ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.547

И.И. МАРЧЕНКО

ОБ ОЦЕНКЕ ШИА ДЛЯ ВЕЛИЧИНЫ ОТКЛОНЕНИЯ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ

Исследуется влияние числа разделенных точек максимума модуля мероморфной функции на окружности $\{z : |z| = r\}$ на оценку Д. Шиа для величины отклонения. Получены точные оценки соответствующих величин.

Будем использовать стандартные обозначения неванлинновской теории распределения значений: $T(r,f)$, $m(r,a,f)$, $N(r,a,f)$ [1].

После работ В.П. Петренко, результаты которых изложены в [2], стала развиваться теория роста мероморфных функций. В этой теории для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ определяется функция приближения для числа a в равномерной метрике

$$\mathcal{L}(r,a,f) = \max_{|z|=r} \log^+ \frac{1}{|f(z)-a|}, \quad \mathcal{L}(r,\infty,f) = \max_{|z|=r} \log^+ |f(z)|.$$

С помощью этой функции приближения вводится величина

$$\beta(a,f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{\mathcal{L}(r,a,f)}{T(r,f)},$$

которая называется величиной отклонения функции f относительно числа a. Отметим, что неванлинновская функция приближения $m(r,a,f)$ измеряет скорость приближения f к a в метрике $L_1[0,2\pi]$, а функция $\mathcal{L}(r,a,f)$ — в равномерной метрике. Поэтому неванлинновский дефект

$$\delta(a,f) = \liminf_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}$$

не превосходит величины отклонения.

В 1976 г. А.Ф. Гришин [3] построил пример мероморфной функции произвольного порядка ρ, для которой $\delta(\infty,f) = 0$, но $\beta(\infty,f) > 0$. Хотя величина $\beta(a,f)$ характеризует приближение f к значению a в равномерной метрике, т. е. в более сильной, чем метрика L_1, тем не менее оказалось, что для мероморфных функций $f(z) \in \Phi(\lambda)$, имеющих конечный нижний порядок

$$\lambda := \liminf_{r\to\infty} \frac{\log T(r,f)}{\log r},$$

свойства величин отклонений напоминают свойства дефектов. Первые результаты такого типа получены В.П. Петренко, которым, в частности, доказана

Теорема А. *Для $f \in \Phi(\lambda)$ и для каждого $a \in \overline{\mathbb{C}}$ выполняется неравенство*

$$\beta(a,f) \le \begin{cases} \dfrac{\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \text{если } \lambda < \dfrac{1}{2}; \qquad (1) \\ \pi\lambda, & \text{если } \lambda \ge \dfrac{1}{2}. \qquad (2) \end{cases}$$

Следует отметить, что оценка (1) была получена ранее в [4]. В частном случае целых функций порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и $a = \infty$ оценка (2) была получена в [5], и тем самым была подтверждена гипотеза Пэйли, высказанная в 1932 г. В работе [6] получен аналог соотношения дефектов для величин отклонения.

Теорема B. *Для* $f \in \Phi(\lambda)$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{(a)} \beta(a,f) \le \begin{cases} \dfrac{2\pi\lambda}{\sin \pi\lambda}, & \textit{если } \ \lambda < \dfrac{1}{2}; \\ 2\pi\lambda, & \textit{если } \ \lambda \ge \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

В 1971 г. Д. Шиа (см., напр., [2], [7]) получил оценку для величины отклонения через валироновский дефект

$$\Delta(a,f) := \limsup_{r\to\infty} \frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}.$$

Теорема C. *Пусть* $f \in \Phi(\lambda)$ *и*

$$\Lambda(\Delta) = \left\{\lambda : 0 \le \lambda \le 0.5 \quad \textit{и} \quad \sin\frac{\pi\lambda}{2} \le \sqrt{\frac{\Delta}{2}}\right\}.$$

Тогда

$$\beta(a,f) \le B(\lambda,\Delta) := \begin{cases} \pi\lambda\sqrt{\Delta(2-\Delta)}, & \textit{если } \ \lambda \notin \Lambda(\Delta); \\ \dfrac{\pi\lambda}{\sin\pi\lambda}(1-(1-\Delta)\cos\pi\lambda), & \textit{если } \ \lambda \in \Lambda(\Delta), \end{cases} \tag{3}$$

где $\Delta = \Delta(a,f)$.

Точность оценки в теореме C была доказана в работе [8].

В [9], [10] мы ввели и исследовали число разделенных точек максимума модуля мероморфных функций на окружности $\{z : |z| = r\}$. Напомним основные определения. Пусть $p(r,\infty,f)$ — число составляющих интервалов множества $\{\varphi : |f(re^{i\varphi})| > 1\}$, в каждом из которых есть точка максимума модуля f на окружности $\{z : |z| = r\}$. Величина $p(r,\infty,f)$ совпадает с числом разделенных точек максимума модуля f. Положим

$$p(\infty,f) = \liminf_{r\to\infty} p(r,\infty,f), \quad p(a,f) = p\left(\infty, \frac{1}{f-a}\right).$$

В данной работе исследуется влияние величины $p(a,f)$ на оценку (3). Для измеримого множества E на положительной полуоси величины

$$\mathcal{L}_0(E) = \limsup_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dt}{t},$$

$$l_0(E) = \liminf_{R\to\infty} \frac{1}{\log R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dt}{t}$$

называются соответственно верхней и нижней логарифмической плотностью множества E.

Работа посвящена доказательству следующего результата.

Теорема 1. *Пусть функция* $f \in \Phi(\lambda)$ *и имеет порядок* ρ, γ — *произвольное положительное число,*

$$E(\gamma) = \left\{r > 0 : \mathcal{L}(r,a,f) < B\left(\frac{\gamma}{p(a,f)}, \Delta(a,f)\right) T(r,f)\right\}^{1}.$$

[1] Мы не знаем, может ли $p(a,f)$ быть равно ∞ для мероморфных функций конечного нижнего порядка. Если $p(a,f) = \infty$, то в теореме 1 в качестве $p(a,f)$ выступает произвольное положительное число.

Тогда

$$\mathcal{L}_0(E(\gamma)) \geq 1 - \lambda/\gamma, \quad l_0(E(\gamma)) \geq 1 - \rho/\gamma. \tag{4}$$

Доказательство основано на свойствах хорошо известной T^*-функции Бернстейна для мероморфной функции f [11]

$$T^*(z, f) = \sup_{|E|=2\theta} \frac{1}{2\pi} \int_E \log^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi + N(r, \infty, f) \quad (z = re^{i\theta}),$$

где $|E|$ — лебегова мера множества E. Для этой функции используем неравенство типа Гариппи–Льюиса [12], полученное в работе [9],

$$r\frac{d}{dr} r\frac{d}{dr} T^*(re^{i\theta}, f) \geq -\frac{1}{\pi} p^2(r, \infty, f) \frac{\partial \widetilde{u}(r, \theta)}{\partial \theta},$$

где $\widetilde{u}(z) = \widetilde{u}(r, \theta)$ — круговая перестройка функции $\log^+ |f(z)|$ ([13], с. 90). Используя это неравенство и метод В. Фукса [14] (см. также [15]), приходим к дифференциальному неравенству типа Данжуа–Чельберга. Далее, применяя метод П. Барри [16], устанавливаем справедливость теоремы 1.

Доказательство проведем для случая $a = \infty$. Если $a \neq \infty$, необходимо рассмотреть функцию

$$\mathcal{F}(z) = \frac{1}{f(z) - a}.$$

Если $\beta(\infty, f) = 0$ или $\gamma \leq \lambda$, то теорема очевидна. Пусть $\beta(\infty, f) > 0$ и $\gamma > \lambda$. Рассмотрим случай $p(\infty, f) < \infty$. Если $p(\infty, f) = \infty$, то доказательство аналогично, только в качестве $p(\infty, f)$ выступает произвольное положительное фиксированное число. Выберем числа τ, α, ψ, удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda < \tau < \gamma, \quad 0 < \alpha \leq \min\left(\pi, \frac{\pi p(\infty, f)}{2\tau}\right), \quad -\frac{\pi p(\infty, f)}{2\tau} \leq \psi \leq \frac{\pi p(\infty, f)}{2\tau} - \alpha.$$

Далее положим [14], [15], [9]

$$\sigma(r) = \int_0^\alpha T^*(re^{i\varphi}, f) \cos \frac{\tau(\varphi + \psi)}{p(\infty, f)} d\varphi.$$

В силу неравенства (2.4) из [9] для почти всех $r \geq r_0$ справедливо неравенство

$$r\frac{d}{dr} r\sigma'_-(r) \geq -\int_0^\alpha \frac{p^2(\infty, f)}{\pi} \frac{\partial \widetilde{u}(r, \theta)}{\partial \theta} \cos \frac{\tau(\theta + \psi)}{p(\infty, f)} d\theta = h_\tau(r) + \tau^2 \sigma(r), \tag{5}$$

где $\sigma'_-(r)$ — левосторонняя производная $\sigma(r)$,

$$h_\tau(r) = -\frac{p^2(\infty, f)}{\pi} \widetilde{u}(r, \alpha) \cos \frac{\tau(\alpha + \psi)}{p(\infty, f)} + \frac{p^2(\infty, f)}{\pi} \mathcal{L}(r, \infty, f) \cos \frac{\tau\psi}{p(\infty, f)} -$$
$$- \tau p(\infty, f) T^*(r, \alpha, f) \sin \frac{\tau(\alpha + \psi)}{p(\infty, f)} + \tau p(\infty, f) N(r, \infty, f) \sin \frac{\tau\psi}{p(\infty, f)}.$$

Делим неравенство (5) на $r^{\tau+1}$ и затем интегрируем обе его части по отрезку $[r, R]$. Используя интегрирование по частям, получаем

$$\int_r^R \frac{h_\tau(t)}{t^{\tau+1}} dt \leq \left(\frac{r\sigma'_-(r)}{r^\tau} + \tau \frac{\sigma(r)}{r^\tau}\right)\Big|_r^R, \quad r_0 \leq r \leq R. \tag{6}$$

Далее воспользуемся рассуждением, восходящим к работе П. Барри [16]. Рассмотрим функцию

$$\Phi(r) = -\int_r^R \frac{h_\tau(t)}{t^{\tau+1}} dt, \quad r_0 \leq r \leq R.$$

Пусть

$$\Psi(r) = r^\tau \Big[\Phi(r) + \frac{\sigma'_-(R)}{R^{\tau-1}} + \tau\frac{\sigma(R)}{R^\tau}\Big].$$

Неравенство (6) дает

$$\Psi(r) \geq r\sigma'_-(r) + \tau\sigma(r), \quad r_0 \leq r \leq R. \tag{7}$$

Далее,

$$r\Psi'(r) = \tau\Psi(r) + h_\tau(r), \quad r_0 \leq r \leq R. \tag{8}$$

Так как $T^*(re^{i\theta}, f)$ монотонно возрастает по $r > 0$, то $\sigma(r)$ монотонно возрастает при $r > 0$. Поэтому для всех $r > 0$ выполняется неравенство $r\sigma'_-(r) \geq 0$. Кроме того, для всех $r > 0$ имеем $\sigma(r) > 0$. Из неравенства (7) следует, что $\Psi(r) > 0$ при $r \geq r_0$. Покажем, что $\Psi'(r) \geq 0$ при $r \in [r_0, R]$. Из монотонности $\widetilde{u}(r,\theta)$ по θ и соотношения (5) следует

$$h_\tau(r) + \tau^2\sigma(r) \geq 0, \quad r \geq r_0.$$

Неравенства (7), (8) дают

$$r\Psi'(r) \geq \tau r\sigma'_-(r) \geq 0, \quad r_0 \leq r \leq R.$$

Пусть

$$A_1(\tau) = \{r \in [r_0, \infty) : h_\tau(r) > 0\}.$$

Тогда в силу (8) при $r \in A_1(\tau) \cap [r_0, R]$ получаем $r\Psi'(r) > \tau\Psi(r) > 0$. Отсюда

$$\frac{\Psi'(r)}{\Psi(r)} > \frac{\tau}{r}.$$

Следовательно,

$$\tau \int\limits_{A_1(\tau)\cap[r_0,R]} \frac{dr}{r} \leq \int\limits_{A_1(\tau)\cap[r_0,R]} \frac{\Psi'(r)}{\Psi(r)} dr \leq \int\limits_{r_0}^{R} \frac{\Psi'(r)}{\Psi(r)} dr = \ln\frac{\Psi(R)}{\Psi(r_0)}. \tag{9}$$

Но $\Psi(R) = R\sigma'_-(R) + \tau\sigma(R)$. По определению функции $\sigma(R)$ имеем

$$\sigma(R) \leq \pi T(R, f).$$

Так как функция $r\sigma'_-(r)$ монотонно возрастает [9] при $r > 0$, то

$$\sigma(2R) - \sigma(R) = \int_R^{2R} \sigma'_-(r)dr = \int_R^{2R} \frac{r\sigma'_-(r)}{r} dr \geq R\sigma'_-(R)\ln 2.$$

Поэтому $R\sigma'_-(R) \leq \frac{1}{\ln 2}\sigma(2R) \leq \frac{\pi}{\ln 2}T(2R, f)$. Таким образом, $\Psi(R) \leq (6+\tau)T(2R, f)$.

Из (7) следует $\Psi(r_0) \geq r_0\sigma'_-(r_0) + \sigma(r_0) > 0$. Подставляя полученные неравенства в (9), имеем

$$\tau \int\limits_{A_1(\tau)\cap[r_0,R]} \frac{dr}{r} \leq \ln T(2R, f) + \log(6+\tau) - \log(r_0\sigma'_-(r_0) + \sigma(r_0)).$$

Отсюда $\mathcal{L}_0(A_1(\tau)) \leq \rho/\tau$, $l_0(A_1(\tau)) \leq \lambda/\tau$.

Пусть $E_1(\tau) = \{r \in [r_0, \infty) : h_\tau(r) \leq 0\}$. Так как $E_1(\tau) = [r_0, \infty) \setminus A_1(\tau)$, то

$$\mathcal{L}_0(E_1(\tau)) \geq 1 - \lambda/\tau, \quad l_0(E_1(\tau)) \geq 1 - \rho/\tau. \tag{10}$$

В определениях функций $\sigma(r)$ и $h_\tau(r)$ в качестве ψ выберем $\psi = \frac{\pi p(\infty,f)}{2\tau} - \alpha$. Тогда

$$h_\tau(r) = \frac{p^2(\infty,f)}{\pi}\Bigg(\mathcal{L}(r,\infty,f)\sin\frac{\tau\alpha}{p(\infty,f)} - \\ - \frac{\pi\tau}{p(\infty,f)}T^*(re^{i\alpha},f) + \frac{\pi\tau}{p(\infty,f)}N(r,\infty,f)\cos\frac{\tau\alpha}{p(\infty,f)}\Bigg). \quad (11)$$

Напомним определение дефекта Валирона

$$\Delta(\infty,f) = \limsup_{r\to\infty}\frac{m(r,\infty,f)}{T(r,f)} = 1 - \liminf_{r\to\infty}\frac{N(r,\infty,f)}{T(r,f)}.$$

Отсюда при $r \geq r_0(\varepsilon)$ следует

$$N(r,\infty,f) > (1-\Delta(\infty,f)-\varepsilon)T(r,f). \quad (12)$$

Кроме того, для всех $\alpha\in[0,\pi]$ и $r>0$ выполняется неравенство

$$T^*(re^{i\alpha},f) \leq T(r,f). \quad (13)$$

Подставляя (12), (13) в соотношение (11), при $r \geq r_0(\varepsilon)$ имеем

$$h_\tau(r) \geq \frac{p^2(\infty,f)}{\pi}\Bigg(\mathcal{L}(r,\infty,f)\sin\frac{\tau\alpha}{p(\infty,f)} - \frac{\pi\tau}{p(\infty,f)}\Bigg(1-(1-\Delta(\infty,f)-\varepsilon)\cos\frac{\tau\alpha}{p(\infty,f)}\Bigg)T(r,f)\Bigg).$$

Пусть $r\in E_1(\tau)$. Тогда $h_\tau(r)\leq 0$. Поэтому

$$\mathcal{L}(r,\infty,f) \leq \frac{\pi\tau}{p(\infty,f)\sin\frac{\tau\alpha}{p(\infty,f)}}\Bigg(1-(1-\Delta(\infty,f))\cos\frac{\tau\alpha}{p(\infty,f)}\Bigg)T(r,f) + \\ + o(T(r,f)) \quad (r\in E_1(\tau),\ \ r\to\infty). \quad (14)$$

Если

$$\arccos(1-\Delta(\infty,f)) < \frac{\pi\tau}{p(\infty,f)},$$

то в (14) положим $\alpha = \arccos(1-\Delta(\infty,f))$, а если

$$\arccos(1-\Delta(\infty,f)) \geq \frac{\pi\tau}{p(\infty,f)},$$

то положим $\alpha=\pi$. Следовательно, для всех $r\in E_1(\tau)$ при $r\to\infty$ имеем

$$\mathcal{L}(r,\infty,f) \leq B\Bigg(\frac{\tau}{p(\infty,f)},\Delta(\infty,f)\Bigg)T(r,f) + o(T(r,f)) < B\Bigg(\frac{\gamma}{p(\infty,f)},\Delta(\infty,f)\Bigg)T(r,f),$$

где функция $B(\tau,\Delta)$ определена в (3).

Таким образом, $E_1(\tau)$ является подмножеством $E(\gamma)$. Отсюда, из соотношения (10) и произвольности числа $\tau<\gamma$ следует (4).

Следствие. Для $f\in\Phi(\lambda)$ и $a\in\overline{\mathbb{C}}$ справедливо неравенство

$$\beta(a,f) \leq B\Bigg(\frac{\lambda}{p(a,f)},\Delta(a,f)\Bigg). \quad (15)$$

Отметим, что из неравенства $\beta(a,f)>0$ следует $p(a,f)\geq 1$. Поэтому из оценки (15) следует оценка (3).

Оценка (15) является точной. Она достигается для функции

$$\mathcal{F}_\lambda(z) = f_{\lambda/n}(z^n),$$

где $f(z)$ — функция из [8].

Автор выражает признательность А.Ф. Гришину за внимание к работе.

Литература

1. Неванлинна Р. *Однозначные аналитические функции.* – М.: ГИТТЛ, 1941. – 388 с.
2. Петренко В.П. *Рост мероморфных функций.* – Харьков: Вища школа, 1978. – 136 с.
3. Гришин А.Ф. *О сравнении дефектов* $\delta_p(a)$ // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков, 1976. – Вып. 25. – С. 56–66.
4. Гольдберг А.А., Островский И.В. *Некоторые теоремы о росте мероморфных функций* // Зап. Харьковск. матем. о-ва. – 1961. – Т. 27. – С. 3–37.
5. Говоров Н.В. *О проблеме Пэйли* // Функц. анализ и его прилож. 1969. – Т. 3. – Вып. 2. – С. 38–43.
6. Марченко И.И., Щерба А.И. *О величинах отклонений мероморфных функций* // Матем. сб. – 1990. – Т. 181. – № 1. – С. 3–24.
7. Fuchs W.H.J. *Topics in Nevanlinna theory* // Proc. of the NRL conf. on classical function theory. – 1970. – P. 1–32.
8. Рыжков М.А. *О точности оценки величины отклонения для мероморфной функции* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – Харьков: Вища школа. – 1982. – № 37. – С. 114–115.
9. Марченко И.И. *О величинах отклонений и протяжений мероморфных функций конечного нижнего порядка* // Матем. сб. – 1995. – Т. 186. – № 3. – С. 85–102.
10. Марченко И.И. *О росте целых и мероморфных функций* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189. – № 6. – С. 59–84.
11. Baernstein A. *Integral means, univalent functions and circular symmetrization* // Acta Math. – 1974. – V. 133. – P. 139–169.
12. Gariepy R., Lewis I.L. *Space analogues of some theorems for subharmonic and meromorphic functions* // Ark. Mat. – 1975. – V. 13. – № 1. – P. 91–105.
13. Хейман У.К. *Многолистные функции.* – М.: Иност. лит., 1960. – 179 с.
14. Fuchs W.H.J. *A theorem on* $\min\limits_{|z|=r}(\log|f(z)|/T(r,f))$ // Symp. on Compl. Anal. – Canterbury, 1973, London Math. Soc. – Lect. Notes 12. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1975. – P. 69–72.
15. Essen M., Shea D.F. *Applications of Denjoy integral inequalities and differential inequalities to growth problems for subharmonic and meromorphic functions* // Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A. – 1982. – V. 82. – № 2. – P. 201–216.
16. Barry P. *On a theorem of Besicovitch* // Quart. J. Math. Oxford. – 1963. – V. 14. – P. 293–302.

Харьковский государственный университет (Украина)

Щецинский университет (Польша)

Поступила
09.02.1999