ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 11 (522)

УДК 517.968:519.6

М.Ю. ПЕРШАГИН

О ПРЯМОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ НА ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

Введение

Различные прикладные задачи приводят к необходимости решения сингулярного интегродифференциального уравнения

$$Kx \equiv x'(t) + a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\rho(t)} \int_{-1}^{+1} \frac{\rho(\tau)x(\tau)}{\tau - t} d\tau = f(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

при начальном условии

$$x(-1) = 0, \tag{2}$$

где $\rho(t) = (1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}$, $-1 < \alpha, \beta < 1$, — вес Якоби, $a(t), f(t) \in L_{2\rho}[-1,1]$, а $b(t) \in C[-1,1]$, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши (см. [1], [2]).

Задача Коши (1)–(2) точно решается лишь в редких частных случаях. Поэтому разработаны и применяются многочисленные приближенные методы решения этой задачи (см., напр., [3], [4] и библиографию в них). В [4] рассмотрено решение задачи (1)–(2) в частном случае для $\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ — веса Чебышева I рода, в [5] рассмотрен случай $\rho(t) \equiv 1$. В данной работе задача (1)–(2) решается для весовой функции Якоби, что обобщает указанные частные случаи.

Задача Коши (1)–(2) решается методом наименьших квадратов. В работе приведены схема метода, а также обоснование сходимости последовательности приближенных решений, полученной по методу наименьших квадратов. Изложение существенным образом опирается на соответствующие результаты монографий [3] и [4]. Результат работы анонсирован в [6].

1. Основные результаты

Приближенное решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [P_k^{(\alpha,\beta)}(t) - P_k^{(\alpha,\beta)}(-1)], \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $\{P_k^{(\alpha,\beta)}(t)\}$ — многочлены Якоби, ортогональные на отрезке $[-1,1]$ с весом $\rho(t)$. Неизвестные коэффициенты будем определять методом наименьших квадратов из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (K\varphi_k, K\varphi_j) = (f, K\varphi_j), \quad j = \overline{1,n}, \tag{4}$$

где $\varphi_k(t) = P_k^{(\alpha,\beta)}(t) - P_k^{(\alpha,\beta)}(-1)$, а

$$(f,g) = \int_{-1}^{+1} \rho(t) f(t) \overline{g(t)} dt \quad (f, g \in L_{2\rho}[-1,1])$$

— скалярное произведение в пространстве $L_{2\rho}[-1,1]$.

Для обоснования сходимости метода наименьших квадратов нам понадобятся следующие функциональные пространства: $Y = L_{2\rho}[-1,1]$ — весовое гильбертово пространство суммируемых с квадратом на $[-1,1]$ функций со скалярным произведением, указанным выше и нормой

$$\|f\|_{L_{2\rho}[-1,1]} = \left\{ \int_{-1}^{+1} \rho(t)|f(t)|^2 dt \right\}^{1/2}, \quad f \in L_{2\rho}[-1,1],$$

и $X = \overset{\circ}{W}{}^1_{2\rho}[-1,1]$ — пространство Соболева, т. е.

$$\overset{\circ}{W}{}^1_{2\rho}[-1,1] = \{f \in L_{2\rho}[-1,1] \mid f' \in L_{2\rho}[-1,1],\ f(-1) = 0\}$$

с нормой $\|f\|_{W^1_{2\rho}[-1,1]} = \|f'\|_{L_{2\rho}[-1,1]}$.

Для вычислительной схемы (1)–(4) справедлива следующая

Теорема. *Если задача* (1)–(2) *однозначно разрешима в X при любой правой части $f \in Y$, то СЛАУ* (4) *однозначно разрешима при любых $n \in \mathbb{N}$. Приближенные решения* (3) *сходятся к точному решению $x^* \in X$ со скоростью, определяемой неравенствами*

$$E_n(x^*)_X \le \|x^* - x_n\|_X \le \eta(K) E_n(x^*)_X, \tag{5}$$

$$E_{n-1}(x^{*\prime})_Y \le \|x^* - x_n\|_X \le \eta(K) E_{n-1}(x^{*\prime})_Y, \tag{6}$$

где $\eta(K) = \|K\|\,\|K^{-1}\|$ — число обусловленности оператора $K : X \to Y$, а

$$E_n(x)_Z = \inf_{x_n \in Z_n \subset Z} \|x - x_n\|$$

— наилучшее равномерное приближение функции $x \in Z$ алгебраическими многочленами степени не выше n.

Доказательство. Отметим, что X и Y — полные пространства, $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — линейно независимая система, полная в пространстве X, а в силу однозначной разрешимости задачи (1)–(2) при любой правой части $f \in Y$ оператор K непрерывно обратим.

Покажем, что система $\{\psi_k\}_1^\infty = \{K\varphi_k\}_1^\infty$ является линейно независимой в Y. Предположим противное. Пусть система $\{\psi_k\}_1^\infty$ линейно зависима. Тогда существуют числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, не равные одновременно нулю, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \psi_k = 0$. Учитывая, что $\psi_k = K\varphi_k$, последнее равенство можно представить в виде $K\Big(\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k\Big) = 0$. Применим к обеим частям полученного равенства обратный оператор K^{-1}. Тогда имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} \gamma_k \varphi_k = K^{-1}0 = 0$. Таким образом, система $\{\varphi_k\}_1^\infty$ линейно зависима. Но это невозможно по предположению. Следовательно, система $\{\psi_k\}_1^\infty$ линейно независима. Тогда определитель Грама $\det(\psi_k, \psi_j) = \det(K\varphi_k, K\varphi_j) \neq 0$, $k, j = \overline{1, n}$ (см. [3]), и СЛАУ (4) имеет единственное решение при любых правых частях и любом $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ — решение системы (4). Тогда приближенное решение задачи (1)–(2) строится по формуле

$$x_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \varphi_k(t). \tag{3*}$$

Теперь докажем справедливость оценки скорости сходимости последовательности приближенных решений (3*) к точному решению x^*.

Как известно, метод наименьших квадратов минимизирует невязку $\|f - Kx_n\|_Y$. Поэтому $\|f - Kx_n^*\|_Y \le \|f - Kx_n\|_Y$, где x_n — произвольный элемент вида (3). Оценим обе части неравенства отдельно. Имеем

$$\|f - Kx_n\|_Y = \|Kx^* - Kx_n\|_Y = \|K(x^* - x_n)\|_Y \le \|K\|_{X\to Y}\|x^* - x_n\|_X$$

и

$$\|f - Kx_n^*\|_Y = \|Kx^* - Kx_n^*\|_Y \ge \frac{\|x^* - x_n^*\|_X}{\|K^{-1}\|_{Y\to X}},$$

т. е.

$$\frac{\|x^* - x_n^*\|_X}{\|K^{-1}\|_{Y\to X}} \le \|K\|_{X\to Y}\|x^* - x_n\|_X$$

или

$$\|x^* - x_n^*\|_X \le \|K^{-1}\|_{Y\to X}\|K\|_{X\to Y}\|x^* - x_n\|_X = \eta(K)\|x^* - x_n\|_X.$$

Так как $\{\varphi_k\}_1^\infty$ — полная система, то можно построить такую последовательность x_n, для которой выполняется условие

$$\|x^* - x_n\|_X \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Так как x_n — произвольный элемент вида (3), выберем α_k так, чтобы x_n был элементом наилучшего приближения для x^*, т. е. $\|x^* - x_n\|_X = E_n(x^*)_X$. Тогда $\|x^* - x_n^*\|_X \le \eta(K)E_n(x^*)_X$. Кроме того, $\|x^* - x_n^*\|_X \ge E_n(x^*)_X$ в силу определения $E_n(x^*)_X$. Тем самым оценка (5) доказана. Оценка (6) получается из (5) с учетом определения нормы в пространстве X. $\square$

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. Михлин С.Г. *Вариационные методы в математической физике.* – М.: Наука, 1970. – 512 с.
4. Габдулхаев Б.Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.
5. Самойлова Э.Н. *Сплайновые приближения решения сингулярного интегро-дифференциального уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 11. – С. 35–45.
6. Першагин М.Ю. *Об одном прямом методе решения уравнения теории струй* / Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 19. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы 6-й Казанской международной летней школы-конференции. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва. – 2003. – С. 166–168.

Казанский государственный университет

Поступила 05.11.2003