ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 4 (515)

УДК 517.968:519.6

Л.Б. ЕРМОЛАЕВА

РЕШЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Введение

Данная статья, являющаяся естественным продолжением работ [1]–[3], посвящена теоретическому обоснованию в смысле ([4], гл. 14; [5], гл. 1) метода осциллирующих функций (подобластей) для обыкновенных интегродифференциальных уравнений и некоторых их обобщений. В частности, доказывается сходимость метода при минимальных (к настоящему времени) предположениях относительно исходных данных и устанавливаются эффективные (в том числе неулучшаемые по порядку) оценки погрешности в зависимости от структурных свойств исходных данных. При этом существенным образом используются как результаты, так и обозначения из [2], [3].

1. Постановка задачи

Рассматривается линейное операторное уравнение

$$Ax \equiv x^{(m)}(t) + B(x;t) = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.1}$$

при краевых условиях

$$R_l(x) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}; \tag{1.2}$$

здесь B — линейный (в том числе интегродифференциальный) оператор с областью значений в пространстве $L_1(-1,1)$, $y \in L_1(-1,1)$, а R_l — линейно независимые функционалы в пространстве $C^{m-1}[-1,1]$, m — целое неотрицательное число, причем условия (1.2) при $m=0$ отсутствуют.

Приближенное решение задачи (1.1)–(1.2) ищется в виде многочлена

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k t^{k-1}, \quad t \in [-1,1], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

коэффициенты $\alpha_k = \alpha_{k,n}$ которого определяются по методу подобластей из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k \int_{t_{i-1}}^{t_i} A(t^{k-1};t)dt = \int_{t_{i-1}}^{t_i} y(t)dt, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k R_l(t^{k-1}) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}; \tag{1.5}$$

здесь $\{t_k = t_{k,n}\}_0^n$ — некоторая система узлов из $[-1,1]$, выбор которых имеет, как будет показано ниже, существенное значение для обоснования сходимости и оценки погрешности метода.

Исследование метода (1.1)–(1.5) будем проводить в парах функциональных пространств $(W_2^m(\rho); L_2(\rho))$ и (C^m, C), где $C = C[-1,1]$, $L_2(\rho) = L_2(\rho; [-1,1])$ — хорошо известные пространства с обычными нормами, а $C^m = C^{(m)}[-1,1]$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций с нормой

$$\|x\|_{C^m} = \sum_{i=0}^{m} \|x^{(i)}(t)\|_C, \quad x \in C^m;$$

$W_2^m(\rho) = W_2^{(m)}(\rho; [-1,1]) = \{x(t) \in C^{m-1} : \exists\, x^{(m)}(t) \in L_2(\rho)\}$ — весовое пространство Соболева с нормой

$$\|x\|_{W_2^m(\rho)} = \sum_{i=0}^{m} \|x^{(i)}(t)\|_{L_2(\rho)}, \quad x \in W_2^m(\rho),$$

причем выбор весовой функции $\rho = \rho(t) = (1-t^2)^{1/2}$ продиктован, как и в [1], [2], свойствами используемых ниже многочленов Чебышева $T_n(t) = \cos n \arccos t$ $(n+1 \in \mathbb{N},\ t \in [-1,1])$ и их производных.

2. Основные результаты

Ниже за узлы $t_k = t_{k,n}$ $(k = \overline{0,n})$ возьмем корни многочлена Чебышева $T_{n+1}(t)$ и соответственно экстремальные точки многочлена Чебышева $T_n(t)$:

$$t_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}; \tag{2.1}$$

$$t_k = \cos\frac{k\pi}{n}, \qquad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Для вычислительной схемы (1.1)–(1.5), (2.1)–(2.2) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

а) *оператор $B : W_2^m(\rho) \to L_2(\rho)$ вполне непрерывен;*
б) *уравнение $x^{(m)}(t) = 0$ при условиях (1.2) имеет лишь тривиальное решение;*
в) *задача (1.1)–(1.2) имеет единственное решение $x^*(t) \in W_2^m(\rho)$ при любой правой части $y(t) \in L_2(\rho)$.*

Тогда при всех $n \geqslant n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ определяется свойствами оператора B) СЛАУ (1.4)–(1.5), (2.1)–(2.2) имеет единственное решение $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_{n+m}^*$. Приближенные решения

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n+m} \alpha_k^* t^{k-1}, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.3*}$$

сходятся при $n \to \infty$ к точному решению $x^*(t)$ со скоростью, определяемой соотношениями

$$E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)} \asymp \|x^* - x_n^*\|_{W_2^m(\rho)} \asymp E_{n+m-1}(x^*)_{W_2^m(\rho)}, \tag{2.3}$$

где символ $\asymp$ означает знак слабой эквивалентности.

Здесь и далее $E_{n+m-1}(\varphi)_{W_2^m(\rho)}$ — наилучшее приближение функции $\varphi \in W_2^m(\rho)$ всевозможными алгебраическими многочленами вида (1.3) в метрике пространства $W_2^m(\rho)$, а $E_{n-1}(f)_{L_2(\rho)}$ — наилучшее приближение в пространстве $L_2(\rho)$ функции $f \in L_2(\rho)$ алгебраическими многочленами степени не выше $n-1$.

Доказательство. Положим $X = \{x \in W_2^m(\rho) : R_l(x) = 0,\ l = \overline{0, m-1}\}$ и $Y = L_2(\rho)$ с нормами соответственно

$$\|x\|_X = \sum_{i=0}^{m} \|x^{(i)}(t)\|_Y, \quad x \in X; \quad \|y\|_Y = \left\{ \int_{-1}^{+1} \rho(t)|y(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad y \in Y.$$

Тогда задача (1.1)–(1.2) может быть записана в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$Ax \equiv Ux + Bx = y \quad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{2.4}$$

где $Ux = x^{(m)}(t)$, при краевых условиях (1.2). В силу условий теоремы операторы $A : X \to Y$ и $U : X \to Y$ имеют непрерывные обратные $A^{-1} : Y \to X$ и $U^{-1} : Y \to X$.

Введем подпространства

$$Y_n = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \beta_k t^{k-1} \right\} \equiv \mathbb{H}_{n-1}, \quad \beta_k \in \mathbb{R},$$

$$X_n = \{x_n \in \mathbb{H}_{n+m-1} : R_l(x_n) = 0, \quad l = \overline{0, m-1}\}.$$

Ясно, что $X_n \subset X$, $Y_n \subset Y$ и $\dim X_n = \dim Y_n = n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $\Pi_n : Y \to Y_n$ оператор метода подобластей по любой из систем узлов (2.1) и (2.2). В силу следствий лемм 2 и 3 из [3], леммы 1.1 и ее следствия работы [2] для любой $f \in Y$ имеем

$$E_{n-1}(f)_Y \leqslant \|f - \Pi_n f\|_Y \leqslant \frac{\pi}{2} E_{n-1}(f)_Y, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

$$1 \leqslant \|\Pi_n\|_{Y \to Y} \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Запишем СЛАУ (1.4)–(1.5) в виде эквивалентного ей линейного операторного уравнения

$$A_n x_n \equiv U x_n + \Pi_n B x_n = \Pi_n y \quad (x_n \in X_n, y_n \in Y_n) \tag{2.7}$$

и покажем, что операторы $A_n : X_n \to Y_n$ при всех $n \geqslant n_0$ линейно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} = O(1), \quad n \to \infty. \tag{2.8}$$

С этой целью к уравнениям (2.4) и (2.8) применим теорему 7 из ([5], гл. 1). Для любых $x_n \in X_n$, $x_n \neq 0$, из (2.4) и (2.8) находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Bx_n - \Pi_n B x_n\|_Y = \|x_n\|_X \|Bz_n - \Pi_n B z_n\|_Y \leqslant \varepsilon'_n \|x_n\|_X,$$

$$\varepsilon'_n = \sup_{\substack{z_n \in X_n, \\ \|z_n\|_{X_n} = 1}} \|Bz_n - \Pi_n B z_n\|_Y \leqslant \sup_{\substack{z \in X, \\ \|z\|_X \leqslant 1}} \|Bz - \Pi_n B z\|_Y = \sup_{f \in BS(0,1)} \|f - \Pi_n f\|_Y,$$

где $z_n = x_n / \|x_n\|$, $S(0,1) = \{x \in X : \|x\|_X \leqslant 1\}$. Поскольку в силу условия а) теоремы множество $BS(0,1)$ компактно в пространстве Y, то из (2.5) и теоремы Гельфанда (напр., [4], с. 274–276) следует $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon'_n = 0$. Поэтому

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \varepsilon'_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.9}$$

Кроме того, в силу (2.5) для правых частей уравнений (2.4) и(2.7) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \Pi_n y\|_Y \leqslant \frac{\pi}{2} E_{n-1}(y)_{L_2(\rho)} \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.10}$$

Поэтому в силу теоремы 7 ([5], гл. 1) для всех $n \in \mathbb{N}$ таких, что

$$q_n \equiv \varepsilon_n \|A^{-1}\|_{Y \to X} < 1 \quad (n > n_0), \tag{2.11}$$

операторы $A_n : X_n \to Y_n$ непрерывно обратимы и для $A_n^{-1} : Y_n \to X_n$ справедливы оценки (2.8); кроме того, приближенные решения $x_n^* = A_n^{-1} \Pi_n y$, определяемые по формуле (1.3*), сходятся к точному решению $x^* = A^{-1} y$ в пространстве X со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O(\varepsilon_n + \delta_n), \tag{2.12}$$

где ε_n и δ_n определены в (2.9) и (2.10).

Теперь с помощью теоремы 6 из ([5], гл. 1) и соотношений (2.5)–(2.12) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|E - A_n^{-1}\Pi_n A\|_{X\to X}\|x^* - \widetilde{x}_n\|_X, \tag{2.13}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|E - A_n^{-1}\Pi_n B\|_{X\to X}\|U^{-1}\|_{Y\to X}\|Ux^* - \Pi_n Ux^*\|_Y, \tag{2.14}$$

где $\widetilde{x}_n$ — произвольный элемент из X_n. Выбирая его соответствующим образом, из (2.13), (2.4), (2.6) получаем оценку

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n+m-1}(x^*)_X\}. \tag{2.15}$$

Аналогично, из (2.14), (2.4)–(2.6) и условия б) теоремы находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_Y\}. \tag{2.16}$$

Нетрудно показать, что

$$\|x^* - x_n^*\|_X \geqslant E_{n+m-1}(x^*)_X \geqslant E_{n-1}(x^{*(m)})_Y. \tag{2.17}$$

Из неравенств (2.15)–(2.17) следуют соотношения (2.3).

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *приближенные решения* (1.3*) *сходятся в пространствах* C^k ($k = \overline{0, m-1}$, $m \geqslant 1$) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^k} = \sum_{i=0}^{k} \|x^{*(i)}(t) - x_n^{*(i)}(t)\|_C = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)}\}. \tag{2.18}$$

Если $y \in C$, *а оператор* $B : X \to C$ *ограничен, то справедлива порядковая оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_C \ln n\}; \tag{2.19}$$

если же $y \in C$ *и*

$$\|\Pi_n B\|_{X\to C} = O(1), \quad n \to \infty, \tag{2.20}$$

то справедлива асимптотическая оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} \sim \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C, \quad n \to \infty, \tag{2.21}$$

где $E_{n-1}(\varphi)_C$ — *наилучшее равномерное приближение функции* $\varphi \in C$ *алгебраическими многочленами степени не выше* $n-1$ ($n \in \mathbb{N}$), *а символ* $\sim$ *означает знак сильной эквивалентности.*

Доказательство. Оценка (2.18) является следствием теоремы 1 и того известного факта, что пространство $W_2^m(\rho)$ непрерывно вложено в любое из пространств C^k при $k = 0, 1, \ldots, m-1$ ($m \geqslant 1$, $C^0 = C$). Переходя к доказательству (2.19), отметим, что

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = \|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} + \|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C, \tag{2.22}$$

где первое слагаемое оценено в (2.18), а для оценки второго слагаемого воспользуемся тождествами

$$x^{*(m)} \equiv y(t) - B(x^*; t), \quad x_n^{*(m)} \equiv \Pi_n(y; t) - (\Pi_n B)(x_n^*; t), \tag{2.23}$$

где $-1 \leqslant t \leqslant 1$.

Из (2.23) следует тождество

$$x^{*(m)} - x_n^{*(m)} = (x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}) - (\Pi_n B)(x^* - x_n^*). \tag{2.24}$$

В силу теоремы 1 и ограниченности оператора $B : X \to C$ из (2.24) находим неравенства

$$\begin{aligned}\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C &\leqslant \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C + \|\Pi_n\|_{C\to C}\|B\|_{X\to C}\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \\ &\leqslant 2\|\Pi_n\|_{C\to C}E_{n-1}(x^{*(m)})_C + \|\Pi_n\|_{C\to C}\|B\|_{X\to C}O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)}\} = \\ &= \|\Pi_n\|_{C\to C}O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_C + E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)}\} = O\{\|\Pi\|_{C\to C}E_{n-1}(x^{*(m)})_C\}. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Поскольку в силу (2.18)

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^{m-1}} = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)}\} = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_C\}, \tag{2.26}$$

то с учетом (2.22), (2.25) и (2.26) имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = O\{\|\Pi_n\|_{C\to C} E_{n-1}(x^{*(m)})_C\}. \tag{2.27}$$

Известно [6], [7], [2], что для узлов (2.1) и (2.2) справедлива оценка

$$\|\Pi_n\|_{C\to C} = O(\ln n), \quad n \to \infty. \tag{2.28}$$

Из (2.27) и (2.28) следует оценка (2.19).

Далее, из (2.24) с учетом (2.20) и теоремы 1 последовательно находим

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C \leqslant \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C + \|\Pi_n B\|_{X\to C}\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C + O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)}\} \sim \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C, \quad n\to\infty;$$
$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C \geqslant \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C - \|\Pi_n B\|_{X\to C}\|x^* - x_n^*\|_X \sim \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C, \quad n\to\infty;$$

поэтому

$$\|x^{*(m)} - x_n^{*(m)}\|_C \sim \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C, \quad n\to\infty. \tag{2.29}$$

Из соотношений (2.22), (2.26), (2.28) и (2.29) следует оценка (2.21). □

Из теоремы 2 и прямых теорем теории равномерных приближений функций (напр., [8]–[10]) получаем

Следствие. Пусть функция $y(t)$ и оператор B таковы, что функция $x^{*(m)}(t)$ удовлетворяет условию Дини–Липшица на сегменте $[-1,1]$. Тогда метод (1.1)–(1.5), (2.1)–(2.2) сходится в пространстве C^m со скоростью (2.19); если же

$$x^{*(m)}(t) \in W^r H^\alpha[-1,1] \quad (r+1\in\mathbb{N}, \quad 0<\alpha\leqslant 1), \tag{2.30}$$

то и со скоростью

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} = O\Big(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha}}\Big). \tag{2.31}$$

3. Некоторые замечания и дополнения

1°. Отметим, что утверждения, аналогичные теореме 2 и ее следствию, могут быть получены также самостоятельно, но при более жестких, чем выше, условиях; напр., как и в ([5], гл. 4), с использованием оценки (2.28), доказывается

Теорема 3. *Пусть функции $y(t)$ и $B(x;t)$ равномерно*[1] *относительно $x\in C^m$ удовлетворяют на $[-1,1]$ условию Дини–Липшица. Тогда СЛАУ* (1.4)–(1.5), (2.1)–(2.2) *однозначно разрешима при всех $n\geqslant n_1\in\mathbb{N}$ и приближенные решения* (1.3^*) *сходятся в пространстве C^m со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{C^m} \sim \|x^{*(m)} - \Pi_n x^{*(m)}\|_C = O\{E_{n-1}(x^{*(m)})_C \ln n\}, \quad n\to\infty;$$

если же выполняется условие (2.30)*, то и со скоростью* (2.31).

2°. С помощью результатов работы [11] и приведенных выше теорем доказывается

Теорема 4. *Метод осциллирующих функций* (1.1)–(1.5), (2.1)–(2.2) *обладает следующими оптимальными свойствами:*

[1]Это означает, что $\sup\{\omega(Bx;\delta) : x\in C^m,\ \|x\|_{C^m}=1\} = o\big\{\frac{1}{|\ln\delta|}\big\}$, $\delta\to+0$, где $\omega(\varphi;\delta)$ — модуль непрерывности функции $\varphi\in C[-1,1]$ с шагом $\delta\in(0,2]$.

а) *в условиях любой из теорем* 1 *и* 2 *метод оптимален по порядку среди всевозможных полиномиальных методов решения задачи* (1.1)–(1.2);

б) *в условиях второй части теоремы* 2, *а также теоремы* 3 *метод является асимптотически оптимальным среди всевозможных методов осциллирующих функций, основанных на аппроксимации полиномами.*

3°. Приведенные выше результаты остаются справедливыми и в том случае, когда в соболевском пространстве $X = W_2^m(\rho)$ вводится другая, но эквивалентная предыдущей, норма. Например, в силу условия б) теоремы 1 можно положить

$$\|x(t)\|_{W_2^m(\rho)} = \|x^{(m)}(t)\|_{L_2(\rho)} = \|Ux\|_{L_2(\rho)}, \quad x \in X; \tag{3.1}$$

в некоторых случаях норма (3.1) удобнее, чем использованная выше. Это видно хотя бы из следующего простого результата.

Теорема 5. *Пусть уравнение* $x^{(m)}(t) = 0$ *при краевых условиях* (1.2) *имеет лишь тривиальное решение и выполнено неравенство*

$$q = \frac{\pi}{2}\|B\|_{X\to Y} < 1. \tag{3.2}$$

Тогда как задача (1.1)–(1.2), *так и СЛАУ* (1.4)–(1.5), (2.1)–(2.2) *для любых* $n \in \mathbb{N}$ *однозначно разрешимы при любых правых частях*; *приближенные решения* (1.3*) *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *в пространстве* X *с нормой* (3.1), *при этом для любых* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_{W_2^m(\rho)} \leqslant \frac{\pi}{2 - \pi\|B\|_{X\to Y}} E_{n-1}(x^{*(m)})_{L_2(\rho)}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Из (3.1) и первого условия теоремы следует, что оператор $U : X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|U\|_{X\to Y} = \|U^{-1}\|_{Y\to X} = 1. \tag{3.4}$$

Поэтому уравнения (2.4) и (2.7) эквивалентны соответственно уравнениям

$$Kx \equiv x + U^{-1}Bx = U^{-1}y \quad (x, U^{-1}y \in X), \tag{3.5}$$

$$K_n x_n \equiv x_n + U^{-1}\Pi_n B x_n = U^{-1}\Pi_n y \quad (x_n, U^{-1}\Pi_n y \in X_n); \tag{3.6}$$

при этом операторы A и K (а также A_n и K_n) обратимы (или необратимы) одновременно и в случае их обратимости справедливы соотношения

$$\|A^{-1}\|_{Y\to X} = \|K^{-1}\|_{X\to X}, \quad \|A_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n} = \|K_n^{-1}\|_{X_n\to X_n}. \tag{3.7}$$

В силу (3.2), (3.4), (3.7) и полноты пространства X с нормой (3.1) оператор $K : X \to X$ (следовательно, и $A : X \to Y$) непрерывно обратим и

$$\|A^{-1}\|_{Y\to X} \leqslant \frac{1}{1 - \|U^{-1}B\|_{X\to X}} \leqslant \frac{\pi}{\pi - 2} < \infty; \tag{3.8}$$

аналогично, в силу (2.6), (3.2), (3.4), (3.7) и полноты пространства X_n операторы $K_n : X_n \to X_n$ (следовательно, и $A_n : X_n \to Y_n$) непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и

$$\|A_n^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \leqslant \frac{1}{1 - \|U^{-1}\Pi_n B\|_{X\to X}} \leqslant \frac{1}{1-q}. \tag{3.9}$$

В силу (3.5)–(3.9) первая часть теоремы доказана. Для доказательства второй части воспользуемся соотношениями (2.5), (2.6), (2.14), (3.1), (3.2), (3.4), (3.8) и (3.9), из которых при любых $n \in \mathbb{N}$ находим

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant (1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \|\Pi_n\|_{Y \to Y_n} \|B\|_{X \to Y}) \|U^{-1}\|_{Y \to X} \|Ux^* - \Pi_n Ux^*\|_Y \leqslant$$

$$\leqslant \left(1 + \frac{1}{1-q}\,\frac{\pi}{2}\|B\|_{X \to Y}\right)\frac{\pi}{2}E_{n-1}(Ux^*)_Y \leqslant \frac{1}{1-q}\frac{\pi}{2}E_{n-1}(Ux^*)_Y \leqslant \frac{\pi}{2 - \pi\|B\|_{X \to Y}}E_{n-1}(x^{*(m)})_Y. \quad \square$$

Литература

1. Ермолаева Л.Б. *Решение линейных уравнений методом осциллирующих функций* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Актуальные проблемы математики и механики. – Казань: Унипресс, 2000. – Т. 5. – С. 83–84.
2. Ермолаева Л.Б. *Решение интегральных уравнений методом подобластей* // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 9. – С. 37–49.
3. Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б. *Интерполяционные полиномы Лагранжа в пространствах Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 7–19.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
5. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
6. Нагих В.В. *Оценка нормы некоторого полиномиального оператора в пространстве непрерывных функций* // Методы вычислений. Вып. 10. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. – С. 99–102.
7. Керге Р.М. *О сходимости и устойчивости метода подобластей*: Автореф. дис. … канд. физ.-матем. наук. – Тарту, 1979. – 10 с.
8. Тиман А.Ф. *Теория приближения функций действительного переменного.* – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
9. Даугавет И.К. *Введение в теорию приближения функций.* – Л.: Изд-во ЛГУ, 1976. – 184 с.
10. Дзядык В.К. *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* – М.: Наука, 1977. – 490 с.
11. Габдулхаев Б.Г. *Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 12. – С. 3–18.

Казанская государственная архитектурно-строительная академия

Поступила 26.06.2002