ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 12 (463)

УДК 517.977

О.О. ВАСИЛЬЕВА, О.В. ВАСИЛЬЕВ

К ПОИСКУ РАВНОВЕСНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ m ЛИЦ

1. Постановка задачи

Пусть на заданном отрезке времени $T = [t_0, t_1]$ каждый i-й участник дифференциальной игры выбирает свое управление $u_i = u_i(t)$, $u_i(t) \in E^{r_i}$, $i = 1, 2, \dots, m$, из класса измеримых функций, стесненных прямыми ограничениями $u_i(t) \in U_i$, где $U_i \subset E^{r_i}$ — компакт. Пусть также выбранный набор допустимых управлений

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t)), \quad u(t) \in U,$$
$$U = U_1 \times U_2 \times \dots \times U_m \subset E^r, \quad r = \sum_{i=1}^{m} r_i,$$

характеризует ситуацию в игре. При сложившейся ситуации состояние $x = x(t, u)$, $x(t, u) \in E^n$, процесса игры определяется задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad t \in T. \tag{1.1}$$

Функционал

$$J_i(u) = J_i(u_1, \dots, u_m) = \varphi_i(x(t_1)) + \int_T F_i(x, u, t)dt, \quad i = 1, 2, \dots, m, \tag{1.2}$$

где φ_i, F_i — скалярные функции своих переменных, характеризует выигрыш i-го игрока. Каждый из игроков выбором своего допустимого управления стремится максимизировать свой функционал выигрыша. Под концом или решением игры будем понимать такой набор допустимых управлений $u^* = u^*(t)$ и ему соответствующее состояние $x^* = x(t, u^*)$, при которых

$$J_i(u^*) = \max_{u_i(t) \in U_i} J_i(u_1^*, \dots, u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^*, \dots, u_m^*), \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{1.3}$$

Набор управлений $u^* = u^*(t)$, удовлетворяющих условиям (1.3), по аналогии с конечномерной ситуацией ([1]; [2], с. 81) будем называть равновесными управлениями. Наша задача состоит в построении метода поиска равновесных управлений.

Заметим, что

$$J(u) = \sum_{i=1}^{m} J_i(u) \tag{1.4}$$

обычно называют ценой игры. Если $J(u) = 0$, $u \in U$, то такая игра называется игрой с нулевой суммой. При $m = 2$ игра с нулевой суммой называется антагонистической. Алгоритм решения антагонистической игры предложен в [3]. Здесь будем рассматривать игру m лиц с переменной суммой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и федеральной целевой программы “Интеграция”.

2. Метод решения

Предварительно в наборе управлений $u = (u_1, \dots, u_m)$ формально выделим управление u_i, которое соответствует функционалу выигрыша $J_i(u)$, и введем обозначение

$$u = (u_i; v_i), \quad v_i = (u_1, \dots, u_{i-1}, u_{i+1}, \dots, u_m).$$

Теперь в системе дифференциальных уравнений (1.1) определим m задач оптимального управления

$$\overline{u}_i(t, v_i) : J_i(\overline{u}_i(v_i); v_i) = \max_{u_i(t) \in U_i} J_i(u_i; v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \tag{2.1}$$

Предположим, что оптимальные управления $\overline{u}_i = \overline{u}_i(t, v_i)$ в задачах (2.1) существуют для любых $v_i = v_i(t)$, $v_i(t) \in U_i$, $i = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$. Для нахождения этих управлений можно использовать итерационные процессы принципа максимума ([4], с. 114), хотя с их помощью отыскиваются локально-оптимальные управления. Естественно, что при этом на параметры системы (1.1) и функционалов (1.2) надо наложить известные условия, при которых справедлив принцип максимума Л.С. Понтрягина. Напомним эти условия. Вектор-функция $f(x, u, t)$ и скалярные функции $\varphi_i(x)$, $F_i(x, u, t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, непрерывны по своим переменным вместе с частными производными по x. Кроме того, вектор-функция $f(x, u, t)$ удовлетворяет неравенству Липшица по x с одной константой для всех $u(t) \in U$, $t \in T$.

Если предположить, что система (1.1) линейна по состоянию

$$\dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0,$$

подинтегральные функции F_i в функционалах (1.2) имеют вид

$$F_i(x, u, t) = F_i^{(1)}(x, t) + F_i^{(2)}(u, t), \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

а функции $\varphi_i(x)$, $F_i^{(1)}(x, t)$, $i = 1, 2, \dots, m$, вогнуты по x для каждого $t \in T$, то любое локально-оптимальное управление $\overline{u}_i$ будет оптимальным.

Замечание. С использованием задач (2.1) равновесные управления (1.3) можно определять как решения системы операторных уравнений $u_i(t) = \overline{u}_i(t, v_i)$, $\quad i = 1, 2, \dots, m$, где равенство понимается почти всюду на T.

Кажущаяся простота такого подхода редко приводит к результату даже для конечномерной ситуации ([1]; [2], с. 84). Поэтому предложим другой метод.

На основе возможности решения задач (2.1) сформируем функционалы

$$\overline{J}(u) = \sum_{i=1}^{m} J_i(\overline{u}_i(v_i); v_i), \tag{2.2}$$

$$\Phi(u) = \overline{J}(u) - J(u) = \sum_{i=1}^{m} (J_i(\overline{u}_i(v_i); v_i) - J_i(u_i; v_i)), \tag{2.3}$$

где каждое слагаемое в функционале (2.3) неотрицательно.

Теорема. $\Phi(u) \geq 0$, $u(t) \in U$. *Если* $\Phi(u^*) = 0$, *то* u^* *— набор равновесных управлений. Если* u^* *— набор равновесных управлений, то* $\Phi(u^*) = 0$.

Результат теоремы следует из определения (1.3), задач (2.1), замечания и вида функционалов (2.2), (2.3).

Таким образом, поиск равновесных управлений сводится к еще одной задаче оптимального управления. Именно, к задаче минимизации неотрицательного функционала

$$u^* : \Phi(u^*) = \min_{u(t) \in U} \Phi(u) = 0, \tag{2.4}$$

определенного на системе дифференциальных уравнений (1.1) и системах

$$\begin{gathered}\dot{x}_i = f(x_i, (\overline{u}_i(v_i); v_i), t), \quad x_i(t_0) = x^0, \\ x_i(t) = x(t, (\overline{u}_i(v_i); v_i), t), \quad i = 1, 2, \ldots, m.\end{gathered} \tag{2.5}$$

К сожалению, для решения задачи (2.4), (2.5) не всегда можно использовать методы, с помощью которых решались задачи (2.1). Это связано с возможными разрывами непрерывности функций $\overline{u}_i(v_i)$ и нарушением непрерывности правых частей системы и интегральной части функционала по состоянию и управлениям. Для того чтобы использовать те же методы, с помощью которых решались задачи (2.1), введем аппроксимирующий функционал

$$\Phi_u(z) = \overline{J}_u(z) - J(z), \;\; z(t) \in U, \tag{2.6}$$

где $\overline{J}_u(z) = J_1(\overline{u}_1, z_2, \ldots, z_m) + \cdots + J_m(z_1, \ldots, z_{m-1}, \overline{u}_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} J_i(\overline{u}_i; p_i)$, $\overline{u}_i = \overline{u}_i(t, v_i)$, $p_i = (z_1, \ldots, z_{i-1}, z_{i+1}, \ldots, z_m)$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Лемма. *Функционал* $\Phi_u(z)$, $z(t) \in U$, *определенный на решениях системы* (1.1) *и систем* (2.5) *при фиксированных* $\overline{u}_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$, *удовлетворяет тем же условиям, которым удовлетворяют функционалы* $J_i(u)$, *определенные на решениях системы* (1.1). *Кроме того,*

$$\Phi_u(u) = \Phi(u), \;\; u(t) \in U, \quad \Phi_u(z) \le \Phi(z), \;\; z(t) \in U.$$

Действительно,

$$\Phi_u(z) = \sum_{i=1}^{m} J_i(\overline{u}_i; p_i) - J(z) \le \\ \le \max_{z_1 \in U_1} J_1(z_1; p_1) + \cdots + \max_{z_m \in U_m} J_m(z_m; p_m) - J(z) = \overline{J}(z) - J(z) = \Phi(z).$$

Первые два положения леммы очевидны.

Таким образом, функционал $\Phi_u(z)$, $z(t) \in U$, аппроксимирует снизу функционал $\Phi(z)$, $z(t) \in U$, а при $z = u$ значения этих функционалов совпадают.

Очевидно

Утверждение. Если функциональное множество $U_* = \{u = u(t) : u(t) \in U, \; t \in T, \; \Phi(u) = 0\}$ равновесных управлений не пусто, и для каждой функции $u = u(t)$, $u(t) \in U$, $t \in T$, не пусто множество $Z(u) = \{z = z(t) : z(t) \in U, \; t \in T, \; \Phi_u(z) = 0\}$, то $u_* \subset Z(u)$.

Приведенные положения служат основанием для построения алгоритма поиска равновесных управлений.

3. Алгоритм. Примеры

Алгоритм.

Шаг 0. Задаем $u^0(t) \in U$, $u^0 = (u_i^0; v_i^0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $k = 0$. Решаем задачи оптимального управления (2.1). Находим допустимые управления $\overline{u}_i^k = u_i(t, v_i^k)$ и соответствующие им состояния $\overline{x}_i^k = x(t, \overline{u}_i^k; v_i^k)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. В обозначении решения $x = x(t, u)$ задачи Коши (1.1) $\overline{x}_1^k = x(t, \overline{u}_1^k, u_2^k, \ldots, u_m^k), \ldots, \overline{x}_m^k = x(t, u_1^k, \ldots, u_{m-1}^k, \overline{u}_m^k)$.

Шаг 1. Вычисляем значение функционала $\Phi(u^k)$ по формулам (1.2), (1.4), (2.2), (2.3). Если $\Phi(u^k) > 0$, то переход на шаг 2. Если $\Phi(u^k) = 0$, то $u^k = u^*$, $u^* = (u_1^*, \ldots, u_m^*)$ — равновесное управление. Решение задачи окончено.

Шаг 2. По формуле (2.6) при $u = u^k$, $z = u$ формируем аппроксимирующий функционал

$$\Phi_k(u) = \Phi_{u^k}(u), \quad \Phi_k(u^k) = \Phi(u^k) > 0.$$

Заметим, что функционал $\Phi_k(u)$ имеет вид

$$\Phi_k(u) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\varphi_i(\overline{x}_i(t_1)) - \varphi_i(x(t_1)) + \int_T (F_i(\overline{x}_i, \overline{u}_i^k; v_i, t) - F_i(x, u, t))dt\Big), \tag{3.1}$$

и этот функционал определен на решениях $x = x(t, u)$ системы (1.1) и решениях $\overline{x}_i^k = x_i(t, \overline{u}_i^k; v_i)$ систем

$$\dot{x} = f(x, \overline{u}_i^k; v_i, t), \quad x(t_0) = x^0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Условия на параметры этой задачи те же, что и для задач (2.1). Поэтому, отправляясь от $u^k : \Phi_k(u^k) > 0$, задачу минимизации функционала (3.1) можно решать методами решения задач (2.1). Заметим только, что нас интересует не минимум этого функционала, а его нулевое значение

$$u^{k+1} : \ \Phi_k(u^{k+1}) = 0.$$

Шаг 3. Полагаем $u^{k+1} = u^k$, $k = k + 1$ и переходим на шаг 0.

В заключение приведем иллюстративные примеры.

Пример 1.

$$\begin{gathered} u = (u_1, u_2), \quad |u_1(t)| \le 1, \quad |u_2(t)| \le 1, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{x} = A(t)x + B_1(t)u_1(t) + B_2(t)u_2(t) + b(t), \quad x(t_0) = x^0, \\ J_i(u) = \langle c_i, x(t_1, u)\rangle, \quad i = 1, 2. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Здесь $u_1(t) \in E^{r_1}$, $u_2(t) \in E^{r_2}$, $x(t, u) \in E^n$, $c_i \in E^n$, $i = 1, 2$, $x(t, u)$ — решение задачи Коши (3.2) при выбранных допустимых $u_1 = u_1(t)$, $u_2 = u_2(t)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — символ скалярного произведения в E^n. Для решения задач (2.1) используем принцип максимума Л.С. Понтрягина, который является необходимым и достаточным условием глобально-оптимального управления. Пусть $\psi = \psi(t, c_i) : \dot{\psi} = -A(t)\psi$, $\psi(t_1) = c_i$, $i = 1, 2$. Тогда из условий максимума функции

$$H(\psi(t, c_i), x, u_1, u_2, t) = \langle \psi(t, c_i), A(t)x + B_1(t)u_1 + B_2(t)u_2 + b(t)\rangle, \quad i = 1, 2,$$

по управлениям u_1 и u_2

$$\begin{aligned} \overline{u}_1(t, u_2) &= \overline{u}_1(t) = \operatorname{sign} B_1(t)'\psi(t, c_1), \\ \overline{u}_2(t, u_1) &= \overline{u}_2(t) = \operatorname{sign} B_2(t)'\psi(t, c_2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Здесь штрих означает транспонирование матрицы. Теперь построим неотрицательный функционал $\Phi(u)$ (формулы (2.2), (2.3)):

$$\Phi(u) = \langle c_1, x(t_1, \overline{u}_1, u_2) - x(t_1, u)\rangle + \langle c_2, x(t_1, u_1, \overline{u}_2) - x(t_1, u)\rangle = \langle c_1, \delta x_1(t_1, u)\rangle + \langle c_1, \delta x_2(t_1, u)\rangle,$$

где

$$\begin{aligned} \delta\dot{x}_1 &= B_1(t)[\overline{u}_1(t) - u_1(t)], \quad \delta x_1(t_0) = 0, \\ \delta\dot{x}_2 &= B_2(t)[\overline{u}_2(t) - u_2(t)], \quad \delta x_2(t_0) = 0. \end{aligned}$$

Очевидно, $u^* : \Phi(u^*) = 0$ достигается при $u_1^*(t) = \overline{u}_1(t)$, $u_2^*(t) = \overline{u}_2(t)$. Таким образом, равновесные управления в рассмотренной задаче находятся сразу по формулам (3.3).

Пример 2.

$$\begin{gathered} u = (u_1, u_2), \quad u_1(t) \in U_1, \quad u_2(t) \in U_2, \quad t \in T = [t_0, t_1], \\ \dot{x} = A(t)x + b(u, t), \quad x(t_0) = x^0, \\ J_i(u) = \langle c_i, x(t, u)\rangle, \quad i = 1, 2. \end{gathered}$$

Здесь равновесные управления $u^* = (u_1^*, u_2^*)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \langle \psi(t, c_1), b(u^*, t) \rangle &= \max_{u_1 \in U_1} \langle \psi(t, c_1), b(u_1, u_2^*, t) \rangle, \\ \langle \psi(t, c_2), b(u^*, t) \rangle &= \max_{u_2 \in U_2} \langle \psi(t, c_2), b(u_1^*, u_2, t) \rangle. \end{aligned} \tag{3.4}$$

В каждом $t \in T$ условия (3.4) определяют точку Нэша [1], [2] в конечномерном пространстве. Для нахождения этих точек можно использовать конечномерный алгоритм поиска точек равновесия [5]. Для обеспечения существования точек Нэша и, следовательно, существования равновесных управлений нужно предположить выпуклость и компактность U_i, $i = 1, 2$, вогнутость функции $\langle \psi(t, c_1), b(u_1, u_2, t) \rangle$ по u_1 для всех $u_2(t) \in U_2$ и вогнутость функции $\langle \psi(t, c_2), b(u_1, u_2, t) \rangle$ по u_2 для всех $u_1(t) \in U_1$ в каждом $t \in T$ [2].

Пример 3.

$$\begin{gathered} \dot{x} = x + u_1(t) - 2u_2(t), \quad x(0) = 0, \quad t \in [0, 1], \\ |u_1(t)| \le 1, \quad |u_2(t)| \le 1, \quad u = (u_1, u_2), \\ J_1(u) = x(1), \quad J_2(u) = -x^2(1); \\ \dot{\psi} = -\psi, \quad \psi_1(1) = 1, \quad \psi_2(1) = -2x(1), \\ \psi_1(t) = e \cdot e^{-t} > 0, \quad t \in [0, 1], \quad \overline{u}_1(t, u_2) = \operatorname{sign} \psi_1(t), \\ \overline{u}_1(t, u_2) = \overline{u}_1(t) = 1, \\ \psi_2(t) = -2x(1) e \cdot e^{-t}, \\ \overline{u}_2(t, u_1) = -\operatorname{sign} \psi_2(t) = \operatorname{sign} x(1); \\ \Phi(u) = x(1, \overline{u}_1, u_2) - x(1, u_1, u_2) - x^2(1, u_1, \overline{u}_2) + x^2(1, u_1, u_2) \ge 0, \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} x(t, u_1, u_2) &: \dot{x} = x + u_1 - 2u_2, & x(0) &= 0, \\ x(t, \overline{u}_1, u_2) &: \dot{x} = x + 1 - 2u_2, & x(0) &= 0, \\ x(t, u_1, \overline{u}_2) &: \dot{x} = x + u_1 - 2\operatorname{sign} x(1), & x(0) &= 0. \end{aligned}$$

Заметим, что правая часть последнего уравнения не удовлетворяет тем условиям, при которых справедлив принцип максимума Л.С. Понтрягина. Поэтому для решения задачи (2.4) нельзя использовать те методы, с помощью которых решались задачи (2.1).

Для решения поставленной задачи используем вышеизложенный алгоритм. Пусть $u_1^0 \equiv 0$, $u_2^0 \equiv 0$, $u^0 = (u_1^0, u_2^0) = 0$. Тогда $x(t, u^0) = 0$, $J_1(u^0) = J_2(u^0) = 0$. Решаем задачи (2.1):

$$\begin{gathered} \overline{u}_1^0(t) = 1, \quad x(1, \overline{u}_1^0, u_2^0) = e - 1, \\ \overline{u}_2^0(t) : J_2(u_1^0, u_2) = -x^2(1) \to \max, \quad |u_2| \le 1, \\ \dot{x} = x - 2u_2, \quad x(0) = 0. \end{gathered}$$

Очевидно, $\overline{u}_2^0(t) = 0$, $x(1, u_1^0, \overline{u}_2^0) = 0$, $\Phi(u^0) = e - 1 > 0$. По формуле (2.6) при $u = u^0$, $z = u$ построим аппроксимирующий функционал

$$\Phi_0(u) = x_2(1) - x_1(1) - x_3^2(1) + x_1^2(1), \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + u_1(t) - 2u_2(t), & x_1(0) &= 0, \\ \dot{x}_2 &= x_2 + 1 - 2u_2(t), & x_2(0) &= 0, \\ \dot{x}_3 &= x_3 + u_1(t), & x_3(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Задача минимизации функционала (3.5), определенного на решениях системы (3.6), по условиям на ее параметры эквивалентна задачам (2.1). Поэтому при "спуске" $\Phi_0(u)$, $\Phi_0(u^0) > 0$, до его нулевого значения можно применять методы решения задачи (2.1). Для задачи (3.5), (3.6) нетрудно увидеть, что $\Phi_0(u^1) = 0$ при $u_1^1(t) = 1$, $u_2^1(t) = 0$, $u^1 = (u_1^1, u_2^1)$. Теперь опять решаем задачи (2.1):

$$\overline{u}_1^1(t) = 1,$$
$$\overline{u}_2^1(t) : J_2(u_1^1, u_2) = -x^2(1) \to \max, \quad |u_2| \leq 1,$$
$$\dot{x} = x + 1 - 2u_2, \quad x(0) = x^0.$$

Очевидно, $\overline{u}_2^1(t) = 0{,}5$. Далее, $x(1, u_1^1, u_2^1) = e - 1$, $x(1, \overline{u}^1, u_2^1) = e - 1$, $x(1, u_1^1, \overline{u}_2^1) = 0$. Отсюда $\Phi(u^1) = (e-1)^2 > 0$. Опять строим аппроксимирующий функционал

$$\Phi_1(u) = x_2(1) - x_1(1) - x_3^2(1) + x_1^2(1),$$
$$\dot{x}_1 = x_1 + u_1 - 2u_2, \quad x_1(0) = 0,$$
$$\dot{x}_2 = x_2 + 1 - 2u_2, \quad x_2(0) = 0,$$
$$\dot{x}_3 = x_2 + u_1 - 1, \quad x_3(0) = 0.$$

Очевидно, $\Phi_1(u^2) = 0$ при $u^2 = (u_1^2, u_2^2)$, $u_1^2(t) = 1$, $u_2^2(t) = 0{,}5$. При $u^2 = u^2(t)$ решения $\overline{u}_1^2(t)$, $\overline{u}_2^2(t)$ задач (2.1) имеют вид $\overline{u}_1^2(t) = 1$, $\overline{u}_2^2(t) = 0{,}5$. Тогда $\Phi(u^2) = 0$ и, следовательно, $u_1^*(t) = 1$, $u_2^*(t) = 0{,}5$ — равновесные управления, $J_1(u^*) = J_2(u^*) = 0$. Цена игры $J(u^*) = 0$, хотя цена $J(u)$ при допустимых $u = (u_1, u_2)$ — переменная величина.

Литература

1. Nash J.F. *Equilibrium points in N-person games* // Proc. Nat. Acad. Sci. – 1950. – V. 36. – P. 48–49.
2. Беленький В.З., Волконский В.А., Иванов С.А. и др. *Итеративные методы в теории игр и программировании.* – М.: Наука, 1974. – 239 с.
3. Vasilieva O.O., Vasiliev O.V. *Inverse problems and equilibrium strategies in theory of optimal control* // Manuskripte Presently at University of Zurich Institute Operations Research. – 1997. – 30 p.
4. Vasiliev O.V. *Optimization methods.* – Atlanta: Word Federation Publishing Company, 1996. – 267 p.
5. Vasilieva O.O., Vasiliev O.V. *On a method of equilibrium situations search in game of N-partners* // Пленарные докл. 11-й Международн. Байкальской школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск, 1998. – С. 32–35.

Университет де Валле (Колумбия)
Иркутский государственный университет

Поступила
27.07.1999