ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 4 (443)

УДК 517.983

Ю.В. ЛАЗАРЕВ, А.В. МАРЧЕНКО, И.Б. СИМОНЕНКО

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ УСЕЧЕННЫХ ОДНОМЕРНЫХ КОНТИНУАЛЬНЫХ СВЕРТОК С РАЦИОНАЛЬНЫМИ СИМВОЛАМИ

Имеется много работ, в которых исследовано асимптотическое поведение определителя оператора усеченной континуальной свертки при увеличении области усечения. Прежде всего, это статья [1] и монография ([2], с. 169–172), содержащая достаточно полную библиографию по этому вопросу. В данной работе показано, что задача вычисления определителя усеченной одномерной континуальной свертки с рациональным символом решается в квадратурах. Вычисления основаны на результатах статьи [3] и приведенной ниже теореме.

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ — поля вещественных и комплексных чисел соответственно; линейное пространство — это пространство, линейное над полем $\mathbb{C}$; $\mathrm{Hom}(B_1, B_2)$, когда B_1, B_2 — банаховы пространства, — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из B_1 в B_2, с естественной нормой; $\mathrm{End}(B)$, когда B — банахово пространство, — банахова алгебра $\mathrm{Hom}(B, B)$; I_B — единичный оператор из алгебры $\mathrm{End}(B)$; $\mathfrak{S}_1(B)$, когда B — гильбертово пространство[1], — банахово пространство ядерных операторов из $\mathrm{End}(B)$ с естественной для такого пространства нормой (напр., [4], с. 100); $\det(I_B + K)$, когда $K \in \mathfrak{S}_1(B)$, — определитель оператора $I_B + K$, определяемый как $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}}(1+\lambda_j)$, где λ_j $(j \in \mathbb{N})$ — последовательность всех собственных чисел оператора K с учетом их кратности. Поскольку $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} |\lambda_j| \le \|K\|_{\mathfrak{S}_1(B)}$ ([5], с. 62), это определение корректно и функция $\Phi : \mathfrak{S}_1(B) \to \mathbb{C}$, определенная равенством $\Phi(K) = \det(I_B + K)$, непрерывна.

В данной работе примем следующие соглашения. Под функцией будем понимать комплекснозначное отображение; $[a, b]$, когда $a, b \in \mathbb{R}$, — замкнутая выпуклая оболочка точек a, b; $(a, b) = [a, b] \setminus \{a, b\}$; $L_2([a, b])$ — банахово пространство суммируемых с квадратом функций, определенных на $[a, b]$, с естественной нормой.

Пусть $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c \in (a, b)$; $Y = [a, b] \setminus \{c\}$; H_y, когда $y \in Y$, — пространство $L_2([c, y])$; $\Pi = [a, b]\times[a, b]$; k — непрерывная на Π функция; I_y, K_y $(\in \mathrm{End}(H_y))$ $(y \in Y)$ — семейства операторов, определенные равенствами $I_y f = f$, $[K_y(f)](x) = \int\limits_c^y k(x,t)f(t)dt$; $Y_0 = \{y \mid y \in Y$, оператор $I_y + K_y$ обратим$\}$; k_y, f_y $(y \in Y_0)$ — семейства функций, заданных на $[c, y]$ соотношениями $k_y(x) = k(x, y)$, $f_y = (I_y + K_y)^{-1}k_y$; q — функция, определенная на Y_0 формулой $q(y) = f_y(y)$.

Далее, пусть $H = L_2([a, b])$; $K \in \mathrm{End}(H)$ — оператор, определенный равенством $[K(f)](x) = \int\limits_a^b k(x,t)f(t)dt$, $K \in \mathfrak{S}_1(H)$; Δ — функция, заданная на Y формулой $\Delta(y) = \det(I_y + K_y)$; существует такая последовательность непрерывных на Π функций r_n $(n \in \mathbb{N})$, которая удовлетворяет следующим условиям:

---

[1] Под гильбертовым пространством мы понимаем линейное пространство со скалярным произведением, снабженное индуцированной этим произведением нормой и полное относительно этой нормы.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01195а).

1) для каждого n функция r_n представима в виде конечной суммы $r_n(x,t) = \sum c_1(x)d_1(t)$, где c_1, d_1 — определенные на сегменте $[a,b]$ непрерывные функции;
2) последовательность r_n равномерно стремится к функции k;
3) последовательность R_n ($\in \mathrm{End}(H)$), определенная равенством $[R_n(f)](x) = \int\limits_a^b r_n(x,t)f(t)dt$, стремится по норме пространства $\mathfrak{S}_1(H)$ к оператору K.

Теорема.

а) *Множество* Y_0 *открыто в* Y.
б) *Функция* q *непрерывна.*
в) *Функция* Δ *непрерывно дифференцируема на* Y_0 *и при* $y \in Y_0$ *имеет место равенство* $\Delta'(y)/\Delta(y) = q(y)$.
г) *Существует такое* $\varepsilon > 0$, *что* $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \setminus \{c\} \subset Y_0$, *и существует предел* $\lim\limits_{y\to c} \Delta(y) = 1$.

Данная теорема может быть применена для вычисления определителей операторов урезанной свертки с рациональным символом. Пусть $p \in L_2(-\infty, +\infty)$ — непрерывная функция; преобразование Фурье функции p — рациональная функция; I, P — операторы из алгебры $\mathrm{End}(H)$, определенные равенствами

$$If = f, \quad (Pf)(x) = \int_a^b p(x-t)f(t)dt.$$

В [3] разработан алгоритм решения уравнения $(I+P)f = g$, где f — искомая, а g — заданная функции. Используя эти результаты и вышеприведенную теорему, можно вычислить определитель оператора $I+P$. Например, если $a = 0$, $b > 0$ и $p(x) = \frac{3}{2}\exp(-|x|)$, то $\det(I+P) = (9e^b - e^{-3b})/8$.

Литература

1. Widom H. *Szego's limit theorem: the higher-dimensional matrix case* // J. Funct. Anal. – 1980. – T. 39. – C. 182–198.
2. Bottcher A., Silbermann B. *Invertibility and asymptotics of Toeplitz matrices.* - Berlin: Acad.-Verl., 1983. – 200 S.
3. Симоненко И.Б. *О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки* // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 2. – С. 213–226.
4. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения.* – М.: Наука, 1967. – 508 с.
5. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов.* – М.: Наука, 1965. – 448 с.

Ростовский государственный университет

Поступила 19.11.1997