ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 2 (477)

УДК 517.977

Л.Т. АЩЕПКОВ, Д.В. ДАВЫДОВ

СТАБИЛИЗАЦИЯ НАБЛЮДАЕМОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Методами упреждающего управления (predictive control) и интервального анализа разработана процедура стабилизации системы линейных автономных дифференциальных уравнений с интервальными коэффициентами, включающая этапы пассивного наблюдения фазовых состояний и активного управления. Приведены достаточные условия притяжения всех траекторий системы к положению равновесия.

Введение

Задача стабилизации линейной системы управления по наблюдениям фазовых состояний в детерминированной и стохастической постановке относится к ряду классических [1]. Новые интересные аспекты в ее трактовке и решении, не укладывающиеся в рамки традиционной теории, возникают при интервальной неопределенности коэффициентов в уравнениях движения и наблюдения [2]. Источниками интервальности могут быть неполнота знаний об объекте управления и вытекающие отсюда ошибки моделирования, погрешности вычисления коэффициентов или последствия линеаризации нелинейных уравнений с неопределенными параметрами.

Потенциальный континуум реализаций неопределенных коэффициентов в интервалах задания составляет основное отличие интервальной задачи от детерминированной. Вместе с тем, полное отсутствие информации о реализациях коэффициентов не позволяет трактовать ее как стохастическую и использовать хорошо разработанную теорию фильтрации [1].

Применяемый здесь подход к решению интервальной задачи стабилизации близок статье [3]. Основная движущая идея состоит в построении детерминированного программно-позиционного управления, которое на конечных отрезках времени действует как оператор сжатия в фазовом пространстве, "сужая" интегральную воронку траекторий каждой системы из рассматриваемого континуума систем. Если циклически чередовать по времени восстановление фазовых векторов с управлением, то при определенных условиях удается обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия системы в целом (в большом) независимо от реализаций ее коэффициентов в заданных интервалах.

Процедура стабилизации ориентирована на реальное время. Основные трудоемкие операции — это вычисление матричной экспоненты и интеграла от линейно преобразованных результатов наблюдения фазовой траектории на конечных отрезках времени. Вспомогательные операции обращения двух постоянных матриц могут быть выполнены заблаговременно.

Процедура и достаточное условие стабилизации интервальной системы являются основными результатами данной работы. Достаточное условие формулируется через известные середины и длины интервалов неопределенности и в этом смысле конструктивно. Оно заведомо выполняется для интервалов малой длины, если эталонная "центральная" система (коэффициенты которой соответствуют серединам интервалов) обладает свойствами управляемости и наблюдаемости. С точки зрения центральной системы достаточное условие стабилизируемости можно трактовать как критерий ее робастности по отношению к применяемой процедуре стабилизации.

1. Постановка задачи

Рассмотрим наблюдаемую систему управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

где x, u, y — векторы фазового состояния, управления и наблюдения из R^n, R^r, R^m; A, B, C — неопределенные постоянные матричные коэффициенты размерности $n \times n$, $n \times r$, $m \times n$, $m \leq n$, со значениями из замкнутых интервалов

$$|A - A_0| \leq \Delta A, \quad |B - B_0| \leq \Delta B, \quad |C - C_0| \leq \Delta C; \tag{3}$$

A_0, B_0, C_0 и ΔA, ΔB, ΔC — матрицы соответствующих размерностей с заданными произвольными и неотрицательными элементами. Модули матриц и матричные неравенства в (3) и далее понимаются поэлементно.

Матрицы A_0, B_0 предполагаются управляемыми, а матрицы A_0, C_0 — наблюдаемыми. Это означает [4] выполнение алгебраических условий

$$\operatorname{rank}(B_0, A_0 B_0, \ldots, A_0^{n-1} B_0) = n, \tag{4}$$

$$\operatorname{rank}(C_0', A_0' C_0', \ldots, (A'_0)^{n-1} C_0') = n \tag{5}$$

на ранги блочных матриц. Символ $'$ (штрих) везде означает операцию транспонирования.

Требуется: 1) найти кусочно-непрерывное по t на конечных отрезках времени программно-позиционное управление $u(x_0, t)$, обеспечивающее притяжение траекторий замкнутой системы

$$\dot{x} = Ax + Bu(x_0, t), \quad x(0) = x_0 \tag{6}$$

к положению равновесия $x = 0$ для любых начальных векторов x_0 из R^n и любых матриц A, B из интервалов (3); 2) организовать процедуру построения управления $\widehat{u}(x_0, t) \approx u(x_0, t)$ с такими же свойствами, как у $u(x_0, t)$, по результатам наблюдения $y(t)$ траектории $x(t)$ системы

$$\dot{x} = Ax + B\widehat{u}(x_0, t), \quad y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0; \tag{7}$$

3) сформулировать достаточные условия стабилизируемости системы (7) независимо от выбора начального вектора x_0 из R^n и матриц A, B, C из интервалов (3).

2. Стабилизирующее управление

Разберем сначала относительно простой случай, когда все координаты фазового вектора доступны непосредственному измерению в моменты времени $t = 0, T, 2T, \ldots$ с постоянным шагом $T > 0$. Для упрощения можно считать матрицу $C = E$ в уравнении (2) единичной.

Систему (1), (2) при $A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0$ назовем центральной.

Потребуем, чтобы стабилизирующее управление обладало следующими двумя свойствами: а) переводило траекторию центральной системы из любого состояния $x(0) = x_0$ в состояние $x(T) = 0$ за время $T > 0$; б) имело минимальную норму

$$\|u\| = \left(\int_0^T u(t)' u(t)\, dt \right)^{1/2}$$

в пространстве $L_2^r(0, T)$ векторных функций размерности r с суммируемым на отрезке $[0, T]$ квадратом евклидовой нормы.

Из теории линейных систем известно [5], что в предположении (4) существует единственное управление

$$u(t) = B_0' e^{(T-t)A_0'} z, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{8}$$

с требуемыми свойствами. Здесь $e^{(T-t)A_0'}$ — матричная экспонента [6], z — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$D_0 z = f_0 \tag{9}$$

с матричными коэффициентами

$$D_0 = \int_0^T e^{\tau A_0} B_0 B_0' e^{\tau A_0'}\, d\tau, \quad f_0 = -e^{TA_0} x_0 \tag{10}$$

размерности $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно. Условие (4) гарантирует ([1], с. 49) невырожденность матрицы D_0.

Опираясь на результаты работы [8], опишем действие управления (8)–(10) на состояние $x(T)$ системы (1) с начальным условием $x(0) = x_0$ при неопределенных матрицах A, B. По формуле Коши ([9], с. 134) с использованием обозначений

$$D = \int_0^T e^{\tau A} B B_0' e^{\tau A_0'}\, d\tau, \quad f = -e^{TA} x_0 \tag{11}$$

имеем

$$x(T) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-\tau)A} B u(t)\, dt = -f + Dz.$$

Отсюда и из (9) следует

$$|x(T)| = |Dz - f - (D_0 z - f_0)| \le |D - D_0|\, |z| + |f - f_0| \le \Delta D|z| + \Delta f, \tag{12}$$

где

$$\Delta D = \int_0^T [(e^{\tau(|A_0| + \Delta A)} - e^{\tau|A_0|})\, (|B_0| + \Delta B) + |e^{\tau A_0}|\Delta B]\, |B_0' e^{\tau A_0'}|\, d\tau, \tag{13}$$

$$\Delta f = (e^{T(|A_0| + \Delta A)} - e^{T|A_0|})|x_0|. \tag{14}$$

Из (9), (10) имеем

$$|z| = |D_0^{-1} f_0| \le |D_0^{-1} e^{TA_0}|\, |x_0|,$$

поэтому верхняя оценка (12) с учетом (14) примет вид

$$|x(T)| \le M|x_0|, \quad M = \Delta D|D_0^{-1} e^{TA_0}| + e^{T(|A_0| + \Delta A)} - e^{T|A_0|}. \tag{15}$$

Очевидно, если в неравенстве (15) норма матрицы M меньше единицы, то для согласованных с нею норм векторов получим условие $\|x(T)\| < \|x_0\|$. Это означает, что при $\|M\| < 1$ управление (8)–(10) действует как оператор сжатия в фазовом пространстве, переводя начальные точки x_0 системы (1) с неопределенными коэффициентами A, B за время T в более близкие к началу координат точки $x(T)$.

Многократное повторение операции "сжатия" фазового пространства за счет последовательного применения управлений типа (8)–(10) на отрезках времени $[T, 2T], [2T, 3T], \ldots$ вызовет притяжение траектории системы (1) к началу координат, т. е. $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, если принять

$$\begin{gathered} u(t) = B_0' e^{(kT-t)A_0'} z^{k-1}, \quad (k-1)T \le t \le kT, \\ D_0 z^{k-1} = -e^{TA_0} x((k-1)T), \quad k = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{16}$$

то для соответствующего решения $x(t)$ системы (6) легко устанавливается аналог неравенства (15)

$$|x(kT)| \le M|x((k-1)T)|, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

с той же матрицей M на каждом из отрезков $[(k-1)T, kT]$.

Следовательно, неравенство $\|M\| < 1$ для матрицы (15) вместе с предположением (4) гарантирует стабилизацию траекторий системы (6) независимо от выбора начального вектора x_0 из R^n и матриц A, B из интервалов (3).

3. Оценка фазового состояния

Закон управления (16) предполагает известными состояния $x((k-1)T)$, $k=1,2,\ldots$, системы (6) и, вообще говоря, не реализуем при мультипликативных неопределенностях в уравнениях наблюдения (2). Тем не менее, при определенном согласовании параметров T, ΔA, ΔB, ΔC с точностью восстановления векторов $x((k-1)T)$, $k=1,2,\ldots$, управление (16) в модифицированной форме сохраняет стабилизирующее свойство. Перейдем к точным формулировкам.

Опишем двухфазную процедуру управления на основном отрезке времени $[0,T]$. На первой фазе ($0\le t\le\theta$) процедуры по свободному движению системы (1), (2) при $u\equiv 0$ строится оценка $\widehat{x}_0$ ее неизвестного начального состояния $x_0=x(0)$. На второй фазе ($\theta\le t\le T$) производится активное приближение состояния $x(T)$ системы (1) к началу координат управлением типа (8) с использованием найденной оценки $\widehat{x}_0$.

На первой фазе, полагая в уравнениях (1), (2) $u\equiv 0$, приходим к однородной системе наблюдения

$$\dot{x}=Ax,\quad y(t)=Cx(t),\quad 0\le t\le\theta. \tag{17}$$

Отсюда с использованием формулы Коши известные измерения $y(t)$ можно выразить через неизвестные параметры A, C, x_0

$$y(t)=Ce^{tA}x_0,\quad 0\le t\le\theta. \tag{18}$$

Применим к измерениям (18) линейное интегральное преобразование с матрицей $e^{tA_0'}C_0'$. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений

$$Wx_0=g \tag{19}$$

относительно вектора x_0 с матричными коэффициентами

$$W=\int_0^\theta e^{tA_0'}C_0'Ce^{tA}\,dt,\quad g=\int_0^\theta e^{tA_0'}C_0'y(t)dt. \tag{20}$$

Как видно из формул (20), матрица W размерности $n\times n$ зависит от неопределенных матриц A, C и, по существу, неизвестна. Вектор g размерности $n\times 1$, напротив, определен однозначно измерениями $y(t)$.

Полагая

$$W_0=\int_0^\theta e^{tA_0'}C_0'C_0e^{tA_0}\,dt, \tag{21}$$

по аналогии с [8] устанавливаем оценку

$$|W-W_0|\le\Delta W,$$
$$\Delta W=\int_0^\theta |e^{tA_0'}C_0'|[(|C_0|+\Delta C)(e^{t(|A_0|+\Delta A)}-e^{t|A_0|})+\Delta C|e^{tA_0}|]\,dt. \tag{22}$$

С учетом (22) систему линейных алгебраических уравнений (19), несколько упрощая, можно считать интервальной. Следуя [8], определим ее субуниверсальное решение $\widehat{x}_0$ из системы уравнений

$$W_0\widehat{x}_0=g \tag{23}$$

с невырожденной [7] в силу (5) матрицей (21).

Используя соотношения (22), (23), найдем оценку невязки уравнения (19) на субуниверсальном решении $\widehat{x}_0$. Имеем

$$|W\widehat{x}_0-g|=|W\widehat{x}_0-g-(W_0\widehat{x}_0-g)|\le|W-W_0|\,|\widehat{x}_0|\le\Delta W|\widehat{x}_0| \tag{24}$$

для любых матриц A, C из интервалов (3).

Очевидно, невязка (24) покоординатно уменьшается с уменьшением норм матриц ΔA, ΔC и в пределе при $\Delta A = 0$, $\Delta C = 0$ становится нулевой. В этом случае уравнение (23) дает точное значение вектора x_0: $x_0 = \widehat{x}_0$. Отметим попутно два необходимых для дальнейшего неравенства

$$|\widehat{x}_0| \leq L|x_0|, \tag{25}$$

$$L = |W_0^{-1}| \int_0^\theta |e^{tA_0'} C_0'|(|C_0| + \Delta C) e^{t(|A_0|+\Delta A)}\, dt;$$

$$|x_0 - \widehat{x}_0| \leq |W_0^{-1}|\Delta W|x_0|, \tag{26}$$

которые вытекают из соотношений (18), (20), (23) и (19), (22), (23) соответственно.

Опишем вторую фазу активного управления системой (1) на отрезке времени $[\theta, T]$, считая оценку $\widehat{x}_0$ вектора x_0 известной. По аналогии с (8) полагаем

$$u(t) = B_0' e^{(T-t)A_0'} \widehat{z}, \quad \theta \leq t \leq T, \tag{27}$$

где $\widehat{z}$ — решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\widehat{D}_0 \widehat{z} = \widehat{f}_0 \tag{28}$$

с матричными коэффициентами

$$\widehat{D}_0 = \int_0^{T-\theta} e^{\tau A_0} B_0 B_0' e^{\tau A_0'}\, d\tau, \quad \widehat{f}_0 = -e^{TA_0}\widehat{x}_0 \tag{29}$$

размерности $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно.

Оценим действие управления (27)–(29) на состояние $x(T)$ системы (1) с начальным условием $x(\theta) = e^{\theta A} x_0$ — результатом свободного движения системы при $u = 0$, $0 \leq t \leq \theta$. По формуле Коши имеем

$$x(T) = e^{(T-\theta)A}(e^{\theta A} x_0) + \int_\theta^T e^{(T-t)A} B \widehat{u}(t)\, dt.$$

Отсюда, полагая

$$\widehat{D} = \int_0^{T-\theta} e^{\tau A} B B_0' e^{\tau A_0'}\, d\tau, \tag{30}$$

с учетом (27)–(29) и (11) получим

$$|x(T)| = |-f + \widehat{D}\widehat{z}| = |\widehat{D}\widehat{z} - f - (\widehat{D}_0\widehat{z} - \widehat{f}_0)| \leq |f - \widehat{f}_0| + |\widehat{D} - \widehat{D}_0|\,|\widehat{z}|. \tag{31}$$

Оценим сверху каждое слагаемое в правой части неравенства (31). Для первого из них на основании [8] и (26) имеем

$$\begin{gathered} |f - \widehat{f}_0| = |e^{TA} x_0 - e^{TA_0}\widehat{x}_0| = |(e^{TA} - e^{TA_0}) x_0 + e^{TA_0}(x_0 - \widehat{x}_0)| \leq \\ \leq |e^{TA} - e^{TA_0}|\,|x_0| + |e^{TA_0}|\,|x_0 - \widehat{x}_0| \leq K|x_0|, \\ K = e^{T(|A_0|+\Delta A)} - e^{T|A_0|} + |e^{TA_0}|\,|W_0^{-1}|\Delta W. \end{gathered} \tag{32}$$

Второе слагаемое оценим с использованием (29), (30), (28) и (25). В результате получим

$$|\widehat{D} - \widehat{D}_0|\,|\widehat{z}| \leq \Delta\widehat{D}|\widehat{D}_0^{-1} e^{TA_0}|L|x_0|, \tag{33}$$

где матрица $\Delta\widehat{D}$ получается из ΔD заменой T на $(T-\theta)$ в формуле (13):

$$\Delta\widehat{D} = \int_0^{T-\theta} [(e^{\tau(|A_0|+\Delta A)} - e^{\tau|A_0|})(|B_0| + \Delta B) + |e^{\tau A_0}|\Delta B]\,|B_0' e^{\tau A_0'}|\, d\tau.$$

Из (31) с использованием оценок (32), (33) находим окончательно

$$|x(T)| \leq N|x_0|, \quad N = K + \Delta\widehat{D}|\widehat{D}_0^{-1} e^{TA_0}|L. \tag{34}$$

Как видно из соотношений (22), (25), (32), (34), определяющих матрицу N, с уменьшением норм матриц ΔA, ΔB, ΔC норма матрицы N стремится к нулю. В частности, при $\Delta A = 0$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$ получаем $N = 0$, и из (34) следует $x(T) = 0$. Следовательно, управление (27)–(29) переводит траекторию центральной системы из начальной точки $x(\theta) = e^{\theta A_0} x_0$ в начало координат за время $T - \theta$.

4. Достаточное условие стабилизируемости

Продолжим управление (27)–(29) на полуось $[0, \infty)$, полагая

$$\begin{gathered}
\widehat{u}(x_0, t) = 0, \quad (k-1)T \le t < (k-1)T + \theta, \\
\widehat{u}(x_0, t) = B_0' e^{(kT-t)A_0'} \widehat{z}^{k-1}, \quad (k-1)T + \theta \le t < kT, \\
\widehat{D}_0 \widehat{z}^{k-1} = \widehat{f}_0^{k-1}, \quad W_0 \widehat{x}_0^{k-1} = g^{k-1}, \\
\widehat{f}_0^{k-1} = -e^{TA_0} \widehat{x}_0^{k-1}, \\
g^{k-1} = \int\limits_{(k-1)T}^{(k-1)T+\theta} e^{(t-(k-1)T)A_0'} C_0' y(t) dt, \quad k = 1, 2, \ldots,
\end{gathered} \tag{35}$$

где $x(t)$, $y(t)$ — решение системы (7). Так же, как при выводе неравенства (34), легко устанавливается оценка

$$|x(kT)| \le N |x((k-1)T)|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Из нее в согласованных нормах получим

$$\|x(kT)\| \le \|N\|^k \|x_0\|.$$

Если $\|N\| < 1$, то для произвольных фиксированных x_0 из R^n и A, B, C из интервалов (3) имеем $\|x(kT)\| \to 0$ при $k \to \infty$. На отрезке времени $[(k-1)T, kT]$ справедливо аналогичное (26) неравенство

$$|x((k-1)T) - \widehat{x}_0^{k-1}| \le |W_0^{-1}| \Delta W |x((k-1)T)|.$$

Отсюда в силу сказанного заключаем $\widehat{x}_0^{k-1} \to 0$ при $k \to \infty$. В результате доказана

Теорема. *Пусть для системы* (1)–(3) *выполнены предположения* (4), (5) *и матрица* N, *определенная формулами* (22), (25), (32), (34), *удовлетворяет условию* $\|N\| < 1$. *Тогда управление* (35) *обеспечивает притяжение траекторий системы* (1)–(3) *к началу координат при любых начальных состояниях* x_0 *из* R^n *и матрицах* A, B, C *из интервалов* (3).

Продемонстрируем некоторые возможности теоремы при упрощающих предположениях

$$C_0 = E, \quad \Delta C = 0, \quad \operatorname{rank} B_0 = n$$

и при любой неотрицательной матрице ΔA. Тогда условия $\|N\| < 1$ теоремы можно добиться уменьшением периода T и нормы матрицы ΔB. Действительно, раскрывая формулу (34) для матрицы $N = N(T)$ и применив поэлементно теорему о среднем для интеграла

$$D_0 = \int_0^T e^{\tau A_0} B_0 B_0' e^{\tau A_0'} \, d\tau,$$

в пределе получим

$$\lim_{T \to 0} N(T) = \Delta B |B_0'| \, |(B_0 B_0')^{-1}|.$$

Отсюда и вытекает требуемое.

Таким образом, в рассматриваемом случае за счет увеличения частоты коррекции управления и уменьшения нормы матрицы ΔB можно эффективно стабилизировать систему (1), (2) даже при больших интервалах неопределенности матрицы A.

Заключение

Отметим характерные особенности решения интервальной задачи стабилизации.

Метод упреждающего управления в сочетании с техникой интервального анализа оказались достаточно эффективным средством анализа мультипликативных неопределенностей в уравнениях движения и наблюдения управляемого объекта и позволили получить детерминированный закон управления и достаточные условия стабилизации. Упреждающее действие стабилизирующего управления проявляется периодически на отрезках времени $[(k-1)T, kT]$, $k = 1, 2, \ldots$ Управление "работает" на уменьшение норм векторов состояний $x(kT)$. Техника интервального анализа дает возможность оценить "недоработки" управления по сравнению с действием на центральную систему.

Разделение фаз пассивного наблюдения и активного управления в процедуре стабилизации имеет принципиальное значение для асимптотической устойчивости положения равновесия. Наложение этих фаз приводит к появлению неоднородных членов в уравнениях наблюдения (17) и, как следствие, к потере асимптотической устойчивости. В этом случае, вообще говоря, можно гарантировать лишь устойчивость положения равновесия.

Условия (4), (5) теоремы накладывают определенные требования на центры интервалов: соответствующая центральная система должна быть управляемой и наблюдаемой. Условие $\|N\| < 1$ можно интерпретировать двояко. С одной стороны, при заданных T, θ оно выделяет в явном виде "окрестность" интервальных систем (по отношению к центральной системе), которые поддаются стабилизации приведенным способом. С другой стороны, это условие согласованности показателя неопределенности системы ($\|\Delta A\| + \|\Delta B\| + \|\Delta C\|$) с необходимой частотой наблюдения и управления ($1/\theta$ и $1/T$) при стабилизации системы.

Литература

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. *Очерки по математической теории систем.* – М.: Мир, 1971. – 400 с.
2. Куржанский А.Б. *Управление и наблюдение в условиях неопределенности.* – М.: Наука, 1977. – 390 с.
3. Ащепков Л.Т., Стегостенко Ю.Б. *Стабилизация линейной дискретной системы управления с интервальными коэффициентами* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 12. – С. 3–10.
4. Ли Э., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* – М.: Наука, 1972. – 572 с.
5. Красовский Н.Н. *Теория управления движением. Линейные системы.* – М.: Наука, 1968. – 476 с.
6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – М.: Наука, 1967. – 576 с.
7. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М. *Оптимизация линейных систем.* – Минск: Изд-во Белорусск. гос. ун-та, 1973. – 246 с.
8. Ащепков Л.Т., Давыдов Д.В. *Стабилизация линейной стационарной системы управления с интервальными коэффициентами* // Дальневосточный матем. сб. – Владивосток: Дальнаука, 1999. – № 8. – С. 32–38.
9. Понтрягин Л.С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Наука, 1965. – 332 с.
10. Ащепков Л.Т. *Лекции по оптимальному управлению.* – Владивосток: Изд-во Дальневосточн. ун-та, 1994. – 308 с.

Институт прикладной математики
Дальневосточного отделения
Российской Академии наук

Поступила
30.10.2000