ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 8 (435)

УДК 514.762

А.А. ГРИГОРЬЯНЦ

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ТЕНЗОРА КРУЧЕНИЯ СВЯЗНОСТИ

1. Введение

Среди инвариантов связности на многообразии важнейшими, как известно, являются тензоры кривизны и кручения. Классическая геометрическая трактовка этих тензоров хорошо известна (напр., [1], сс. 417–420, 494–507). Однако в отличие от тензора кривизны геометрическая трактовка тензора кручения некоторыми авторами считается не вполне удовлетворительной (напр., [2], с. 50). В данной работе предлагается новая геометрическая интерпретация тензора кручения связности на многообразии, которая на наш взгляд отличается от классической инвариантностью и геометрической наглядностью конструкции. По нашим сведениям предложенная трактовка в действительности является новой (см. обзорные статьи [3], [4]).

Для данной связности ∇ (здесь и далее пишем "связность" вместо "линейная связность") на многообразии M рассмотрим сопряженную связность ∇^* в кокасательном расслоении. Ей соответствует некоторое распределение H^* на многообразии T^*M. (В дальнейшем мы часто не делаем терминологического различия между связностью и соответствующим распределением.) Пусть $H^{*\perp}$ — распределение, ортогональное H^* в канонической симплектической структуре кокасательного многообразия. Докажем, что $H^{*\perp}$ также является связностью. Один из основных результатов работы состоит в следующем: *если* $\nabla^\perp$ *— оператор связности, сопряженной к* $H^{*\perp}$, *то* $T = \nabla - \nabla^\perp$ *— тензор кручения связности* ∇.

В силу этого тензор кручения тогда и только тогда равен нулю, когда распределение H^* лагранжево, т. е. H^*_p — лагранжево подпространство симплектического пространства T_pT^*M, где $p \in T^*M$. Таким образом, можно сказать, что тензор кручения связности ∇ есть "мера нелагранжевости" сопряженной связности ∇^*. Точные формулировки приведены в п. 3.

Не удивительно, что при наличии множества инвариантных определений определение линейной связности в векторном расслоении как распределения на тотальном пространстве расслоения не пользуется популярностью по причине неинвариантности фразы: "горизонтальное распределение, линейно зависящее от координат вдоль слоя". Но оно обладает преимуществом геометрической наглядности. Так как наша конструкция опирается именно на это определение, приводим его инвариантную формулировку (см. определение в п. 2).

Связность $\nabla^\perp$ можно построить непосредственно по ∇, т. е. не обращаясь к T^*M. Связь между ∇ и $\nabla^\perp$ осуществляется посредством канонической инволюции второго касательного расслоения. В операторной интерпретации связь эта очевидна и дается формулой $\nabla^\perp_X Y = \nabla_Y X + [X, Y]$. Аналогичная связь имеется между операторами связностей $H^{*\perp}$ и H^*, которые обозначим $\nabla^{*\perp}$ и ∇^* соответственно: $\langle \nabla^{*\perp}_X \alpha, Y\rangle = \langle \nabla^*_Y \alpha, X\rangle + \langle d\alpha, X \wedge Y\rangle$. Наша терминология и обозначения близки к терминологии и обозначениям, принятым в [5]. Векторное расслоение $\pi : E \to M$ обозначаем через E, кроме того положим $n = \dim E$ и $m = \dim M$. Модуль сечений расслоения E обозначается через $\mathbf{E}$, модули векторных и ковекторных полей — через $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}^*$ соответственно. E_x означает слой расслоения E над $x \in M$. Для координат используются следующие обозначения: $(x^i) = \mathbf{x}$ — для координат точки многообразия; $(X^i) = \mathbf{X}$ — для координат вектора из TM в базисе $\partial/\partial x^i$; $(p^i) = \mathbf{p}$ — для координат вектора из T^*M в базисе

dx^i; $(Y^i,\xi^i) = (\mathbf{Y},\boldsymbol{\xi})$ — для координат вектора из TTM в базисе $\partial/\partial x^i$, $\partial/\partial X^i$, $(a^i) = \mathbf{a}$ — для координат в слое расслоения E и т. д.

Пусть E и F — векторные расслоения над M. Мы отождествляем расслоения $E^*\otimes F$ и $\mathrm{Hom}(E,F)$ посредством канонического изоморфизма между ними. Если S — сечение расслоения $E^*\otimes F$ и X — сечение E, то $S(X)$ или $\langle S;X\rangle$ обозначает соответствующую свертку. Кроме того, проекции различных расслоений обозначаем одной и той же буквой π. Если $f : M' \to M$ — гладкое отображение, то для поднятых посредством f на M' объектов (гомоморфизмов, расслоений, сечений и т. д.) используем те же обозначения, что и для исходных объектов над M.

2. Об инвариантной форме условий горизонтальности

Пусть $\pi : E \to M$ — векторное расслоение. Дифференциал $d\pi : TE \to TM$ проекции π определяет морфизм расслоений $TE \to \pi^*(TM)$ над E, который тоже обозначим $d\pi$. $\mathrm{Ker}(d\pi)$ — подрасслоение вертикальных подпространств в TE. Так как линейное пространство изоморфно своему касательному пространству в любой точке, то определено вложение $\iota : \pi^*E \to TE$ расслоений над E, отождествляющее слой расслоения π^*E, рассматриваемый как подмногообразие в E, с его касательным пространством в данной точке. При этом $\iota(\pi^*E) = \mathrm{Ker}(d\pi)$, т. е. следующая короткая последовательность расслоений, составленная из ι и $d\pi$,

$$0 \to \pi^*E \to TE \to \pi^*(TM) \to 0 \tag{2.1}$$

точна ([6], с. 155).

Связность H в расслоении E можно интерпретировать как расщепление (2.1), удовлетворяющее дополнительно “условию линейности”, которое можно выразить следующим образом: распределение H должно линейно зависеть от координат вдоль слоя расслоения E.

Чтобы придать этому определению инвариантную форму, воспользуемся конструкцией касательного расслоения к расслоению E. Тройка $(TE, d\pi, TM)$ наделяется структурой $2n$-мерного векторного расслоения ([6], с. 152), которое называется касательным расслоением к расслоению E.

Мы явно опишем линейную структуру в слоях расслоения TE.

Пусть E_1 и E_2 — пара векторных расслоений над M, и $E_1\oplus E_2$ — их сумма Уитни. Многообразие $T(E_1\oplus E_2)$ обладает структурой двойного расслоения с базами TM и $E_1\oplus E_2$. Пусть теперь $TE_1\oplus TE_2$ — сумма Уитни над TM расслоений TE_1 и TE_2. Определим проекцию $\pi : TE_1\oplus TE_2 \to E_1\oplus E_2$ по формуле: $\pi(\xi_1,\xi_2) = (\pi_1(\xi_1), \pi_2(\xi_2))$, где $\pi_i : TE_i \to E_i$ — канонические проекции. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccc} TE_i & \longrightarrow & E_i \\ \big\downarrow{\scriptstyle d\pi_i} & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi_i} \\ TM & \longrightarrow & M \end{array}$$

следует, что отображение π корректно определено. Тройка $(TE_1\oplus TE_2,\ \pi,\ E_1\oplus E_2)$ является векторным расслоением со слоем $(TE_1\oplus TE_2)_{(a,b)} = \{(\xi_1,\xi_2) \mid \xi_1 \in T_aE_1,\ \xi_2\in T_bE_2;\ \xi_i \in (TE_1\oplus TE_2)_X,\ X\in TM,\ i=1,2\}$, где $a\in E_1$, $b\in E_2$. Сложение в $(TE_1\oplus TE_2)_{(a,b)}$ определяется по формуле $(\xi_1,\xi_2)+(\eta_1,\eta_2) = (\xi_1+\eta_1,\ \xi_2+\eta_2)$, где $\xi_1+\eta_1$ и $\xi_2+\eta_2$ вычисляются в T_aE_1 и T_bE_2 соответственно. Если $\eta_i \in (TE_1\oplus TE_2)_Y$, $i=1,2$, то $\xi_i+\eta_i \in (TE_1\oplus TE_2)_{X+Y}$. Умножение на число определяется аналогично.

Теорема 2.1. *Двойные расслоения $T(E_1\oplus E_2)$ и $TE_1\oplus TE_2$ канонически изоморфны.*

Доказательство. Пусть $\rho_i : E_1\oplus E_2 \to E_i$ — отображения проектирования. По свойству универсальности суммы Уитни найдется единственный морфизм ι такой, что коммутативна диаграмма (над TM)

$$\begin{tikzcd} & T(E_1 \oplus E_2) \arrow[dl, "d\rho_1"'] \arrow[d, "\iota"] \arrow[dr, "d\rho_2"] & \\ TE_1 & TE_1 \oplus TE_2 \arrow[l, "\delta_1"'] \arrow[r, "\delta_2"] & TE_2 \end{tikzcd}$$

Из $\iota(a) = 0$ следует, что $d\rho_i(a) = \delta_i(\iota(a)) = 0$. Но $d\rho_1(a) = d\rho_2(a) = 0$ влечет $a = 0$ (последнюю импликацию легче всего усмотреть в координатах). Итак, ι — мономорфизм. Теперь из совпадения размерностей расслоений $T(E_1 \oplus E_2)$ и $TE_1 \oplus TE_2$ следует, что ι — изоморфизм (над TM). Аналогично доказывается, что ι — изоморфизм и над $E_1 \oplus E_2$. $\square$

В дальнейшем мы отождествляем многообразия $T(E_1 \oplus E_2)$, $TE_1 \oplus TE_2$ посредством ι. Таким образом, можно написать

$$\begin{aligned} &T(E_1 \oplus E_2) = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_i \in TE_i,\ d\pi_1(\xi_1) = d\pi_2(\xi_2)\}, \\ &[T(E_1 \oplus E_2)]_X = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_i \in TE_i,\ d\pi_1(\xi_1) = d\pi_2(\xi_2) = X\}, \quad X \in TM, \\ &[T(E_1 \oplus E_2)]_{(a,b)} = \{(\xi_1, \xi_2) \mid \xi_1 \in T_aE_1,\ \xi_2 \in T_bE_2,\ d\pi_1(\xi_1) = d\pi_2(\xi_2)\}, \end{aligned}$$

$a \in E_1$, $b \in E_2$.

Каноническое вложение $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\lambda \mapsto (\lambda, 0)$ определяет вложение расслоений $i' : \mathbb{R}_{TM} \to T\mathbb{R}_M$. В самом деле, $\mathbb{R}_{TM} = TM \times \mathbb{R}$, а $T\mathbb{R}_M = T(M \times \mathbb{R}) = TM \times \mathbb{R}^2$ и нужно положить $i' = 1_{TM} \times i$. Если теперь $\Pi : E \times \mathbb{R}_M \to E$ — морфизм умножения, то положим $\Pi' = d\Pi \circ (1_{TE} \times i') : TE \times \mathbb{R}_{TM} \to TE$.

Теорема 2.2. *Пусть $\Sigma : E \oplus E \to E$ — морфизм сложения, тогда сложение и умножение в расслоении $d\pi : TE \to TM$ определяются по формулам* i) $\xi + \eta = d\Sigma(\xi, \eta)$*;* ii) $\lambda\xi = \Pi'(\xi, \lambda)$*, где $\xi, \eta \in (TE)_X$; $\lambda \in \mathbb{R}$; $X \in TM$.*

Доказательство. i) Фиксируем тривиализацию (U, φ). Тогда дифференциал $d\Sigma_{(a,b)}$ в точке $(a, b) \in E \oplus E$ задается матрицей

$$\begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_m & E_m \end{pmatrix},$$

где E_n — единичная матрица размера $n \times n$. И, следовательно, $d\Sigma$ действует по правилу $d\Sigma_{(a,b)} : (\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{a}+\mathbf{b}; \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta})$, где $(\mathbf{x}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})$ — координаты вектора $(\xi, \eta) \in T(E \oplus E)$. Аналогичное выражение в координатах имеет сумма $\xi + \eta$.

ii) Дифференциал $d\Pi_{(a,\lambda)}$ в точке $(a, \lambda) \in E \oplus \mathbb{R}_M$ задается матрицей $\begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda E_m & a \end{pmatrix}$, и, следовательно, переводит вектор с координатами $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \mathbf{t}) \in T_{(a,\lambda)}(E \oplus \mathbb{R}_M)$ в вектор с координатами $(\mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda\xi} + \mathbf{ta}) \in T_{\lambda a}E$. Тогда Π' действует по правилу $(\mathbf{a}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}) \mapsto (\mathbf{a}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\lambda}, 0) \mapsto (\boldsymbol{\lambda}\mathbf{a}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\lambda\xi})$, т. е. является умножением вектора с координатами $(\mathbf{a}, \boldsymbol{\xi}) \in T_XE$ на λ, где $X \in T_{\pi(a)}M$. $\square$

Теперь не представляет труда сформулировать инвариантные “условия линейности”, т. е. условия, необходимые и достаточные для того, чтобы распределение на многообразии E задавало связность в расслоении E.

Теорема 2.3. *Распределение H на E, расщепляющее последовательность* (2.1)*, является связностью тогда и только тогда, когда H есть подрасслоение двойного расслоения TE.*

Доказательство. Пусть H — расщепление (2.1) и (U, φ) — некоторая тривиализация. Тогда найдется единственный базис аннулятора H над U вида $\vartheta^i = da^i + e^i_k(\mathbf{x}, \mathbf{a})dx^k$, где ϑ^i — линейные 1-формы, составляющие базис $\mathrm{Ann}(H)$ над U, $(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ — координаты в тривиализации (U, φ) ([5], с. 178). В случае связности функции e^i_k должны быть линейны по $\mathbf{a}$. Линейность же e^i_k по $\mathbf{a}$ равносильна тому, что H есть векторное расслоение над TM. В самом деле, пусть $(\xi_1, \xi_2) \in [H \oplus H]_X$, $X \in TM$. Это значит, что $\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}_i) = \boldsymbol{\xi}_i + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_i)\mathbf{X} = 0$, где $i = 1, 2$ и $(\mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{a}_i, \boldsymbol{\xi}_i)$ — координаты вектора ξ_i в (U, φ). $\xi_1 + \xi_2 \in H_X$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2) = \boldsymbol{\xi}_1 + \boldsymbol{\xi}_2 + \mathbf{e}(\mathbf{x}, \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{X} = 0$.

Таким образом, $\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}_1)+\boldsymbol{\vartheta}(\boldsymbol{\xi}_2)$, т. е. $\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2)=\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_1)+\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{a}_2)$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{e}(\mathbf{x},\mathbf{la})=\mathbf{le}(\mathbf{x},\mathbf{a})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{l}H=H$, где $\mathbf{l}\in\mathbb{R}$. $\square$

Итак, мы пришли к следующему инвариантному определению связности в терминах распределений на E.

Определение. Связностью в векторном расслоении E называется подрасслоение двойного расслоения TE, расщепляющее (2.1).

3. Геометрический смысл тензора кручения в терминах кокасательного расслоения

Пусть ∇ — связность, а (U,φ) — тривиализация в расслоении E. Тогда на U определена тривиальная связность ∇^φ, которая задается равенством $\nabla^\varphi_X s=(Xf^i)s_i$, где s_i — локальный базис сечений, отвечающий тривиализации φ, и $s=f^is_i$. Далее, на U определен тензор деформации Γ, задаваемый равенством

$$\Gamma=\nabla-\nabla^\varphi. \tag{3.1}$$

Пусть ∇^* — сопряженная связность, а φ^* — тривиализация сопряженного расслоения E^*, отвечающая тривиализации φ. Имеет место

Лемма 3.1. i) *Тривиальная связность, отвечающая тривиализации φ^*, сопряжена связности ∇^φ, т. е. имеет место равенство $(\nabla^\varphi)^*=\nabla^{\varphi*}$.*

ii) *Если через Γ^* обозначить тензор деформации связности ∇^*, то операторы $\Gamma(X)$ и $-\Gamma^*(X)$ сопряжены, т. е.*

$$\Gamma(X)^*=-\Gamma^*(X). \tag{3.2}$$

Доказательство. i) Согласно определениям имеем

$$\begin{aligned}\langle\nabla^{\varphi*}_X\alpha,Y\rangle&=(X\alpha_i)Y^i,\\ \langle(\nabla^\varphi)^*_X\alpha,Y\rangle&=X\langle\alpha,Y\rangle-\langle\alpha,\nabla^\varphi_X\rangle=X(\alpha_iY^i)-\alpha_i(XY^i)=\\ &=(X\alpha_i)Y^i+\alpha_i(XY^i)-\alpha_i(XY^i)=(X\alpha_i)Y^i=\langle\nabla^{\varphi*}_X\alpha,Y\rangle.\end{aligned}$$

ii) Учитывая i) и определения Γ и Γ^* в (3.1) и (3.2), можем написать

$$\begin{aligned}&\langle\Gamma^*(X,\alpha),Y\rangle=\langle(\nabla^*_X-\nabla^{\varphi*}_X)\alpha,Y\rangle=\langle\nabla^*_X\alpha,Y\rangle-\langle\nabla^{\varphi*}_X\alpha,Y\rangle=\\ &=X\langle\alpha,Y\rangle-\langle\alpha,\nabla_XY\rangle-\langle\nabla^{\varphi*}_X\alpha,Y\rangle=(X\langle\alpha,Y\rangle-(\langle\alpha,\nabla^\varphi_XY\rangle+\langle\nabla^{\varphi*}_X\alpha,Y\rangle))-\langle\alpha,\Gamma(X,Y)\rangle=\\ &\qquad=X\langle\alpha,Y\rangle-X\langle\alpha,Y\rangle-\langle\alpha,\Gamma(X,Y)\rangle=-\langle\alpha,\Gamma(X,Y)\rangle,\end{aligned}$$

что и доказывает ii). $\square$

Пусть теперь H — связность на многообразии M, H^* — сопряженная связность в T^*M. Пусть также Γ — тензор Кристоффеля H в некоторой системе координат (U,x^i), Γ^* — тензор деформации H^*, а $H^{*\perp}$ — распределение, ортогональное к H^* в канонической симплектической структуре на T^*M (т. е. $H^{*\perp}_p$ есть ортогональное дополнение к H^*_p в симплектическом пространстве T_pT^*M, $p\in T^*M$).

Теорема 3.1. *$H^{*\perp}$ является связностью с тензором деформации $\Gamma^{*\perp}$, определяемым по формуле*

$$\Gamma^{*\perp}(\alpha)=(\Gamma^*(\alpha))^*, \tag{3.3}$$

где α — произвольная линейная форма.

Поясним (3.3): $\Gamma^*(\alpha)$ является оператором (над U) из расслоения TM в T^*M. Сопряженный оператор $(\Gamma^*(\alpha))^*$ действует из $T^{**}M$ в T^*M и (в силу отождествления $T^{**}M=TM$) $(\Gamma^*(\alpha))^*:TM\to T^*M$. Так же по определению должен действовать $\Gamma^{*\perp}(\alpha)$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что если (L,ω) — симплектическое пространство, то L^* каноническим образом наделяется симплектической структурой; соответствующую форму будем обозначать той же буквой ω. Временно обозначим коэффициенты тензора Γ^* через Γ^i_{jk}. Для распределений H^* и $H^{*\perp}$ найдутся 1-формы θ^i и ϑ^i такие, что

$$\theta^i = dp^i + \Gamma^i_{jk} p^j dx^k, \tag{3.4}$$

$$\vartheta^i = dp^i + e^i_k dx^k, \tag{3.5}$$

где (p^i) — координаты в базисе dx^i, (e^i_k) — некоторые гладкие функции на T^*U [5]. Ввиду ортогональности H^* и $H^{*\perp}$ все формы (θ^i) ортогональны всем формам (ϑ^i) в индуцированной симплектической структуре

$$\Omega(\theta^i, \vartheta^i) = 0, \tag{3.6}$$

где Ω — симплектическая форма на T^*M. С другой стороны, согласно (3.4), (3.5) имеем

$$\Omega(\theta^i, \vartheta^{i'}) = \Omega(dp^i, dp^{i'}) + e^{i'}_{k'}\Omega(dp^i, dx^{k'}) + \Gamma^i_{jk}p^j\Omega(dx^k, dp^{i'}) + \Gamma^i_{jk}p^j e^{i'}_{k'}\Omega(dx^k, dx^{k'}).$$

Здесь первое и четвертое слагаемые равны нулю, кроме того, $\Omega(dx^k, dp^m) = -\delta^{km}$. Отсюда $\Omega(\theta^i, \vartheta^{i'}) = e^{i'}_i - \Gamma^i_{ji'}p^j$. А ввиду (3.6) из последней формулы получаем $e^{i'}_i = \Gamma^i_{ji'}p^j$. Итак, функции e^i_k линейны по p^j, т. е. можно написать $e^i_k = \overline{\Gamma}^i_{jk}p^j$. Сравнивая две последние формулы, получим $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^k_{ji}$. Эта формула есть просто координатная форма записи равенства (3.3). $\square$

Рассмотрим четверку связностей H, H^*, $H^{*\perp}$, $(H^{*\perp})^*$. Введем обозначения $H^{*\perp} = H'$, $(H^{*\perp})^* = H''$. Итак, H и H'' — связности в TM, а H^* и H' — в T^*M. Соответствующие ковариантные производные обозначим ∇, ∇^*, ∇', ∇''. Тогда определены тензоры $\nabla - \nabla'' \in T^*M \otimes T^*M \otimes TM$, $\nabla^* - \nabla' \in T^*M \otimes TM \otimes TM$. Имеет место

Теорема 3.2. i) *Справедливо равенство*

$$\nabla - \nabla'' = T, \tag{3.7}$$

где T — тензор кручения ∇.

ii) *Тензоры T и T^* связаны равенством*

$$T^*(X) = -T(X)^*, \tag{3.8}$$

где $X \in TM$.

Доказательство. i) Фиксируем систему координат (U, x^i) и обозначим тензоры деформации наших связностей через Γ, Γ^*, Γ', Γ'' соответственно. Согласно формуле (3.2) имеем

$$\langle \Gamma^*(X,\alpha), Y\rangle = -\langle \alpha, \Gamma(X,Y)\rangle, \tag{3.9}$$

$$\langle \Gamma'(X,\alpha), Y\rangle = -\langle \alpha, \Gamma''(X,Y)\rangle. \tag{3.10}$$

Кроме того, формулу (3.3) можно переписать в виде

$$\langle \Gamma'(X,\alpha), Y\rangle = \langle \Gamma^*(Y,\alpha), X\rangle. \tag{3.11}$$

Подставляя (3.11) и (3.9) последовательно в (3.10), получим

$$\langle \alpha, \Gamma''(X,Y)\rangle = -\langle \Gamma'(X,\alpha), Y\rangle = -\langle \Gamma^*(Y,\alpha), X\rangle = \langle \alpha, \Gamma(Y,X)\rangle.$$

Таким образом, $\Gamma''(X,Y) = \Gamma(Y,X)$. Согласно определению тензора деформации можем написать

$$\begin{aligned}(\nabla - \nabla'')(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla''_X Y = (\nabla^\varphi_X Y + \Gamma(X,Y)) - (\nabla^\varphi_X Y + \Gamma''(X,Y)) = \\ = \Gamma(X,Y) - \Gamma''(X,Y) = \Gamma(X,Y) - \Gamma(Y,X) = T(X,Y).\end{aligned}$$

ii) Формула (3.8) получается очевидной выкладкой

$$\langle T^*(X,\alpha),Y\rangle = \langle \nabla^*_X\alpha, Y\rangle - \langle \nabla'_X\alpha, Y\rangle = X\langle\alpha,Y\rangle - \langle\alpha,\nabla_X Y\rangle - \\ - X\langle\alpha,Y\rangle + \langle\alpha,\nabla'_X Y\rangle = \langle\alpha,(\nabla'_X-\nabla_X)Y\rangle = -\langle\alpha,T(X,Y)\rangle. \quad \square$$

Таким образом, "новый" инвариант T^* по сути не дает ничего нового.

Теперь докажем формулы, анонсированные во введении.

Лемма 3.2. *Имеют место равенства*

$$\text{i)}\ \ \nabla''_X Y = \nabla_Y X + [XY],$$
$$\text{ii)}\ \ \langle\nabla'_X\alpha, Y\rangle = \langle\nabla^*_Y\alpha, X\rangle + d\alpha(X,Y).$$

Доказательство. Формула i) сразу следует из (3.7) и хорошо известного выражения для тензора кручения, часто принимаемого за определение,

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [XY].$$

Равенство же ii) проверяется формальной выкладкой

$$\langle\nabla'_X\alpha,Y\rangle = X\langle\alpha,Y\rangle - \langle\alpha,\nabla''_X Y\rangle = X\langle\alpha,Y\rangle - \langle\alpha,\nabla_Y X\rangle - \langle\alpha,[X,Y]\rangle = \\ = (X\langle\alpha,Y\rangle - Y\langle\alpha,X\rangle - \langle\alpha,[X,Y]\rangle) + Y\langle\alpha,X\rangle - \langle\alpha,\nabla_Y X\rangle = d\alpha(X,Y) + \langle\nabla^*_Y\alpha,X\rangle. \quad \square$$

Таким образом, мы полностью описали связи между операторами ∇, ∇^*, ∇', ∇''. Их можно изобразить так

$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, leftrightarrow, dotted] \arrow[d, leftrightarrow] & \nabla^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ \nabla'' \arrow[r, leftrightarrow, dotted] & \nabla' \end{tikzcd},$$

где горизонтальные стрелки — переходы к сопряженной связности, а вертикальные стрелки описаны в лемме 3.1.

Аналогичная картина для распределений H, H^*, H', H'' осталась неполной

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, leftrightarrow, dotted, "?"'] \arrow[d, leftrightarrow, "?"] & H^* \arrow[d, leftrightarrow] \\ H'' \arrow[r, leftrightarrow, dotted, "?"'] & H' \end{tikzcd}.$$

Здесь мы описали лишь правую вертикальную стрелку в теореме 3.1. О горизонтальных стрелках можно сказать следующее: связности на E находятся во взаимно однозначном соответствии со связностями в расслоении реперов $R(E)$ (соответствующую геометрическую конструкцию см. в [5]), а $R(E) \cong R(E^*)$. Этим мы и ограничимся. Опишем теперь левую вертикальную стрелку. Для этой цели воспользуемся канонической инволюцией s второго касательного расслоения, которая определяется следующим предложением (см. [6]): существует единственный морфизм s расслоений

$$\begin{tikzcd} TTM \arrow[rr, leftrightarrow, "s"'] \arrow[dr, "\pi'"'] & & TTM \arrow[dl, "d\pi"] \\ & TM & \end{tikzcd}$$

такой, что i) $s^2 = 1_{TTM}$; ii) для любой гладкой функции f на M $d(df)\circ s = d(df)$.

Ясно, что при действии s подрасслоения двойного расслоения TTM переходят в подрасслоения. Для связностей имеет место

Теорема 3.3. *Если H — связность на M, тогда $s(H)$ — также связность. Более того, имеет место равенство $s(H) = H''$.*

Доказательство. Пусть (U, x^i) — система координат на M и Γ — тензор деформации связности H. Тогда H (над U) состоит из векторов с координатами $(\mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, -\Gamma^i_{jk} X^j Y^k)$. Инволюция s в координатах имеет вид $s : (\mathbf{x}, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \boldsymbol{\xi}) \mapsto (\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\xi})$. Из этого можно заключить, что $s(H)$ состоит из векторов вида $(\mathbf{x}, \mathbf{Y}, \mathbf{X}, -\Gamma^i_{jk} X^j Y^k)$, т. е. символы Кристоффеля связности $s(H)$ суть Γ^i_{kj} и совпадают с символами Кристоффеля связности H''. $\square$

Литература

1. Рашевский П.К. *Риманова геометрия и тензорный анализ.* – 3-е изд. – М.: Гостехиздат, 1967. – 664 с.
2. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* – М.: Мир, 1971. – 343 с.
3. Лумисте Ю.Г. *Теория связностей в расслоенных пространствах* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия. – 1971. – С. 123–168.
4. Шапуков Б.Н. *Связности на дифференцируемых расслоениях* // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
5. Постников М.М. *Лекции по геометрии. Семестр* IV. *Дифференциальная геометрия*: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1988. – 496 с.
6. Годбийон К. *Дифференциальная геометрия и аналитическая механика.* – М.: Мир, 1973. – 188 с.

Ереванский государственный инженерный университет

Поступила 01.12.1995