ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 12 (535)

УДК 519.863

В.И. ЗОРКАЛЬЦЕВ

СИММЕТРИЧНАЯ ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ОПТИМИЗАЦИИ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

1. Введение

В статье конструируются и исследуются двойственные задачи оптимизации с сепарабельной целевой функцией.

Если двойственная к двойственной задаче совпадает с исходной задачей оптимизации, то такую двойственность будем называть *симметричной*. Симметричная двойственность имеет место для задач линейного программирования и в некоторых случаях (в зависимости от правил определения двойственной задачи) для задач квадратичного программирования.

В [1], [2] представлены результаты разработки и исследования симметричной двойственности на классе задач выпуклого программирования при линейных ограничениях. Эти разработки основывались на вводимом в ([1], с. 7) понятии сопряженных функций, являющихся частными случаями сопряженных функций Лежандра и Фенхеля ([3], с. 28; [4], с. 272). В данной статье показано, что исследование симметричной двойственности для задач минимизации сепарабельных выпуклых функций при линейных ограничениях может быть полезно для разработки эффективных методов решения систем линейных неравенств, для регуляризации задач линейного программирования, для совершенствования теории гидравлических цепей [5], [6]. Материалы данной статьи являются развитием исследований, представленных в [7], [8].

2. Сопряженные функции

Обозначим через Z множество дифференцируемых функций вещественного аргумента, равных нулю в нуле, производные которых непрерывны, монотонно возрастают от $-\infty$ до $+\infty$ и равны нулю в нуле. Это значит, что для функции $S \in Z$ производная $s(\alpha) = dS(\alpha)/d\alpha$, $\alpha \in R$, удовлетворяет условиям

$$\lim_{\alpha\to\overline{\alpha}} s(\alpha) = s(\overline{\alpha}) \ \ \forall\overline{\alpha} \in R, \tag{2.1}$$

$$s(\alpha) > s(\beta), \quad \text{если} \ \ \alpha > \beta, \tag{2.2}$$

$$\lim_{\alpha\to-\infty} s(\alpha) = -\infty, \tag{2.3}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} s(\alpha) = \infty, \tag{2.4}$$

$$s(0) = 0, \tag{2.5}$$

при этом $S(0) = 0$.

Функции S и W из Z будем называть *сопряженными*, если их производные s, w являются взаимно обратными функциями:

$$w(s(\alpha)) = \alpha, \quad s(w(\alpha)) = \alpha \ \ \forall\alpha \in R. \tag{2.6}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00587).

Для любой функции s, обладающей свойствами (2.1)–(2.5), существует и единственная обратная к ней функция w, для которой выполняются соотношения (2.6) и свойства (2.1)–(2.5). Поэтому для любой функции S из Z существует единственная сопряженная к ней функция W, которая также будет находиться в Z.

Примером сопряженных функций из Z могут служить ([4], с. 122)

$$S(\alpha) = \frac{1}{p}|\alpha|^p, \quad W(\alpha) = \frac{1}{q}|\alpha|^q$$

при заданных параметрах $p > 1$, $q > 1$ таких, что

$$1/p + 1/q = 1. \tag{2.7}$$

При $p = q = 2$ имеем равенство $S(\alpha) = W(\alpha)$. Это случай (единственный) самосопряженной (сопряженной самой себе) функции ([4], с. 123).

Из постулированных свойств производных следует, что функция $S \in Z$ является строго выпуклой, имеющей абсолютный минимум, который достигается в нуле. Добавление к S линейной функции приводит к строго выпуклой функции

$$\widetilde{S}(\alpha) = S(\alpha) + k\alpha, \tag{2.8}$$

где k — заданная константа. Эта функция при любом k также имеет абсолютный минимум. Если $k \neq 0$, то этот минимум достигается не в нуле.

Замечание. Изучаемые в данной статье сопряженные функции являются частным случаем сопряженных функций Лежандра, использованных в [3], и частным случаем сопряженных функций Фенхеля, которые играют основополагающую роль в выпуклом анализе [4].

Пусть S — функция из Z, s — ее производная. Из свойств (2.1)–(2.5), как отмечалось, следует существование обратной к s функции, которую обозначим s^{-1}. Докажем, что определенные выше сопряженные функции могут быть получены в результате преобразования Лежандра. *Преобразованием Лежандра* ([4], с. 272) функции S называется функция

$$W(\alpha) = \alpha s^{-1}(\alpha) - S(s^{-1}(\alpha)). \tag{2.9}$$

Из свойств (2.1)–(2.5) следует, что хотя в некоторых точках (а именно, в точках излома, которых может быть не более чем счетное число) функции s и s^{-1} могут не иметь производных, но во всех точках у них есть левосторонние и правосторонние производные. Далее считаем, что выражение $ds^{-1}(\alpha)/d\alpha$ обозначает либо левостороннюю, либо правостороннюю производную.

Выразив левостороннюю или правостороннюю производную функции $w(\alpha)$ из (2.9) по правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$w(\alpha) = s^{-1}(\alpha) + \alpha\frac{ds^{-1}(\alpha)}{d\alpha} - s(s^{-1}(\alpha))\frac{ds^{-1}(\alpha)}{d\alpha} = s^{-1}(\alpha) + (\alpha - s(s^{-1}(\alpha)))\frac{ds^{-1}(\alpha)}{d\alpha}.$$

Поскольку по определению обратной функции $s(s^{-1}(\alpha)) = \alpha$, то $w(\alpha) = s^{-1}(\alpha)$, если $\frac{ds^{-1}(\alpha)}{d\alpha} \neq \infty$. Значение $w(\alpha)$ не зависит от того, какая из производных (левосторонняя или правосторонняя) используется в выражении $ds^{-1}(\alpha)/d\alpha$. Поэтому левосторонняя и правосторонняя производные функции W совпадают и, следовательно, она дифференцируема.

Случай $\frac{ds^{-1}(\alpha)}{d\alpha} = \infty$ возможен в отдельных изолированных точках. Если это выполняется в точке $\overline{\alpha}$, то для всех точек некоторой окрестности $\overline{\alpha}$ производная будет конечной. Следовательно, во всех точках этой окрестности значение $w(\alpha)$ совпадает со значением $s^{-1}(\alpha)$. В силу непрерывности w и s значение $w(\overline{\alpha})$ будет совпадать с $s^{-1}(\overline{\alpha})$. Как отмечалось, обратная к s функция удовлетворяет условиям (2.1)–(2.5). Из (2.2), (2.5) и (2.9) следует $W(0) = 0$.

Итак, доказано, что получаемая в результате преобразования Лежандра функция W будет функцией из Z, сопряженной к S.

Преобразованием Фенхеля функции $S \in Z$ будет функция

$$W(\alpha) = \max_{\beta}(\alpha\beta - S(\beta)). \tag{2.10}$$

Из обсуждавшихся выше свойств функции (2.8) следует, что функция $G_\alpha(\beta) = \alpha\beta - S(\beta)$ при любом α будет строго вогнутой, имеющей абсолютный максимум. Значение аргумента β, при котором достигается этот максимум, зависит от α. Обозначим эту зависимость $\beta(\alpha) = \arg\max_\beta(\alpha\beta - S(\beta))$. Поскольку в точке максимума производная G_α должна равняться нулю, то $\alpha = s(\beta(\alpha))$. Следовательно, $\beta(\alpha)$ является обратной функцией от s: $\beta(\alpha) = w(\alpha)$, где $w(\alpha)$ — функция из условий (2.6). Отсюда получаем, что преобразование Фенхеля (2.10) дает сопряженную к S функцию W.

Из определения (2.10) следует одно очень важное свойство сопряженных функций S и W из Z. Если

$$\beta = w(\alpha), \tag{2.11}$$

то

$$W(\alpha) + S(\beta) = \alpha\beta; \tag{2.12}$$

если же

$$\beta \neq w(\alpha), \tag{2.13}$$

то

$$W(\alpha) + S(\beta) > \alpha\beta. \tag{2.14}$$

Следовательно, при произвольных α и β $W(\alpha) + S(\beta) \geq \alpha\beta$. Это соотношение называется неравенством Фенхеля ([4], с. 121).

3. Двойственные задачи оптимизации

Будем называть *исходной* следующую задачу минимизации строго выпуклой функции:

$$F(x) - (c, x) \to \min \tag{3.1}$$

при линейных ограничениях

$$Ax = b, \tag{3.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j \in J. \tag{3.3}$$

Переменные здесь составляют вектор $x \in R^n$, а $J \subset \{1, \dots, n\}$. Заданы следующие объекты: матрица A размерности $m \times n$; векторы $b \in R^m$, $c \in R^n$; сепарабельная функция

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} F_j(x_j),$$

где F_j из Z.

Пусть Φ_j — функция из Z, сопряженная к F_j, т. е. для любого $\alpha \in R$

$$f_j(\varphi_j(\alpha)) = \alpha, \quad \varphi_j(f_j(\alpha)) = \alpha, \quad j = 1, \dots, n,$$

где f_j, φ_j — производные функций F_j и Φ_j. Введем функцию $\Phi(y) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(y_j)$, где y — вектор R^n с компонентами y_j, $j = 1, \dots, n$.

В качестве *двойственной* к (3.1)–(3.3) назовем следующую задачу оптимизации:

$$\Phi(y) - (b, u) \to \min \tag{3.4}$$

при линейных ограничениях

$$g_j(y,u) \geq 0, \quad j \in J, \tag{3.5}$$
$$g_j(y,u) = 0, \quad j \notin J, \tag{3.6}$$

где $g(y,u) = y - A^T u - c$. Переменными здесь являются компоненты векторов $y \in R^n$, $u \in R^m$.

Исходная задача (3.1)–(3.3) может не иметь решения только из-за того, что ее ограничения противоречивые. Если у данной задачи есть допустимые решения, то имеется и оптимальное допустимое решение. Это следует из того, что значение $F_j(x_j) - c_j x_j$ неограниченно возрастает при $x_j \to \infty$ и при $x_j \to -\infty$ для любого $j = 1, \ldots, n$. Оптимальное допустимое решение в силу строгой выпуклости функции F будет единственным.

Двойственная задача (3.4)–(3.6) всегда имеет допустимое решение. В частности, допустимое решение составляют векторы $y = c$, $u = 0$. Задача (3.4)–(3.6) может не иметь решения только из-за того, что ее целевая функция не ограничена снизу на области допустимых решений. А это, поскольку $\Phi_j \in Z$, возможно в том и только том случае, если разрешима следующая система линейных уравнений и неравенств относительно вектора переменных $v \in R^m$:

$$(A^T v)_j \leq 0, \quad j \in J, \tag{3.7}$$
$$(A^T v)_j = 0, \quad j \notin J, \tag{3.8}$$
$$(b, v) > 0. \tag{3.9}$$

Действительно, для любого допустимого решения y, u задачи (3.4)–(3.6) пара векторов y, $u + \lambda v$ будет также составлять допустимое решение при всяком $\lambda \geq 0$. При этом составляющая $(b, u + \lambda v)$ будет неограниченно возрастать и, следовательно, вся целевая функция (3.4) будет неограниченно убывать с увеличением λ. Из теорем об альтернативных системах линейных неравенств (напр., [9] или [10]) система (3.7)–(3.9) имеет решение в том и только том случае, если не совместна система ограничений (3.2), (3.3), т. е. тогда и только тогда, когда не имеет решения исходная задача (3.1), (3.3). Следовательно, изучаемые здесь исходная и двойственная задачи либо обе имеют решения, либо обе не имеют решений.

Из условия оптимальности Куна–Таккера следует, что допустимое для исходной задачи решение $\overline{x}$ будет оптимальным в том и только том случае, если существует вектор $\widetilde{u} \in R^m$ (являющийся вектором множителей Лагранжа ограничений (3.2)), при котором вместе с вектором

$$\widetilde{y} = \nabla F(\overline{x}) \tag{3.10}$$

выполняются условия (3.5), (3.6). Значит, векторы $\widetilde{y}$, $\widetilde{u}$ являются допустимым решением двойственной задачи и при этом выполняется (3.10).

Из условий оптимальности Куна–Таккера также следует, что векторы $\overline{y}$, $\overline{u}$, составляющие допустимое для двойственной задачи решение, будут для нее оптимальными в том и только том случае, если существует вектор $\widetilde{x} \in R^n$ (являющийся вектором множителей Лагранжа ограничений (3.5), (3.6)), при котором выполняются условия (3.2), (3.3) и соотношение

$$\widetilde{x} = \nabla \Phi(\overline{y}). \tag{3.11}$$

Поэтому вектор $\widetilde{x}$ является допустимым решением исходной задачи, и при этом выполняется условие (3.11).

Итак, установлено, что множители Лагранжа ограничений одной из задач являются оптимальными допустимыми решениями другой, двойственной к ней: $\overline{x} = \widetilde{x}$, $\overline{y} = \widetilde{y}$, $\overline{u} = \widetilde{u}$. При этом выполняются два равносильных, в силу сопряженности функций F_j и Φ_j, условия:

$$\overline{x} = \nabla \Phi(\overline{y}), \quad \overline{y} = \nabla F(\overline{x}). \tag{3.12}$$

Таким образом, установлена справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Для задач* (3.1)–(3.3) *и* (3.4)–(3.6) *возможны два случая.*

1. *Обе задачи не имеют решений: ограничения исходной задачи противоречивы, целевая функция двойственной задачи не ограничена снизу на области ее допустимых решений. В этом и только в этом случае система* (3.7)–(3.9) *имеет решение.*

2. *Обе задачи имеют решения. Для того чтобы допустимое решение $\overline{x}$ исходной задачи было оптимальным для этой задачи, необходимо и достаточно существования допустимого решения двойственной задачи $\overline{y}$, $\overline{u}$, при котором выполняются соотношения* (3.12).

Для того чтобы допустимое решение $\overline{y}$, $\overline{u}$ двойственной задачи было оптимальным для этой задачи, необходимо и достаточно существования допустимого решения исходной задачи $\overline{x}$, при котором выполняются соотношения (3.12).

Из теоремы 1 следует равносильность проблем поиска решения исходной (3.1)–(3.3) и двойственной (3.4)–(3.6) задач оптимизации. Обе задачи равносильны задаче поиска решения следующей *системы уравнений и неравенств* относительно векторов переменных $x \in R^n$, $y \in R^n$, $u \in R^m$:

$$Ax = b, \quad x_j \geq 0, \quad j \in J; \tag{3.13}$$

$$(y - A^T u)_j \geq c_j, \quad j \in J, \quad (y - A^T u)_j = c_j, \quad j \notin J; \tag{3.14}$$

$$y = \nabla F(x), \quad x = \nabla \Phi(y). \tag{3.15}$$

Решения исходной и двойственной задач оптимизации составляют решение данной системы и, наоборот, решение данной системы состоит из вектора x, являющегося решением исходной задачи оптимизации, и векторов y, u, являющихся решениями двойственной задачи оптимизации.

Следует отметить, что в силу строгой выпуклости функций F и Φ, если рассмотренные в данном параграфе три задачи имеют решения, то решение каждой задачи единственно относительно векторов x и y.

Из условий оптимальности Куна–Таккера также следует, что для решений исходной и двойственной задач оптимизации выполняются условия

$$\overline{x_j} g_j(\overline{y}, \overline{u}) = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

В то же время для любых допустимых по ограничениям задач (3.1)–(3.3) и (3.4)–(3.6) векторов выполняются неравенства

$$x_j g_j(y, u) \geq 0, \quad j \in J. \tag{3.17}$$

Выполнение соотношения (3.16), которое принято называть *условием дополняющей нежесткости*, для допустимых решений изучаемых задач оптимизации является необходимым, но не достаточным для оптимальности этих решений.

4. Самосопряженная задача оптимизации

Введем функции от векторов $x \in R^n$, $y \in R^n$, $u \in R^m$

$$G(x, y, u) = F(x) + \Phi(y) - (c, x) - (b, u),$$
$$R(x, y) = F(x) + \Phi(y) - (x, y),$$
$$\Psi(x, y, u) = (x, y) - (c, x) - (b, u).$$

Из этих определений непосредственно следует

$$G(x, y, u) = R(x, y) + \Psi(x, y, u). \tag{4.1}$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть вектор x является допустимым решением задачи* (3.1)–(3.3), *векторы y, u составляют допустимое решение задачи* (3.4)–(3.6). *Тогда*

$$G(x,y,u) \geq 0, \tag{4.2}$$

$$R(x,y) \geq 0, \tag{4.3}$$

$$\Psi(x,y,u) \geq 0. \tag{4.4}$$

При этом, если допустимое решение x не является оптимальным для задачи (3.1)–(3.3) *либо векторы y, u не составляют оптимальное решение задачи* (3.4)–(3.6), *либо имеют место оба эти случая, то*

$$G(x,y,u) > 0, \tag{4.5}$$

$$R(x,y) > 0, \tag{4.6}$$

$$\Psi(x,y,u) \geq 0. \tag{4.7}$$

Если x — решение задачи (3.1)–(3.3), *векторы y, u составляют оптимальное решение задачи* (3.4)–(3.6), *то*

$$G(x,y,u) = 0, \tag{4.8}$$

$$R(x,y) = 0, \tag{4.9}$$

$$\Psi(x,y,u) = 0. \tag{4.10}$$

Доказательство. Если вектор $x \in R^n$ удовлетворяет условию $Ax = b$, то при любых $y \in R^n$, $u \in R^m$ $\Psi(x,y,u) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j g_j(y,u)$, т. к. $\Psi(x,y,u) = x^T y - x^T c - (Ax)^T u = x^T(y - c - A^T u)$.

Из условий дополняющей нежесткости (3.16), (3.17) следуют соотношения (4.4), (4.7), (4.10).

Из (2.11), (2.12) и (2.13), (2.14) следует, что для любого $j = 1, \ldots, n$ $F_j(x_j) + \Phi_j(y_j) = x_j y_j$, если $y_j = f_j(x_j)$. Если же $y_j \neq f_j(x_j)$, то $F_j(x_j) + \Phi_j(y_j) > x_j y_j$. Отсюда при любых $x \in R^n$, $y \in R^n$ $\sum\limits_{j=1}^{n} F_j(x_j) + \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(y_j) \geq \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$, т. е. справедливо неравенство (4.3).

Если $x \neq f(y)$, где $f(y) = \nabla\Phi(y)$, то имеем строгое неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} F_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(y_j) > \sum_{j=1}^{n} x_j y_j,$$

что доказывает (4.6). Если же $x = f(y)$, когда векторы x, y, u составляют решение задач из раздела 3, то $\sum\limits_{j=1}^{n} F_j(x_j) + \sum\limits_{j=1}^{n} \Phi_j(y_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$. Этим доказано равенство (4.9).

Итак, доказаны все соотношения, относящиеся к функции R. Соотношения (4.2), (4.5), (4.8), относящиеся к функции G, являются непосредственным следствием равенства (4.1) и доказанных неравенств (4.3), (4.4), (4.6), (4.7) и (4.9), (4.10). □

На основе доказанной теоремы можно сформулировать три задачи оптимизации (связанные с задачами раздела 3), у которых переменные составляют векторы $x \in R^n$, $y \in R^n$, $u \in R^m$.

Самосопряженная задача оптимизации

$$G(x,y,u) \to \min \tag{4.11}$$

при ограничениях (3.13), (3.14) относится к классу задач минимизации сепарабельных выпуклых функций при линейных ограничениях, причем все нелинейные компоненты целевой функции являются функциями из множества Z. Двойственной к задаче (4.11) будет сама эта задача, чем и объясняется выбранное для нее название.

Сформулируем еще две задачи при ограничениях (3.13), (3.14):

задача минимизации невязок в условии сопряженности Фенхеля

$$R(x,y) \to \min, \tag{4.12}$$

задача минимизации невязок в условии дополняющей нежесткости

$$\Psi(x, y, u) \to \min. \tag{4.13}$$

Все три задачи имеют решения в том случае, если имеют решения задачи из раздела 3, т. е. если совместны условия (3.13). Решение задач (3.1)–(3.3), (3.4)–(3.6) будет решением задач (4.11), (4.12) и (4.13). Для задач (4.11), (4.12) справедливо и обратное — их решения являются решениями задач из раздела 3. Поэтому задачи (4.11), (4.12) можно считать равносильными задачам, изученным в предыдущем параграфе.

Задача (4.13) может иметь в качестве оптимального допустимого решения векторы x, y, u, не являющиеся решениями предыдущих задач. Поэтому данная задача не равносильна задачам из предыдущего параграфа.

Определенные три задачи оптимизации интересны тем, что заранее известны оптимальные значения их целевых функций. Это позволяет формулировать эти задачи в виде систем уравнений и неравенств. В изученной ранее системе (3.13)–(3.15) можно заменить условие (3.15) на условие равенства нулю значения функции G или R. В обоих случаях получим систему уравнений и неравенств, равносильную (3.13)–(3.15). Так, в первом случае приходим к системе, включающей условия (3.13), (3.14) и равенство $F(x) + \Phi(y) - (c, x) - (b, u) = 0$.

Из (4.5), (4.8), (4.11) вытекает приводимое ниже утверждение. Оно является аналогом известного утверждения о соотношениях значений целевых функций исходной и двойственной задач линейного программирования.

Теорема 3. *При любых допустимых решениях исходной* (3.1)–(3.3) *и двойственной* (3.4)–(3.6) *задач оптимизации значение целевой функции исходной* (*двойственной*) *задачи не меньше, чем значение целевой функции двойственной* (*исходной*) *задачи, взятой с обратным знаком,*

$$F(x) - (c, x) \geq -\Phi(y) + (b, u),$$
$$\Phi(y) - (b, u) \geq -F(x) + (c, x).$$

Допустимые решения будут оптимальными для обеих задач в том и только том случае, если данные неравенства выполняются в виде равенств.

5. Решение исходной задачи на основе двойственной

Двойственную задачу (3.6)–(3.8) можно свести к проблеме безусловной минимизации строго выпуклой функции от m переменных. Пусть $\overline{u}$ — решение задачи

$$\sum_{j \in J} \Phi_j(((A^T u - c)_j)_+) + \sum_{j \notin J} \Phi_j((A^T u + c)_j) - (b, u) \to \min_{u \in R^m}, \tag{5.1}$$

где $(\alpha)_+ = \max\{0, \alpha\}$ для вещественного α. После определения $\overline{u}$ можем вычислить компоненты вектора $\overline{y}$:

$$\overline{y}_j = ((A^T \overline{u} - c)_j)_+, \quad j \in J; \quad \overline{y}_j = (A^T u - c)_j, \quad j \notin J.$$

Затем можем вычислить решение исходной задачи $\overline{x} = \nabla\Phi(\overline{y})$. Если задача (5.1) не имеет решения, то не имеют решений двойственная (3.4)–(3.6) и исходная (3.1)–(3.3) задачи оптимизации.

Изложенный подход может иметь преимущество по сравнению с алгоритмами итеративного улучшения решений исходной задачи оптимизации если, например, m существенно меньше n. Изложенный путь вычислений можно рассматривать как модификацию развиваемого А.И. Голиковым и Ю.Г. Евтушенко “альтернативного подхода” [11], [12] для поиска нормальных (с наименьшей евклидовой нормой) решений систем линейных неравенств. Действительно, при $c = 0$, $F(x) = 0{,}5 \sum\limits_{j=1}^{n} (x_j)^2$ исходная задача оптимизации является задачей поиска нормального решения системы линейных уравнений и неравенств (3.2), (3.3). Отметим, что в этом случае $\Phi(y) = 0{,}5 \sum\limits_{j=1}^{n} (y_j)^2$, и задача (5.1) имеет привлекательный в вычислительном отношении вид.

На основе используемых здесь сопряженных функций можно получить обобщения "альтернативного подхода" к решению систем линейных неравенств с минимальным значением других, не только евклидовых, норм. Например, при использовании функций

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{h_j}{p} |x_j|^p, \quad \Phi(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d_j}{q} |x_j|^q \tag{5.2}$$

получим "альтернативный подход" к решению систем линейных неравенств с минимальным значением гельдеровских норм. Здесь $p > 1$, $q > 1$ — степенные коэффициенты гельдеровских норм, связанные условием (2.7); $h_j > 0$, $d_j > 0$ — весовые коэффициенты норм, связанные условиями $h_j^{q-1} d_j = 1$, $h_j d_j^{p-1} = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Эти условия равносильные, поскольку согласно (2.7) $(p-1)(q-1) = 1$.

Наибольший практический интерес представляют случаи $p = q = 2$. Более подробно обобщения "альтернативного подхода", в том числе при использовании несепарабельных энергетических норм, изучаются в статье [2].

6. Регуляризация в линейном программировании

Пусть

$$F(x) = (\varepsilon/2) \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \tag{6.1}$$

при заданном $\varepsilon > 0$. Тогда задача (3.1)–(3.3) будет регуляризацией по Тихонову задачи линейного программирования

$$(c, x) \to \min, \quad Ax = b, \quad x_j \geq 0, \quad j \in J. \tag{6.2}$$

Эта регуляризация противодействует неразрешимости из-за неограниченности снизу целевой функции на области допустимых решений и возможной неоднозначности решения задачи (6.2), вырожденности двойственной к (6.2) задачи.

Функции (6.1) исходной задачи оптимизации (3.1)–(3.3) соответствует функция

$$\Phi(y) = (1/(2\varepsilon)) \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \tag{6.3}$$

для двойственной задачи оптимизации. Тогда задача (3.4)–(3.6) будет регуляризацией в целях преодоления возможной несовместности ограничений задачи линейного программирования

$$(b, u) \to \min, \quad (-A^T u)_j \geq c_j, \quad j \in J; \quad (-A^T u)_j = c_j, \quad j \notin J. \tag{6.4}$$

Задачи (6.2), (6.4) являются взаимно двойственными задачами линейного программирования.

Данная взаимосвязь двух видов регуляризации рассматривалась в [13]. Для целей регуляризации кроме (6.1), (6.3) можно использовать и другие сопряженные функции, в частности, суммы взвешенных квадратов

$$F(x) = 0{,}5 \sum_{j=1}^{n} h_j x_j^2, \quad \Phi(y) = 0{,}5 \sum_{j=1}^{n} d_j y_j^2,$$

при выполнении следующих условий на весовые коэффициенты: $h_j > 0$, $d_j > 0$, $h_j d_j = 1$, $j = 1, \ldots, n$. Это соответствует функциям (5.2) при $p = q = 2$. Выбор весовых коэффициентов позволяет воздействовать на роль отдельных переменных и ограничений в регуляризации. Так, варьируя коэффициенты d_j, можем воздействовать на точность выполнения отдельных ограничений двойственной задачи линейного программирования (6.4).

7. Модели потокораспределения

Представленные в разделах 3 и 4 результаты могут быть полезны для развития теории и методов решения задач потокораспределения. В основном, здесь будут рассматриваться гидравлические цепи, теория которых разрабатывалась [5], [6] для решения практических задач трубопроводных систем, в том числе водо-, тепло- и газоснабжения. Исходным аналогом служила теория электрических цепей, понятия из которой будем приводить иногда в скобках.

Модель потокораспределения представляется в виде направленного графа. Считаем, что она имеет вид ситемы (3.13)–(3.15). Пусть $i = 1, \ldots, m$ — номера узлов, $j = 1, \ldots, n$ — номера дуг, A — матрица инциденций узлов и дуг, в каждом столбце которой только два ненулевых элемента, равных $+1$ и -1. Они соответствуют номерам узлов начала и конца данной дуги. Вектор b состоит из заданных притоков (или оттоков, если $b_i < 0$) перемещаемой по гидравлической цепи среды (для электрической цепи — токов) в единицу времени, причем $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i = 0$. Вектор c состоит из заданных действующих напоров, создаваемых перекачивающими устройствами (электродвижущей силы) на отдельных дугах.

Переменная x_j соответствует расходу в единицу времени перемещаемой среды (силе тока) на дуге j. Условие $x_j \geq 0$ для $j \in J$ означает, что на данной дуге действует запорный клапан (детектор), препятствующий перемещению среды (тока) в обратном к выбранному за положительное направление. Переменная y_j соответствует потере давления (перепаду напряжения) на преодоление силы трения (сопротивления). Переменная u_i соответствует давлению (напряжению) в узле i.

Условие $Ax = b$ в (3.13) выражает требование соблюдения балансов входящих и выходящих потоков (токов) в каждом узле (т. е. первый закон Кирхгофа). Условия (3.15) выражают балансовые соотношения для давлений (напряжений) по отдельным дугам. Так условие

$$y_j = c_j + (A^T u)_j, \quad j \in J,$$

означает, что потеря давления (перепад напряжения) на преодоление силы трения (на сопротивление) по дуге j есть сумма двух составляющих: действующих напоров на данной дуге (ЭДС) и разницы давлений (напряжений) в начале и конце дуги. Соотношения (3.15) в теории гидравлических цепей принято называть "замыкающими". Они выражают связь между перепадом давлений на преодоление силы трения с объемом перекачиваемой среды в единицу времени для каждой дуги (закон Ома):

$$y_j = f_j(x_j) \text{ или } x_j = \varphi_j(y_j),\ j = 1, \ldots, n,$$

где f_j, φ_j — производные сопряженных функций F_j и Φ_j из Z.

Отметим некоторые полезные для теории и методов расчета гидравлических цепей факты из представленных в разделах 2 и 3 результатов.

1. Согласно теореме 1 модель потокораспределения имеет единственное решение, если ограничения (3.13) непротиворечивые при использовании любых функций f_j, удовлетворяющих условиям (2.1)–(2.5). Ранее А.П. Меренковым [6] была доказана при $J = \emptyset$ только единственность решения (если существует единственное) и только для функции вида

$$f_j(x_j) = \alpha_j |x_j|^{\beta} \operatorname{sign} x_j \tag{7.1}$$

при заданных $\alpha_j > 0$, $\beta_j \geq 1$. В то же время, как отмечалось и Меренковым ([6], с. 28–32), в некоторых случаях могут иметь место и другие, отличные от (7.1), зависимости между объемами перетоков и перепадами давления.

2. Ранее в работах по теории гидравлических цепей приведенные выше двойственная и самосопряженная задачи оптимизации не изучались. Вместе с тем, как отмечалось в разделе 5, двойственная задача оптимизации может быть полезна для конструирования новых эффективных алгоритмов решения задачи потокораспределения.

3. Самосопряженная задача (4.11) и ее модификации (4.12), (4.13) могут быть полезны для энергетической интерпретации получаемого решения, которое нередко применяется в исследованиях физических процессов. В целевой функции (4.11) составляющая $F(x)+\Phi(y)$ соответствует потерям энергии в единицу времени внутри системы на преодоление сил трения так же, как и составляющая (x, y) в целевой функции (4.13). Потери энергии внутри системы минимизируются.

Другая составляющая $(b, u) + (c, x)$ соответствует затратам энергии за единицу времени вне системы. Знак “минус” при этой составляющей в целевых функциях (4.11), (4.13) означает, что эта энергия максимизируется. В конечном итоге, согласно теоремам 2 и 3 для оптимальных решений эти две составляющие совпадают, что выражает закон сохранения энергии.

Ранее аналогичная энергетическая интерпретация была дана Б.М. Когановичем и С.В. Сумароковым ([6], с. 168) на основе задачи оптимизации (3.1)–(3.3) при $J = 0$ только для замкнутой гидравлической цепи (когда $b = 0$) при замыкающих соотношениях вида (7.1).

Автор благодарен В.А. Срочко и Н.Н. Астафьеву за полезное обсуждение материалов, представленных в данной статье.

Литература

1. Зоркальцев В.И. *Симметричная двойственность. Приложения к моделям электрических и гидравлических цепей* // Препринт ИСЭМ СО РАН. – Иркутск, 2004. – 40 с.
2. Зоркальцев В.И. *Решения систем линейных неравенств, наименее удаленные от начала координат* // Методы исследов. и моделир. технич., природных и социальных систем. – Новосибирск: Наука, 2004. – С. 241–255.
3. Деннис Дж. Б. *Математическое программирование и электрические цепи.* – М.: Ин. лит., 1961. – 216 с.
4. Рокафеллар Р.*Выпуклый анализ.* – М.: Мир, 1973. – 470 с.
5. Меренков А.П., Хасилев В.Я. *Теория гидравлических цепей.* – М.: Наука, 1988. – 294 с.
6. Меренков А.П., Сеннов Е.В., Сумароков С.В. и др. *Математическое моделирование и оптимизация систем тепло-, водо-, нефте- и газоснабжения.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 407 с.
7. Зоркальцев В.И. *Симметричная двойственность в оптимизации при сепарабельных целевых функциях* // Оптимизация, управление, интеллект. – 2005. – № 1. – С. 72–83.
8. Епифанов С.П., Зоркальцев В.И. *Симметричная двойственность и гидравлические цепи* // Моделир. технич. и природных систем: Тр. XIII Байкальской международной школы-семинара “Методы оптимизации и их приложения”. – Иркутск: ИСЭМ СО РАН. – 2005. – Т. 5. – С. 119–124.
9. Гейл Дж. *Теория линейных экономических моделей.* – М.: Ин. лит., 1963. – 418 с.
10. Зоркальцев В.И., Хамисов О.В. *Равновесные модели экономики и энергетики.* – Новосибирск: Наука, 2006. – 180 с.
11. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. *Теоремы об альтернативах и их применения в численных методах* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2003. – Т. 43. – № 3. – С. 354–375.
12. Голиков А.И., Евтушенко Ю.Г. *Новый метод решения систем линейных равенств и неравенств* // Докл. РАН. – 2001. – Т. 381. – № 4. – С. 444–447.
13. Еремин И.И. *Двойственность для регуляризованных задач линейного программирования* // Проблемы оптимизации и экономические приложения. – Омск: Омский филиал ИМ СО РАН, 2003. – С. 37–39.

Иркутский государственный университет

Поступила
29.05.2006