. Арестов В.В. *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи* // УМН. – 1996. – Т. 51. – Вып. 6. – С. 89–124.
6. Стечкин С.Б. *Наилучшее приближение линейных операторов* // Матем. заметки. – 1967. – Т. 1. – № 2. – С. 137–148.
7. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техн., 1987. – 688 с.
8. Arestov V.V. *Inequalites for fractional derivatives on the half-line* // J. Approxim. Theory. – Warsaw: PWN-Pol. Sci. Publ. – 1979. – V. 4. – P. 19–34.
9. Васин В.В. *Оптимальные методы вычисления значений неограниченных операторов* // Препринт № 77-59. Ин-т кибернетики АН УССР. – Киев, 1977. – 17 с.



*Уральский государственный университет*



*Поступила* 16.06.2003