ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.988

М.Ю. КОКУРИН, Н.А. ЮСУПОВА

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ МЕДЛЕННОЙ СХОДИМОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

1. В гильбертовом пространстве H исследуется линейное операторное уравнение

$$Au = f, \quad u \in H, \tag{1}$$

где $A \in L(H,H)$, $A^* = A \geq 0$, $\|A\| \leq M$. Предполагается, что в (1) правая часть $f \in R(A)$, где $R(A) = \{v \in H : v = Au,\ u \in H\}$, причем замыкание $\overline{R(A)}$ не совпадает с $R(A)$. Таким образом, задача (1) является некорректной ([1], с. 16). Хорошо известно, что для устойчивого к погрешностям решения подобных задач необходимо применение специальных методов регуляризации (напр., [1]–[3]). Вместе с тем многие качественные особенности поведения этих методов отчетливо проявляются уже в применении к задачам, не содержащим погрешностей в данных. Поэтому в данной статье основное внимание уделяется изучению поведения методов регуляризации уравнения (1) для задач с точными данными.

Ниже рассматривается класс методов нахождения ближайшего к выбранному начальному приближению $\xi \in H$ решения u_* уравнения (1) ([2], с. 28)

$$u_\alpha = (I - A\theta(A,\alpha))\xi + \theta(A,\alpha)f, \quad \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{2}$$

Здесь α — параметр регуляризации; $\theta(\lambda,\alpha)$ — кусочно-непрерывная функция аргумента $\lambda \in [0, M]$. Как известно ([2], с. 42), для вырабатываемых согласно (2) приближений $\{u_\alpha\}$ имеет место соотношение $\lim\limits_{\alpha\to 0} \|u_\alpha - u_*\| = 0$, где элемент $u_* \in U_*$ определен условием

$$\|u_* - \xi\| = \min\{\|u - \xi\| : u \in U_*\},$$

U_* — множество решений уравнения (1). Поскольку без дополнительных предположений относительно решения u_* скорость сходимости u_α к u_* может быть сколь угодно медленной, получение квалифицированных по α оценок скорости сходимости возможно лишь при сужении класса рассматриваемых решений u_* по сравнению со всем пространством H. Дополнительные условия на решение часто формулируются в виде требования истокопредставимости начальной невязки

$$u_* - \xi \in R(A^p), \quad p > 0. \tag{3}$$

Следующие известные предложения показывают, что при выполнении ряда нежестких условий на семейство порождающих функций $\theta(\lambda,\alpha)$ представление (3), достаточное для выполнения степенных оценок скорости сходимости приближений (2), является весьма близким к необходимому. При доказательстве достаточной части этого утверждения используется

Условие А1. Для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ и $p \in [0, p_0]$, где $p_0 > 0$, справедливо неравенство $\sup\limits_{\lambda\in[0,M]} \lambda^p |1 - \lambda\theta(\lambda,\alpha)| \leq C\alpha^p$.

В случае $p_0 = \infty$ в условии A1 следует считать, что $p \in [0, +\infty)$. Здесь и далее через C обозначаются положительные абсолютные константы, вообще говоря, разные.

Предложение 1 ([2], с. 42; [3], с. 34–36). *Пусть выполняется условие* A1 *и имеет место представление* (3) *с* $p \in (0, p_0]$ ($p \in (0, \infty)$ *при* $p_0 = \infty$). *Тогда справедлива оценка*

$$\|u_\alpha - u_*\| \le C\alpha^p \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{4}$$

Следующее условие ранее использовалось в [4] при анализе необходимости представления (3) для выполнения оценки (4).

Условие A2. Для всех $\tau \in (0, p_0)$, $\lambda \in (0, m]$ с некоторым $m \in (0, M]$ выполняется оценка

$$\int_0^{\alpha_0} \alpha^{-(2\tau+1)} |1 - \lambda\theta(\lambda, \alpha)|^2 d\alpha \ge \frac{C}{\lambda^{2\tau}}.$$

Предложение 2 ([4]). *Пусть выполняются условие* A2 *и оценка* (4) *с* $p \in (0, p_0]$. *Тогда для любого* $s \in (0, p)$ *справедливо включение*

$$u_* - \xi \in R(A^s).$$

Близкие утверждения получены ранее в ([5], сс. 82, 164). Отметим, что в схему (2) вкладывается семейство итерационных методов ([2], с. 36)

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - g(A)(Au^{(n)} - f), \quad u^{(0)} = \xi. \tag{5}$$

Предполагается, что функция $g(\lambda)$ кусочно-непрерывна на $[0, M]$, непрерывна в точке $\lambda = 0$, $g(0) > 0$, и удовлетворяет условию

$$\sup_{\lambda \in [\varepsilon, M]} |1 - \lambda g(\lambda)| < 1 \quad \forall \varepsilon \in (0, M].$$

Группа методов (5) получается из (2) при

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^{-1}[1 - (1 - \lambda g(\lambda))^{1/\alpha}], & \lambda \ne 0; \\ \alpha^{-1} g(0), & \lambda = 0, \end{cases}$$

с дискретным параметром регуляризации $\alpha = n^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$ ([2], с. 37). Результаты, аналогичные предложениям 1, 2, имеют место и для итерационных процедур (5).

Очевидная аналогия правых частей истокообразного представления (3) и оценки скорости сходимости (4) стимулирует поиск отличных от (3) условий истокопредставимости и соответствующих им оценок скорости сходимости, обладающих тем же сходством, что (3) и (4). В данной статье получены условия, необходимые и достаточные для выполнения более медленной по сравнению с (4) оценки вида

$$\|u_\alpha - u_*\| \le C(\ln \ln \dots (-\ln \alpha))^{-p} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0] \quad (p > 0), \tag{6}$$

включающей $K \ge 1$ символов ln.

2. Будем предполагать вначале, что $M < 1$ и $\alpha_0 < 1$. Следуя [6], [7], введем следующее условие на порождающие функции $\theta(\lambda, \alpha)$, $\lambda \in [0, M]$.

Условие B1. Для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$, $p \ge 0$ имеет место неравенство

$$\sup_{\lambda \in (0, M]} (-\ln \lambda)^{-p} |1 - \lambda\theta(\lambda, \alpha)| \le C(-\ln \alpha)^{-p}, \quad C = C(p).$$

В [6] показано, что условию B1 удовлетворяет любая функция $\theta(\lambda, \alpha)$, для которой выполнено условие A1.

Теорема 1 ([6], [7]). *Пусть выполняется условие* B1 *и*

$$u_* - \xi \in R[(-\ln A)^{-p}], \quad p > 0. \tag{7}$$

Тогда справедлива оценка

$$\|u_\alpha - u_*\| \le C(-\ln \alpha)^{-p} \quad \forall \alpha \in (0, \alpha_0]. \tag{8}$$

При анализе необходимости условия истокопредставимости (7) используется

Условие B2. Для всех $\alpha \in (0, \alpha_0]$ имеет место оценка

$$\sup_{\lambda \in [0,M]} |\theta(\lambda, \alpha)| \le \frac{C}{\alpha}.$$

Следующая теорема показывает, что представление (7), достаточное для выполнения оценки (8), близко к необходимому и не может быть существенно ослаблено.

Теорема 2 ([6], [7]). *Если выполняются условие* B2 *и оценка* (8)*, то для любого* $s \in (0, p)$ *имеет место включение*

$$u_* - \xi \in R[(-\ln A)^{-s}]. \tag{9}$$

Для класса итерационных методов (5) условия B1, B2 выполняются.

Теорема 3. 1) *При выполнении* (7) *справедлива оценка*

$$\|u^{(n)} - u_*\| \le C(\ln n)^{-p}, \quad n = 2, 3, \dots \tag{10}$$

2) *Пусть при* $p > 0$ *выполняется оценка* (10)*. Тогда для любого* $s \in (0, p)$ *справедливо включение* (9).

Условиям теорем 1, 2 удовлетворяет метод М.М. Лаврентьева

$$Au_\alpha + \alpha u_\alpha = \alpha \xi + f,$$

определяемый порождающей функцией $\theta(\lambda, \alpha) = (\lambda + \alpha)^{-1}$, итерированный вариант этого метода $u_\alpha = u_{N,\alpha}$, $u_{0,\alpha} = \xi$,

$$Au_{n+1,\alpha} + \alpha u_{n+1,\alpha} = \alpha u_{n,\alpha} + f, \quad n = 0, \dots, N-1 \ \ (N \ge 2),$$

порождаемый функцией $\theta(\lambda, \alpha) = \lambda^{-1}\bigl[1 - \bigl(\frac{\alpha}{\lambda+\alpha}\bigr)^N\bigr]$, а также метод установления, для которого порождающая функция имеет вид

$$\theta(\lambda, \alpha) = \begin{cases} \lambda^{-1}(1 - e^{-\frac{\lambda}{\alpha}}), & \lambda \ne 0; \\ \alpha^{-1}, & \lambda = 0. \end{cases}$$

Из итерационных процедур, удовлетворяющих условиям теоремы 3, отметим явную и неявную итерационные схемы

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} - a(Au^{(n)} - f), \quad Au^{(n+1)} + au^{(n+1)} = au^{(n)} + f, \quad u^{(0)} = \xi, \ \ n = 0, 1, \dots,$$

определяемые соответственно функциями $g(\lambda) \equiv a \in (0, \frac{2}{M})$ и $g(\lambda) = (\lambda + a)^{-1}$, $a > 0$ в (5).

3. Приводимые ниже результаты обобщают теоремы 1, 2 на случай произвольного числа $K \ge 1$ логарифмов в (6). Определим последовательность $\{M_K\} : M_1 = 1$, $M_K = e^{-1/M_{K-1}}$, $K = 2, 3, \dots$ Потребуется

Условие C. Для всех $\mu \in (0, \mu_0]$ и $\beta \in (0, \beta_0]$, где $\mu_0, \beta_0 \in (0, 1)$, имеет место неравенство

$$|1 - \mu\theta(\mu, \beta)| \le C\left|1 - \left(\ln\frac{1}{\mu}\right)^{-1} \theta\left(\left(\ln\frac{1}{\mu}\right)^{-1}, \left(\ln\frac{1}{\beta}\right)^{-1}\right)\right|.$$

Теорема 4. *Пусть* $\|A\| \le M$, *где* $M \in (0, M_K)$, *выполняются условия* B1, C *и истокообразное представление*

$$u_* - \xi \in R[(\ln\ln\ldots(-\ln A))^{-p}], \quad p > 0 \tag{11}$$

(K *символов* ln). *Тогда для любого* $\alpha_0 \in (0, M_K)$ *справедлива оценка* (6).

Необходимость истокообразного представления (11) для выполнения оценки (6) устанавливает

Теорема 5. *Пусть выполняются условие* B2 *и оценка* (6) *с показателем* $p > 0$. *Тогда для любого* $s \in (0, p)$ *имеет место включение*

$$u_* - \xi \in R[(\ln\ln\ldots(-\ln A))^{-s}] \tag{12}$$

(K *символов* ln).

Обозначим $N_K = [M_K^{-1}] + 1$.

Теорема 6. 1) *Пусть* $\|A\| \le M$, $M \in (0, M_K)$ *и выполняется* (11). *Тогда для итерационных методов* (5) *справедлива оценка*

$$\|u^{(n)} - u_*\| \le C(\ln\ln\ldots\ln n)^{-p}, \quad n \ge N_K. \tag{13}$$

2) *Пусть выполняется оценка* (13) *с показателем* $p > 0$. *Тогда для любого* $s \in (0, p)$ *имеет место включение* (12), *содержащее* K *символов* ln.

Условиям теорем 4, 5 удовлетворяют порождающие функции классического и итерированного метода М.М. Лаврентьева и метода установления. Условиям теоремы 6 удовлетворяют приведенные в п. 2 явная и неявная итерационные схемы.

Литература

1. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1979. – 288 с.
2. Вайникко Г.М., Веретенников А.Ю. *Итерационные процедуры в некорректных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 184 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. *Итеративные методы решения некорректных задач.* – М.: Наука, 1989. – 128 с.
4. Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. *О необходимых условиях квалифицированной сходимости методов решения линейных некорректных задач* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 2. – С. 39–47.
5. Engl H.W., Hanke M., Neubauer A. *Regularization of inverse problems.* – Dordrecht: Kluwer, 1996. – 320 p.
6. Hohage T. *Regularization of exponentially ill-posed problems* // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 2000. – V. 21. – № 3–4. – P. 439–464.
7. Кокурин М.Ю., Юсупова Н.А. *О критериях медленной сходимости методов решения линейных уравнений* // Тез. докл. конф. “Обратные и некорректно поставленные задачи”. – М.: МАКС Пресс, 2000. – С. 39.

Марийский государственный университет

Поступила 13.11.2000