ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 5 (444)

УДК 519.63

А.Д. ЛЯШКО, М.Р. ТИМЕРБАЕВ

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Статья посвящена исследованию существования и единственности обобщенного решения линейного вырождающегося эллиптического уравнения порядка $2m$ для двух случаев. Во-первых, для случая, когда уравнение вырождается на части границы области (в частности, на всей границе), и во-вторых, когда вырождение происходит внутри области. Применением теорем вложения весовых пространств Соболева анализируется постановка задачи в зависимости от степени вырождения коэффициентов уравнения. Для приближенного решения предлагается метод конечных элементов (МКЭ).

Вопросам разрешимости и анализу свойств решений уравнений, вырождающихся на границе области, посвящен ряд работ (см., напр., [1]–[7] и цитируемую там литературу). Сеточные методы для уравнений 2-го порядка, вырождающихся на части границы, рассматривались, например, в [8]–[17]. Метод конечных элементов для квазилинейного уравнения 4-го порядка, вырождающегося на части границы, рассмотрен в [18]. При изложении результатов мы следуем работам [15]–[20].

1. *Обозначения и вспомогательные результаты.* Пусть $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область с липшиц-непрерывной границей и $S \subset \partial\Omega$ — некоторая $n-1$-мерная достаточно гладкая поверхность. Обозначим расстояние от точки x до поверхности S через

$$\rho(x) = \inf\{|x-y| : y \in S\}.$$

Введем весовые пространства Лебега и Соболева

$$L_{p,\alpha}(\Omega) = \{u(x) : \rho(x)^\alpha u(x) \in L_p(\Omega)\} \quad (p>1),$$

$$|u|_{L_{p,\alpha}(\Omega)} = |\rho^\alpha u|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |\rho(x)^\alpha u(x)|^p dx\right)^{1/p};$$

$$W^m_{p,\alpha}(\Omega) = \{u(x) \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega) : D^i u(x) \in L_{p,\alpha}(\Omega),\ i=(i_1,i_2,\dots,i_n),\ |i| = i_1+i_2+\ldots+i_n \le m\},$$

$$\|u\|_{W^m_{p,\alpha}(\Omega)} = \left(\sum_{|i|\le m} \int_\Omega |\rho^\alpha D^i u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Для произвольного измеримого множества $K \subset \overline{\Omega}$ положим

$$|\rho^\alpha \nabla^m u|_{p,K} = \left(\sum_{|i|=m} \int_K |\rho^\alpha D^i u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Обозначим через $C^m_\beta(\overline{\Omega})$ весовое пространство m раз дифференцируемых на области Ω функций, $\|u\|_{C^m_\beta(\overline{\Omega})} = \max\limits_{|i|\le m}\max\limits_{x\in\overline{\Omega}} |\rho(x)^\beta D^i u(x)|$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 98-01-00260).

Приведем необходимые в дальнейшем теоремы вложения для весовых пространств Соболева (см. [19]).

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < +\infty$, $\gamma = m - k - n/p > 0$, $k < m$, $\alpha, \beta \geq 0$. *Если* $\beta < \alpha + \gamma$, *то* $W^m_{p,\beta}(\Omega)$ *компактно вложено в* $C^k_\alpha(\overline{\Omega})$ *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C^k_\alpha(\Omega)} \leq c\rho^\tau_\Omega \|u\|_{W^m_{p,\beta}(\Omega)},$$

где $\tau = \max(0, \alpha - \beta)$.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p \leq q < +\infty$, $k < m$, $\gamma = m - k - n/p + n/q > 0$, $\alpha, \beta \geq 0$. *Если* $\beta \leq \alpha + \gamma$, *то* $W^m_{p,\beta}(\Omega)$ *непрерывно вложено в* $W^k_{q,\alpha}(\Omega)$, *т. е.*

$$\|u\|_{W^k_{q,\alpha}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^m_{p,\beta}(\Omega)}.$$

Если $\beta < \alpha + \gamma$, *то указанное вложение компактно.*

Теорема 3. *Пусть* Γ — $n{-}1$*-мерное гладкое многообразие. Если* $\alpha < m - k - 1/p$, *то* $W^m_{p,\alpha}(\Omega)$ *компактно вложено в* $W^k_p(\Gamma)$.

2. *Эллиптическое уравнение, вырождающееся на части границы.* Рассмотрим уравнение

$$Au = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|i|,|j|=k} (-1)^k D^i(a_{i,j}(x) D^j u(x)) = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{1}$$

Будем предполагать, что $a_{ij} = a_{ji}$ и выполнены следующие условия:

$$\overline{c}_m \rho^{2\alpha}(x) \sum_{|i|=m} |\xi_i|^2 \leq \sum_{|i|,|j|=m} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq c_m \rho^{2\alpha}(x) \sum_{|i|=m} |\xi_i|^2, \tag{2}$$

$\overline{c}_m > 0$, $\alpha \geq 0$,

$$0 \leq \sum_{|i|,|j|=k} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq c_k \rho^{2\alpha_k}(x) \sum_{|i|=k} |\xi_i|^2 \quad (x \in \Omega, \ \ \xi \in R^n), \tag{3}$$

$\alpha_k \geq 0$, $\alpha_k \geq \alpha - m + k$, $c_k \geq 0$, $k = \overline{0, m-1}$;

$$\int_\Omega |\rho^{-\alpha_0} f(x)|^2 dx. \tag{4}$$

При $\alpha > 0$ уравнение (1) вырождается на S.

Обозначим через V замыкание в норме $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ финитных в Ω функций. Всюду далее через $\|\cdot\|$ обозначается норма этого пространства. Решение уравнения (1) будем искать в пространстве V. Введем на V билинейную форму $a(u,v)$ и линейный функционал $F(v)$, определяемые коэффициентами и правой частью уравнения

$$a(u,v) = \int_\Omega \sum_{|i|,|j| \leq m} a_{i,j}(x) D^i u(x) D^j v(x) dx,$$

$$F(v) = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

Обобщенным решением уравнения (1) в пространстве V будем называть решение $u \in V$ вариационного уравнения

$$a(u,v) = F(v) \quad \forall v \in V. \tag{5}$$

3. *Граничные условия и разрешимость.* Выясним, как влияет степень вырождения уравнения α на граничные значения решения и ее производных, и обсудим в связи с этим постановку граничных условий. Прежде всего отметим, что в силу определения пространства V функция $u \in V$ обращается в нуль на $\partial\Omega \setminus S$ вместе с производными до порядка $m-1$

$$D^i u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \setminus S, \quad |i| \leq m - 1.$$

Пусть k обозначает наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству $k < m - 1/2 - \alpha$. Тогда (см. теорему 3) функция $u(x)$ и ее производные до порядка k включительно (если $k \geq 0$) имеют след на S, равный нулю

$$D^i u(x) = 0, \quad x \in S, \quad |i| \leq k.$$

Для производных $D^i u(x)$ более высоких порядков $|i| > k$ след на S, вообще говоря, не определен, и в этом случае (для гладкого решения) на S возникают естественные граничные условия. В частности, при сильном вырождении, т. е. при $\alpha \geq m - 1/2$, оператор следа на S функций пространства V не определен, и на S возникают только естественные граничные условия.

Таким образом, если $m - k - 3/2 \leq \alpha < m - k - 1/2$, то

$$V = \{v \in W^m_{2,\alpha}(\Omega) : D^i v(x) = 0, \ x \in S, \ |i| \leq k; D^i v(x) = 0, \ x \in \partial\Omega \setminus S, \ |i| \leq m-1\}.$$

В частности, если $\alpha \geq m - 1/2$, то

$$V = \{v \in W^m_{2,\alpha}(\Omega) : D^i v(x) = 0, \ x \in \partial\Omega \setminus S, \ |i| \leq m-1\}.$$

Если при этом $S = \partial\Omega$, т. е. вся граница является поверхностью вырождения коэффициентов уравнения, то $V = W^m_{2,\alpha}(\Omega)$.

Обсудим теперь разрешимость задачи (5). Прежде отметим, что из неравенств $\alpha_r \geq \alpha - m + r$ в силу теоремы 2 вытекает

$$\|u\|_{W^r_{2,\alpha_r}(\Omega)} \leq c\|u\|_{W^m_{2,\alpha}(\Omega)}, \quad r = \overline{0, m-1}.$$

Используя условия на коэффициенты и правую часть, нетрудно установить непрерывность формы $a(u,v)$ и линейного функционала $F(v)$ на пространстве V (ниже обозначено $\alpha_m = \alpha$)

$$a(u,v) \leq \sum_{r=0}^{m} c_r |\rho^{\alpha_r} \nabla^r u|_{2,\Omega} \, |\rho^{\alpha_r} \nabla^r v|_{2,\Omega} \leq c\|u\| \, \|v\|,$$

$$|F(v)| = \left| \int_\Omega f(x) v(x) dx \right| \leq |\rho^{-\alpha_0} f|_{2,\Omega} \, |\rho^{\alpha_0} v|_{2,\Omega} \leq c\|v\|.$$

Предполагая выполненным хотя бы одно из условий

$$\alpha < m - 1/2, \quad S \neq \partial\Omega, \quad a_{00} \not\equiv 0, \tag{6}$$

будем иметь V-эллиптичность формы $a(u,v)$

$$a(u,u) \geq \overline{c}_m |\rho^\alpha \nabla^m u|^2_{2,\Omega} + \int_\Omega a_{00}(x) u^2(x) dx \geq c\|u\|^2.$$

Таким образом, в силу теоремы Лакса–Мильграма имеет место

Теорема 4. *Задача* (5) *однозначно разрешима в пространстве* V.

4. *Эллиптическое уравнение, вырождающееся внутри области.* Пусть некоторая $n{-}1$-мерная достаточно гладкая поверхность $S \subset \overline{\Omega}$ разбивает Ω на две области Ω_1 и Ω_2. Так же, как и выше, $\rho(x)$ обозначает расстояние от x до S. Рассмотрим уравнение (1) с входными данными, удовлетворяющими условиям (2)–(4). Таким образом, коэффициенты уравнения вырождаются на поверхности S, т. е. внутри области Ω. Для исследования этого уравнения, а также анализа его аппроксимаций конечными элементами, определим на Ω пространство функций $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$, являющееся пространством Соболева с весом $\rho^\alpha(x)$, аннулирующимся на S. Пусть $Q_l u = u|_{\Omega_l}$ — операторы сужения на Ω_l $(l = 1, 2)$, k — наибольшее целое, удовлетворяющее неравенству $k < m - \alpha - 1/2$, $\mathbf{n}$ — внешняя к Ω_1 нормаль. Тогда

$$W^m_{2,\alpha}(\Omega) = \left\{ v \in L_{2,\alpha}(\Omega) : Q_l v \in W^m_{2,\alpha}(\Omega_l), \ \ l = 1, 2; \ \ \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{n}^r} Q_1 v \Big|_S = \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{n}^r} Q_2 v \Big|_S, \ \ r = \overline{0, k} \right\}$$

и

$$\|v\|_{W^m_{2,\alpha}(\Omega)} = \|Q_1 v\|_{W^m_{p,\alpha}(\Omega_1)} + \|Q_2 v\|_{W^m_{2,\alpha}(\Omega_2)}.$$

Заметим, что в случае $\alpha = 0$ определенное выше пространство совпадет с классическим (невесовым) пространством Соболева. Пространство $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ можно отождествить с подпространством декартова произведения $W^m_{2,\alpha}(\Omega_1) \times W^m_{2,\alpha}(\Omega_2)$, состоящего из пар функций $(v_1, v_2) \in W^m_{2,\alpha}(\Omega_1) \times W^m_{2,\alpha}(\Omega_2)$, удовлетворяющих условиям согласования на S,

$$\frac{\partial^r}{\partial \mathbf{n}^r} v_1\Big|_S = \frac{\partial^r}{\partial \mathbf{n}^r} v_2\Big|_S, \quad r = \overline{0, k}.$$

Далее, как и в случае вырождения на части границы области, определим пространство V как замыкание в норме пространства $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ множества финитных в Ω функций. Поскольку по условию пересечение S с $\partial\Omega$ имеет нулевую $n-1$-мерную поверхностную меру, то

$$V = \left\{ v \in W^m_{2,\alpha}(\Omega) : \frac{\partial^r v}{\partial \mathbf{n}^r}\Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad r = \overline{0, m-1} \right\}$$

($\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$). Под обобщенным решением уравнения (1) в пространстве V, так же, как и в п. 2, будем понимать решение вариационной задачи (5). Поскольку весовая функция $\rho(x)$ вырождается на общей части границ Ω_1 и Ω_2, то для каждой из этих подобластей справедливы теоремы вложения 1–3. Следовательно, рассуждая далее так же, как и в п. 2, устанавливаем разрешимость задачи.

Теорема 5. *Задача (5) в рассматриваемом случае вырождения коэффициентов внутри области имеет единственное решение.*

Выясним далее, каким условиям в точках вырождения удовлетворяет решение задачи (5). Интегрируя по частям отдельно по каждой области Ω_l, складывая затем результаты и обозначая через $[v]_S$ скачок v при переходе через S, после ряда преобразований получим

$$a(u, v) = \int_\Omega \Bigg(\sum_{k=0}^{m} \sum_{|i|,|j|=k} (-1)^k D^i (a_{i,j} D^j u) \Bigg) v\, dx +$$
$$+ \int_S \sum_{r=0}^{k} [q_{2m-1-r}(u)]_S \frac{\partial^r v}{\partial n^r} dx + \int_S \sum_{r=k+1}^{m-1} q_{2m-1-r}(u) \frac{\partial^r v}{\partial n^r} dx,$$

где $q_r(u)$, $r = \overline{m, 2m-1}$, — дифференциальные выражения, возникающие на S при интегрировании по частям (для $m = 2$ ниже приводится их явный вид; в общем случае ввиду их громоздкости эти выражения опускаем). Таким образом, получаем следующие условия на поверхности вырождения S:

$$\left[\frac{\partial^r u}{\partial n^r}\right]_S = 0, \quad [q_{2m-1-r}(u)]_S = 0, \quad r = 0, 1, \ldots, k, \tag{7}$$
$$q_r(u)|_S = 0, \quad r = m, m+1, \ldots, 2m-k-2. \tag{8}$$

Отметим два крайних случая.

1. $\alpha < 1/2$. В этом случае $k = m - 1$ и выполнены условия (7); условия (8) отсутствуют.
2. $\alpha \geq m - 1/2$. В этом случае $k < 0$ и выполнены естественные условия (8); условия (7) отсутствуют. Поэтому задача (5) фактически распадается на две независимые задачи в подобластях Ω_1 и Ω_2 с естественными граничными условиями на S — общей части их границ (см. определение пространств $W^m_{2,\alpha}(\Omega)$ и V выше).

Приведем явный вид дифференциальных выражений $q_r(u)$, $r = 2, 3$, для уравнения четвертого порядка ($m = 2$) в двумерной ($n = 2$) области. Обозначим

$$A_j = \sum_{|i| \leq 2} a_{ij} D^i u, \quad |j| \leq 2.$$

Тогда

$$q_2(u) = A_{20}\cos^2(\mathbf{n},x_1) + A_{11}\cos(\mathbf{n},x_1)\cos(\mathbf{n},x_2) + A_{02}\cos^2(\mathbf{n},x_2),$$

$$q_3(u) = \left(A_{10} - \frac{\partial}{\partial x_1}A_{20} - \frac{\partial}{\partial x_2}A_{11}\right)\cos(\mathbf{n},x_1) + \left(A_{01} - \frac{\partial}{\partial x_2}A_{02} - \frac{\partial}{\partial x_1}A_{11}\right)\cos(\mathbf{n},x_2) -$$
$$- \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}((A_{20} - A_{02})\cos(\mathbf{n},x_1)\cos(\mathbf{n},x_2) + A_{11}(\cos^2(\mathbf{n},x_1) - \cos^2(\mathbf{n},x_2)))$$

($\boldsymbol{\tau}$ — вектор, касательный к S).

5. *Метод конечных элементов.* Всюду ниже при изложении МКЭ используется терминология и некоторые обозначения, принятые в [21]. Ограничимся здесь рассмотрением вырождения внутри двумерной области для уравнения четвертого порядка. В дальнейшем для простоты изложения будем считать, что область Ω — многоугольник, и линия вырождения S кусочно-линейна. Пусть Ω подвергнута правильной регулярной триангуляции (разбиению на треугольные или прямоугольные конечные элементы) T_h так, что S не пересекается с внутренностью ни одного участвующего в триангуляции конечного элемента. Предположим, что конечномерное пространство приближенных решений V_h удовлетворяет условию

$$V_h \subset C^1(\Omega) \bigcap \overset{o}{W}{}_2^2(\Omega)$$

(примеры таких конечноэлементных пространств см. в [21], с. 325–347). При выполнении этих условий обеспечивается конформность метода, т. е. включение $V_h \subset V$.

Под приближенным решением задачи (5), как обычно, будем понимать функцию $u_h \in V_h$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$a(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \tag{9}$$

Условия (2), (3) гарантируют однозначную разрешимость задачи (9) при любой $f \in (W^2_{2,\alpha}(\Omega))^*$ (в частности, для правой части $f(x)$, удовлетворяющей условию (4)) и справедливость оценки для разности точного и приближенного решений

$$\|u - u_h\| \le c \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| \tag{10}$$

(см., напр., [21], с. 315).

Приступим теперь к оценке $\inf\limits_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|$ через $\|u - \Pi_h u\|$, где Π_h — оператор V_h-интерполяции, для некоторых специальных видов конечных элементов. В свою очередь, оценка величины (глобальная оценка погрешности интерполяции) $\|u - \Pi_h u\|$ складывается из погрешностей интерполяции на конечных элементах, участвующих в интерполяции. Таким образом, анализ точности МКЭ сводится к получению оценок погрешностей интерполяции в весовых нормах на типичном конечном элементе.

Введем обозначения

$$\rho_K = \sup\{\rho(x) : x \in K\}, \quad h_K = \operatorname{diam} K,$$
$$h = \max\{h_K : K \in T_h\}, \quad d_k = \sup\{\operatorname{diam} S : S \subset K, \ \ S \text{ — круг}\}.$$

Очевидно, $d_K \le h_K$. Будем считать выполненным условие регулярности $h_K \le \sigma d_K$. Пусть (K, P_K, Σ_K) — типичный конечный элемент триангуляции T_h, l — максимальный порядок производных, участвующих в определении множества степеней свободы Σ_K элемента K, $\Pi_K : C^l(K) \to P_K$ — оператор P_K-интерполяции. При формулировке оценок используем обозначение

$$W^{m+1}_{p,\beta} \overset{c}{\subset} W^r_{q,\alpha} \bigcap C^l, \tag{11}$$

означающее выполнимость следующих неравенств:

$$p \le q, \quad \alpha, \beta \ge 0, \quad r < m+1, \quad \gamma \equiv m+1-2/p-r+2/q > 0,$$
$$\beta < \alpha + \gamma, \quad \beta < m+1-2/p,$$

которые обеспечивают компактность вложения (см. теоремы 1, 2)

$$W^{m+1}_{p,\beta}(K) \overset{c}{\subset} W^r_{q,\alpha}(K) \bigcap C^l(K)$$

для произвольного $K \in T_h$. Используя технику работы [20], для аффинных семейств конечных элементов (лагранжевых или эрмитовых) ([21], с. 88) устанавливаем следующую основную оценку.

Теорема 6. *Если T_h аффинно и имеет место включение* (11), *то существует постоянная c, не зависящая от S, такая, что*

$$\|u - \Pi_K u\|_{W^r_{q,\alpha}(K)} \le c\rho_K^{\alpha-\beta} h_K^{\gamma} |\rho^\beta \nabla^{m+1} u|_{p,K},$$

где $\gamma = m+1-2/p-r+2/q$.

Отметим, что эти оценки обобщают на весовые нормы хорошо известные и ставшие классическими оценки погрешности конечноэлементной интерполяции в невесовых пространствах Соболева (см., напр., [21]).

Используя эти общие результаты, получим оценки погрешности интерполирования на некоторых конкретных конечных элементах.

1) Эрмитов прямоугольный элемент Богнера–Фокса–Шмидта ([21], с. 82). В этом случае $m = 3$, $\gamma = 4-2/p-r+2/q$ $(r < 4)$, и при $\beta < \gamma + \alpha$, $\beta < 2-2/p$ $W^4_{p,\beta} \subset C^2$. Имеет место оценка

$$\|u - \Pi_K u\|_{W^r_{q,\alpha}(K)} \le ch_K^{4-r-2/p+2/q} \rho_K^{\alpha-\beta} |\rho^\beta \nabla^4 u|_{p,K}. \tag{12}$$

2) Эрмитов треугольник типа (5) ([21], с. 329). В этом случае $P_K = P_5(K)$, $\dim P_K = 21$, $m = 5$, $\gamma = 6-2/p-r+2/q$ $(r < 6)$, $\beta < 4-2/p$, и при $\beta < \gamma + \alpha$ $W^6_{p,\beta} \subset C^2$. Имеет место оценка

$$\|u - \Pi_K u\|_{W^r_{q,\alpha}(K)} \le ch_K^{6-r-2/p+2/q} \rho_K^{\alpha-\beta} |\rho^\beta \nabla^6 u|_{p,K}. \tag{13}$$

Аналогичные оценки удается получить и для так называемых почти афинных семейств конечных элементов, наиболее часто используемых при решении уравнений четвертого порядка.

Рассмотрим, например, треугольник Аргириса ([21], с. 328).

Теорема 7. *Пусть $r < 6$, $1 < p \le q \le +\infty$, $\gamma = 6-2/p-r+2/q$, $\beta < \gamma + \alpha$, $\beta < 4-2/p$. Тогда*

$$\|u - \Pi_K u\|_{W^r_{q,\alpha}(K)} \le ch_K^{\gamma} \rho_K^{\alpha-\beta} |\rho^\beta \nabla^6 u|_{p,K}. \tag{14}$$

Доказательство (ср. [21], с. 330). Пусть $\Lambda : C^2(K) \to P_5(K)$ — оператор интерполирования на эрмитовом треугольнике типа (5). В силу (13)

$$\|u - \Lambda u\|_{W^r_{q,\alpha}(K)} \le ch_K^{\gamma} \rho_K^{\alpha-\beta} |\rho^\beta \nabla^6 u|_{p,K}.$$

Оценим функцию $\eta = \Pi_K u - \Lambda u$ в норме $W^r_{q,\alpha}(K)$. Очевидно $\eta(x) = 0$ при $x \in \partial K$, т. к. $D^i \eta(a_s) = 0$ при $|i| \le 2$. Кроме того,

$$\eta'(b_s)(a_s - b_s) \equiv \nabla \eta(b_s)(a_s - b_s) = \frac{\partial}{\partial n}(u - \Lambda u)(b_s)(a_s - b_s)n_s$$

для $s = 1, 2, 3$ ([21], с. 330).

Пусть η_s — базисная функция, соответствующая степени свободы $v \to v'(b_s)(a_s - b_s)$. Тогда

$$\eta = \Pi_K u - \Lambda u = \sum_{s=1}^{3} \eta'(b_s)(a_s - b_s)\eta_s = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial n}(u - \Lambda u)(b_s)[(a_s - b_s)n_s]\eta_s.$$

Поскольку $\left|\frac{\partial}{\partial n}(u-\Lambda u)(b_s)\right| \leq \sqrt{2}\|u-\Lambda u\|_{W^1_\infty(K)}$, то по теореме 6 при $r=1$, $q=\infty$, $m=5$, $\gamma=5-2/p$, $\alpha=0$ получим $\|u-\Lambda u\|_{W^1_\infty(K)} \leq ch_K^{5-2/p}\rho_K^{-\beta}|\rho^\beta\nabla^6 u|_{p,K}$. Далее, очевидно, для почти всех $x\in K$ и для $r=0,1,\ldots,r$ имеем $|\rho^\alpha(x)\nabla^r\eta_s(x)| \leq \rho_K^\alpha|\nabla^r\eta_s(x)|$, откуда $|\rho^\alpha\nabla^r\eta_s(x)|_{q,K} \leq \rho_K^\alpha|\nabla^r\eta_s(x)|_{q,K}$. Поскольку ([21], с. 331) $|\nabla^r\eta_s(x)|_{q,K} \leq h_K^{2-2/q-r}|\nabla^r\widehat{\eta}_s|_{q,\widehat{K}}$, то, учитывая оценку $|(a_s-b_s)\cdot n_s| \leq h_K$, окончательно будем иметь

$$\|\Pi_K u-\Lambda u\|_{W^r_{q,\alpha}(K)} \leq ch_K^{5-2/p}\rho_K^{-\beta}h_K h_K^{2/q-r}\rho_K^\alpha|\rho^\beta\nabla^6 u|_{p,K} = ch_K^{6-2/p+2/q-r}\rho_K^{\alpha-\beta}|\rho^\beta\nabla^6 u|_{p,K}. \quad \square$$

Оценки (12)–(14) показывают, что погрешность интерполирования на элементе зависит как от диаметра элемента, так и от расстояния элемента до множества вырождения S. Поэтому при получении оценок погрешности по всей области естественно согласовать величины ρ_K и h_K. Именно, следуя [20], [15]–[17], будем говорить, что семейство триангуляций сгущается вблизи множества S со степенью сгущения $\mu \geq 1$, если существуют такие не зависящие от h положительные постоянные σ_1, σ_2, что для всех конечных элементов триангуляции выполнено неравенство

$$\sigma_1 h^\mu \leq h_K \leq \sigma_2 h\rho_K^{1-1/\mu}. \tag{15}$$

Условие (15) означает, что конечный элемент, расположенный на расстоянии $O(1)$ от S, имеет диаметр $O(h)$, а для элементов, лежащих вблизи S, имеем $h_K=O(h^\mu)$. В случае $\mu=1$ условие (15) означает квазиравномерность триангуляции.

Предполагая теперь, что решение задачи (5) удовлетворяет соответствующим условиям гладкости, и используя оценки (10), (12)–(14), точно так же, как и в [15]–[17], можно получить оценки точности МКЭ при использовании того или иного конкретного конечного элемента. Сформулируем, например, соответствующий результат для треугольника Аргириса.

Теорема 8. *Пусть u — решение задачи (5) — таково, что его сужение на каждую из подобластей Ω_l, $l=1,2$, принадлежит классу $W^6_{2,\beta}(\Omega_l)$, выполнены условия теоремы 7 при $r=2$, $p=q=2$, а также условия (2), (3) и неравенство (15). Тогда*

$$\|u-u_h\|_{W^2_{2,\alpha}(\Omega)} \leq ch^\vartheta|\rho^\beta\nabla^6 u|_{2,\Omega},$$

где $\vartheta=\min(\gamma,\mu(\gamma+\alpha-\beta))$.

Литература

1. Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений на границе области* // ДАН СССР. – 1951. – Т. 77. – № 2. – С. 181–183.
2. Михлин С.Г. *О применимости вариационного метода к некоторым вырождающимся эллиптическим уравнениям* // ДАН СССР. – 1953. – Т. 91. – № 4. – С. 723–726.
3. Вишик М.И. *Краевые задачи для эллиптических дифференциальных уравнений, вырождающихся на границе области* // УМН. – 1954. – Т. 9. – № 1. – С. 138–143.
4. Кудрявцев Л.Д. *О решении вариационным методом эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 108. – № 1. – С. 16–19.
5. Глушко В.П. *Первая краевая задача для уравнений эллиптического типа, вырождающихся на многообразиях* // ДАН СССР. – 1959. – Т. 129. – № 3. – С. 492–495.
6. Трибель Х. *Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1980. – 664 с.
7. Лизоркин П.И., Никольский С.М. *Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью* // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1983. – Т. 161. – С.157–183.
8. Гусман Ю.А., Оганесян Л.А. *Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т.5. – № 2. – С. 351–357.

9. Croziex M., Thomas J.M. *Elements finis et problemes elleptiques degeneres* // Rev. franc. automat., inform., rech. operat. – 1973. – T. 7. – № R-3. – P. 77–104.
10. Лапин А.В., Смирнов Ю.Б. *Исследование разностных схем для квазилинейных вырождающихся эллиптических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12. – № 5. – С. 892–901.
11. Bendali A. *Approximation of a degenerated elliptic boundary value problem by a finite element method* // RAIRO. Anal. Numer. – 1981. – V. 15. – № 2. – P. 87–99.
12. Moing P. *Resolution par une methode d'elements finis du probleme de Dirichlet pour un operateur elliptique degenere* // Compt. Rend. Acad. Sci. – Paris, 1981. – V. 292. – № 3. – P. 217–220.
13. Катрахов В.В., Катрахова А.А. *Метод конечных элементов для некоторых вырождающихся эллиптических краевых задач* // ДАН СССР. – 1984. – Т. 279. – № 4. – С. 799-802.
14. Hatri M. *Estimation d'erreur optimale par la methode des elements finis pour un probleme aux limites degenere* // Compt. Rend. Acad. Sci. – Paris, 1984. – V. 37. – № 5. – P. 573–576.
15. Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р. *Оценки точности схем метода конечных элементов для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка* // Дифференц. уравнения. – 1993. – № 7. – С. 1210–1215.
16. Тимербаев М.Р., Ляшко А.Д. *Об оценках погрешности схем метода конечных элементов для квазилинейных вырождающихся уравнений 2-го порядка* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30. – № 7. – С. 1239–1243.
17. Тимербаев М.Р. *Конечноэлементная аппроксимация вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка в области с криволинейной границей* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 9. – С. 78–86.
18. Карчевский М.М., Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р. *Метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся уравнений четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. – 1999. – № 2. – С. 232–237.
19. Тимербаев М.Р. *Теоремы вложения весовых пространств Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 9. – С. 56–60.
20. Тимербаев М.Р. *Оценки погрешности n-мерной сплайн-интерполяции в весовых нормах* // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 10. – С. 54–60.
21. Сьярле Ф. *Метод конечных элементов для эллиптических задач.* – М.: Мир, 1980. – 512 с.

Казанский государственный университет

Поступила 27.01.1999