ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1997 МАТЕМАТИКА № 7 (422)

УДК 517.925.51

А.А. КОСОВ

О ГЛОБАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ. I

1. Введение

Одно из основных направлений развития метода функций Ляпунова (ФЛ) [1] состоит в расширении класса функций, применяемых для исследования устойчивости, принципиальное значение для которого имели введение ФЛ со знакопостоянной производной [2], [3] и векторной функции Ляпунова (ВФЛ) [4]. В рамках этого направления для различных типов автономных и периодических уравнений были доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости, основанные на использовании знакопостоянных функций Ляпунова (ЗПФЛ) [5]–[9]. Как отмечается в ([9], с. 76), "обобщение теорем на неавтономные системы вызывает серьезные трудности". Тем не менее для отдельных классов неавтономных уравнений также предложены способы анализа устойчивости на основе ЗПФЛ [10]–[14].

В первой части статьи с помощью знакопостоянных ФЛ и ВФЛ доказаны теоремы о глобальной асимптотической устойчивости неавтономных систем с липшицевой правой частью, обобщающие на неавтономный случай соответствующие результаты для автономных и периодических систем [5]–[9], а также теоремы об асимптотической устойчивости для неавтономных систем со знакоопределенными ФЛ, имеющими знакопостоянную производную [15]. Используемый способ доказательства [12], [14] существенным образом отличается как от [5]–[9], так и от ранее предложенных для неавтономного случая подходов [10], [11] и основан на рассмотрении семейства предельных уравнений [16], [17].

Во второй части статьи на основе ЗПФЛ рассмотрена задача о глобальной устойчивости неавтономной системы второго порядка, для которой выполнены обобщенные условия Рауса-Гурвица. Для сопоставления с известными результатами рассмотрены примеры, в том числе представляющая самостоятельный интерес задача об оценке области глобальной устойчивости в пространстве параметров для летательного аппарата в режиме движения с большими углами атаки [18].

2. Основные результаты

Будем обозначать через $\mathrm{Lip}(n,m)$ класс всех непрерывных функций $F : R_+ \times R^n \to R^m$, обладающих свойством $F(t,0) \equiv 0$ и удовлетворяющих в каждой конечной области $S(0,r) = \{x \in R^n : \|x\| \le r < +\infty\}$ условию Липшица по x с постоянной $L_F(r) > 0$, не зависящей от времени t. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t,x), \quad X(t,x) \in \mathrm{Lip}(n,n). \tag{1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 97-01-01497).

Условия на правые части (1) обеспечивают существование и единственность решений $x(t, x_0, t_0)$ системы (1), существование семейства $\Phi[X]$ предельных в смысле [16] функций $\varphi(t, x)$ к функции $X(t, x)$, существование и единственность решений $x_\varphi(t, x_0, t_0)$ предельных систем

$$\dot{x} = \varphi(t, x), \quad \varphi \in \Phi[X]. \tag{2}$$

Для тройки $(X(t, x),\ V(t, x),\ W(t, x)) \in \mathrm{Lip}(n, n) \times \mathrm{Lip}(n, 1) \times \mathrm{Lip}(n, 1)$ следуя [15], будем называть предельной тройкой $\{\varphi,\ V_\varphi,\ W_\varphi\}$, соответствующей последовательности $t_k \to +\infty$, такие три функции $\varphi \in \Phi[X]$, $V_\varphi \in \Phi[V]$, $W_\varphi \in \Phi[W]$, которые являются предельными при $k \to +\infty$ для функций $X(t + t_k, x)$, $V(t + t_k, x)$ и $W(t + t_k, x)$ соответственно. Для дальнейшего нам потребуется опирающееся на понятие условной устойчивости А.М. Ляпунова [1] следующее определение условной устойчивости относительно класса предельных систем и множества предельных нулей ФЛ, введенное в [19].

Определение. Будем называть решение $x = 0$ асимптотически устойчивым относительно множества предельных нулей функции $V(t, x)$ и семейства предельных систем (2), если выполняются условия

1. для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t_0 \geq 0$ можно указать $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любой предельной пары $\{\varphi, V_\varphi\} \in \Phi[X] \times \Phi[V]$ и любого $x_0 \in R^n$ такого, что $V_\varphi(t_0, x_0) = 0$ и $\|x_0\| < \delta$, следует $\|x_\varphi(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;
2. можно указать $\Delta > 0$ такое, что для любых $\varepsilon_1 > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $T = T(\varepsilon_1, \Delta, t_0) > 0$ такое, что для любой предельной пары $\{\varphi, V_\varphi\} \in \Phi[X] \times \Phi[V]$ и любого $x_0 \in R^n$ такого, что $V_\varphi(t_0, x_0) = 0$ и $\|x_0\| < \Delta$, будет $\|x_\varphi(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon_1$ при всех $t > t_0 + T(\varepsilon_1, \Delta, t_0)$.

Если при этом $\Delta > 0$ можно брать сколь угодно большим, то будем говорить, что нулевое решение глобально асимптотически устойчиво относительно множества предельных нулей функции $V(t, x)$ и семейства предельных систем (2).

Лемма. *Пусть функция $V(t, x) \in \mathrm{Lip}(n, 1)$, $V(t, x) \geq 0$, такова, что*

$$\dot{V}(t, x) = \lim_{r \to +0} \sup\{r^{-1}[V(t + r,\ x + rX(t, x)) - V(t, x)]\} \leq 0$$

при всех $t \geq 0$, $x \in R^n$.

Тогда множество предельных нулей функции $V(t, x)$ положительно инвариантно относительно семейства предельных систем, т. е. для каждой предельной пары $\{\varphi, V_\varphi\} \in \Phi[X] \times \Phi[V]$ из того, что $V_\varphi(t_0, x_0) = 0$, следует $V_\varphi(t, x_\varphi(t, x_0, t_0)) = 0$ при любых $t \geq t_0$.

Доказательство сразу следует из неравенств $V_\varphi(t, x) \geq 0$, $\dot{V}_\varphi(t, x) \leq 0$, вытекающих из соответствующих неравенств для $V(t, x)$ и $\dot{V}(t, x)$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *существует такая знакопостоянная функция Ляпунова* (*ЗПФЛ*) $V(t, x) \in \mathrm{Lip}(n, 1)$, *что при всех* $(t, x) \in R_+ \times R^n$ *выполняются условия*

1. $\dot{V}(t, x) \leq -W(t, x) \leq 0$, $W(t, x) \in \mathrm{Lip}(n, 1)$;
2. *решение $x = 0$ глобально асимптотически устойчиво относительно множества предельных нулей функции $V(t, x)$ и семейства предельных систем* (2);
3. *для любой предельной тройки $\{\varphi, V_\varphi, W_\varphi\}$ и любого числа $c > 0$ множество $N(c, \varphi) = \{(t, x) : W_\varphi(t, x) = 0,\ V_\varphi(t, x) = c\}$ не содержит целых положительных полутраекторий соответствующей предельной системы* (2);
4. *все решения $x(t, x_0, t_0)$ системы* (1) *ограничены при $t \geq t_0$ равномерно по $\{t_0, x_0\}$.*

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Покажем сначала, что условия 1 и 2 обеспечивают равномерную по t_0 устойчивость нулевого решения (1) по Ляпунову. Предположим, что это не так. Тогда можно указать $\bar{\varepsilon} > 0$ и три последовательности $\bar{x}_k \to 0$, $t_k^0 \in R_+$ и $\bar{t}_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такие, что

$$\|x(\bar{t}_k, \bar{x}_k, t_k^0)\| = \bar{\varepsilon}. \tag{3}$$

Из непрерывности траекторий системы (1) и (3) следует, что для любого $0 < \tilde{\varepsilon} < \bar{\varepsilon}$ существует последовательность $\tilde{t}_k \to +\infty$ такая, что

$$\begin{gathered} \|x(\tilde{t}_k, \bar{x}_k, t_k^0)\| = \tilde{\varepsilon}, \\ \tilde{\varepsilon} < \|x(t, \bar{x}_k, t_k^0)\| < \bar{\varepsilon} \text{ при } \tilde{t}_k < t < \bar{t}_k. \end{gathered} \tag{4}$$

Ввиду ограниченности последовательности $\tilde{x}_k = x(\tilde{t}_k, \bar{x}_k, t_k^0)$, не уменьшая общности, можно считать, что $\tilde{x}_k \to \tilde{x}$, $X(t + \tilde{t}_k, x) \to \varphi(t, x)$, $V(t + \tilde{t}_k) \to V_\varphi(t, x)$ при $k \to +\infty$ (этого всегда можно добиться выбором соответствующих сходящихся подпоследовательностей). При этом из неравенств $0 \le V(\tilde{t}_k, \tilde{x}_k) \le V(t_k^0, \bar{x}_k)$ и наличия ввиду липшицевости бесконечно малого высшего предела у функции $V(t, x)$ следует, что $V_\varphi(0, \tilde{x}) = 0$.

Из свойств движений исходной и предельной систем следует [16]

$$x(t + \tilde{t}_k, \tilde{x}_k, \tilde{t}_k) \to x_\varphi(t, \tilde{x}, 0) \text{ при } k \to +\infty \tag{5}$$

при всех $t \in [0, \tau]$, $\tau > 0$, при которых движения остаются в некотором ограниченном множестве, а значит, и при всех t из (4).

Покажем, что при достаточно малом $\tilde{\varepsilon} > 0$ будет $\bar{t}_k - \tilde{t}_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Пусть это не так, тогда для каждого $\tilde{\varepsilon} > 0$ существует $\tau = \tau(\tilde{\varepsilon}) > 0$ такое, что для некоторой подпоследовательности $\tilde{t}_{k_i}$ будет $\bar{t}_{k_i} - \tilde{t}_{k_i} \le \tau(\tilde{\varepsilon}) < +\infty$. Если теперь по $\varepsilon = 0.5\,\bar{\varepsilon}$ выбрать $\delta = \delta(\varepsilon, 0) > 0$ в соответствии с п. 1 определения, то для всех $0 < \tilde{\varepsilon} < \delta$ из условия 2 получаем для всех $t \ge 0$

$$\|x_\varphi(t, \tilde{x}, 0)\| \le 0.5\,\bar{\varepsilon}. \tag{6}$$

Полагая в (5) $t = \bar{t}_{k_i} - \tilde{t}_{k_i} < \tau(\tilde{\varepsilon})$ и переходя к пределу при $i \to +\infty$ (или выбирая в случае необходимости сходящуюся подпоследовательность), получим с учетом (4) $\|x_\varphi(\tilde{t}, \tilde{x}, 0)\| = \bar{\varepsilon}$ для некоторого $\tilde{t} \in [0, \tau(\tilde{\varepsilon})]$, что противоречит (6). Полученное противоречие и показывает, что $\bar{t}_k - \tilde{t}_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$ для всех $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0 = \delta(0.5\,\bar{\varepsilon})$.

Возьмем $0 < \tilde{\varepsilon} < \varepsilon_0$ и по числам $\Delta = \varepsilon_0$ и $\varepsilon_1 = 0.5\,\tilde{\varepsilon} > 0$ в соответствии с п. 2 определения выберем $T(\varepsilon_1, \Delta, 0) > 0$ так, чтобы было

$$\|x_\varphi(t, \tilde{x}, 0)\| < \varepsilon_1 = 0.5\,\tilde{\varepsilon} \text{ при всех } t \ge t(\varepsilon_1). \tag{7}$$

Выберем номер k_0 столь большим, чтобы при всех $k > k_0$ было $\bar{t}_k - \tilde{t}_k > 2T(\varepsilon_1)$. Тогда из (4) и (5) получаем неравенство $\|x_\varphi(t, \tilde{x}, 0)\| \ge \tilde{\varepsilon}$ при всех $t \in [0, 2T(\varepsilon_1)]$, которое при $t = T(\varepsilon_1)$ будет противоречить (7). Полученное противоречие и показывает, что при условиях 1 и 2 нулевое решение системы (1) будет устойчиво равномерно по t_0.

Покажем, что все решения (1) стремятся к $x = 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\{t_0, x_0\}$. Пусть это не так. Тогда можно указать $\overline{\Delta} > 0$, $\bar{\varepsilon}_1 > 0$ и три последовательности $t_k^0 \ge 0$, $x_k^0 \in S(0, \Delta)$ и $\bar{t}_k \ge 0$, $\bar{t}_k - t_k^0 \to +\infty$ при $k \to +\infty$ такие, что $\|x(\bar{t}_k, x_k^0, t_k^0)\| \ge \bar{\varepsilon}_1$. Не ограничивая общности, можно считать $t_k^0 \to +\infty$ и $x_k^0 \to \bar{x}^0$ при $k \to +\infty$, поскольку иначе в качестве t_k^0 можно было бы взять $t_k^0 + 0.5(\bar{t}_k - t_k^0)$, а в качестве x_k^0 взять $x(t_k^0 + 0.5(\bar{t}_k - t_k^0), x_k^0, t_k^0)$ и с учетом условия 4 перейти в случае необходимости к сходящейся подпоследовательности.

Из установленной выше равномерной по t_0 устойчивости нулевого решения (1) следует,что при всех $t \geq 0$ будет выполняться неравенство

$$\|x(t + t_k^0, x_k^0, t_k^0)\| \geq \delta(\bar{\varepsilon}_1) > 0, \tag{8}$$

где $\delta(\bar{\varepsilon}_1)$ взято в соответствии с определением равномерной по t_0 устойчивости.

Пусть последовательности $t_k^0 \to +\infty$ соответствует предельная тройка $\{\varphi, V_\varphi, W_\varphi\}$. Тогда из (8) получаем

$$\|x_\varphi(t, \bar{x}^0, 0)\| \geq \delta(\bar{\varepsilon}_1) > 0 \text{ при всех } t \geq 0. \tag{9}$$

В силу ограниченности $x_\varphi(t, \bar{x}^0, 0)$, вытекающей из условия 4 ([20], с. 23), его множество ω-предельных точек $\Omega(\varphi, 0, \bar{x}^0)$ не пусто. Пусть $\bar{x} \in \Omega(\varphi, 0, \bar{x}^0)$, последовательность $t_m \to +\infty$ при $m \to +\infty$ такова, что $x_\varphi(t_m, \bar{x}^0, 0) \to \bar{x}$ при $m \to +\infty$ и t_m соответствует предельная тройка $\{\psi, V_\psi, W_\psi\} \in \Phi[\varphi] \times \Phi[V_\varphi] \times \Phi[W_\varphi] \subset \Phi[X] \times \Phi[V] \times \Phi[W]$.

Положительная полутраектория $x_\psi(t, \bar{x}, 0)$ $t \geq 0$, будет целиком лежать в $N(c, \psi)$ при некотором $c \geq 0$ ([15], теорема 3.3) и одновременно в $\Omega(\varphi, 0, \bar{x}^0)$. Из условия 3 следует, что $c = 0$, поэтому на основании условия 2 будет $x_\psi(t, \bar{x}, 0) \to 0$ при $t \to +\infty$. Но тогда при достаточно большом $t > 0$ точка $x_\psi(t, \bar{x}, 0) \in \Omega(\varphi, 0, \bar{x}^0)$ будет сколь угодно близкой к точке $x = 0$, что противоречит (9). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.

Замечание 1. Условие 2 теоремы 1 можно заменить следующим условием:

2a. Решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво в целом относительно системы (1) и множества $V^{-1}(+\infty, 0)$ [14].

Замечание 2. Если функция $V(t, x)$ является определенно-положительной ($V(t, x) \geq a(\|x\|)$) и допускает бесконечно большой низший предел [2], [3] ($a(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$), а функция $-W(t, x)$ является определенно-отрицательной, то условия 2–4 теоремы 1 очевидно будут выполнены. Поэтому теорема 1 является непосредственным обобщением теоремы Барбашина-Красовского для автономных [2] и периодических [3] систем на неавтономный случай, при этом требование знакоопределенности ФЛ ослабляется до условия знакопостоянства.

Полагая $V(t, x) \equiv 0$ в теореме 1 с учетом наследуемости свойства равномерной асимптотической устойчивости в целом семейством предельных систем [17], [20], получаем следующее

Следствие. Для того чтобы нулевое решение системы (1) было глобально равномерно асимптотически устойчиво, необходимо и достаточно выполнения условий

1. решение $x = 0$ асимптотически устойчиво в целом относительно семейства предельных систем (2);
2. все решения $x(t, x_0, t_0)$ системы (1) ограничены при $t \geq t_0$ равномерно по $\{t_0, x_0\}$.

Следующий пример показывает, что с одним только условием 1 следствие становится неверным в части достаточности, поэтому теорема C из [17] и следствие 2 из [21] в этой части несправедливы.

Пример 1. Уравнение

$$\dot{x} = -x + 2e^{-t}x^2 \tag{10}$$

имеет единственное предельное уравнение $\dot{x} = -x$, нулевое решение которого глобально асимптотически устойчиво, поэтому условие 1 следствия 2 выполнено. Однако это не обеспечивает глобальной асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (10), которое имеет неограниченное решение $x(t,1,0)=e^t$.

Теорема 1 содержит условия, формулируемые в терминах предельных систем. В тех случаях, когда семейство предельных систем устроено достаточно просто (напр., для асимптотически автономных систем), такие условия могут оказаться более удобными, чем аналогичные условия в терминах исходной системы. Если же семейство предельных систем не дает упрощений по сравнению с исходной системой (напр., для почти периодических систем семейство предельных уравнений заведомо включает и исходную систему), то более удобными могут оказаться теоремы, в которых все условия формулируются в терминах исходной системы, а факт существования предельных систем используется лишь в доказательствах. Приведем две теоремы такого рода [19], где в первой используется векторная, а во второй — скалярная ЗПФЛ и еще одна функция, обеспечивающая свойство условной глобальной асимптотической устойчивости на множестве нулей "основной" ФЛ, а также ограниченность решений.

Необходимо отметить, что идея использования второй функции для доказательства асимптотической устойчивости неавтономных систем впервые предложена В.М.Матросовым в [22], где эта функция обеспечивала "выбрасывание" движений из множества, где "не работает" "основная" ФЛ. В теоремах 2 и 3 идея В.М.Матросова о второй функции применена в модифицированном виде: здесь "вспомогательная" функция используется совершенно для других целей — не для "выбрасывания" движений из множества, где "не работает" "основная" ФЛ (это противоречило бы лемме), а для обеспечения условной асимптотической устойчивости на этом множестве и ограниченности решений вблизи этого множества. В принципе для достижения этих целей можно использовать и различные "вспомогательные" функции.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *существуют такие функции* $V \in \mathrm{Lip}(n,m)$ *и* $v \in \mathrm{Lip}(n,1)$, *что выполняются условия*

1. $\dot V(t,x) \le f(t,V(t,x))$ *при всех* $(t,x) \in R_+ \times R^n$, $f(t,0) \in \mathrm{Lip}(m,m)$, *функция* $f(t,u)$ *удовлетворяет условию Важевского при всех* $(t,u) \in R^+ \times R^m$;
2. $V_*(t,x) = \max\{V_i(t,x),\ i=1,2\dots,m\} \ge V_0(x) \ge 0$ *при всех* $(t,x) \in R_+ \times R^n$, $M = V_0^{-1}(0) = \{x \in R^n : V_0(x)=0\}$, $\rho(x,M) = \inf\{\|x-y\|,\ y \in M\}$, $V_*(t,x) \ge a(\rho(x,M))$, $a(r) \in K$, K — *класс всех непрерывных, обращающихся в нуле в нуль и строго монотонно возрастающих функций;*
3. *нулевое решение* $u=0$ *системы сравнения* $\dot u = f(t,u)$ *равномерно асимптотически устойчиво в целом относительно множества* R^m;
4. *на множестве* $M = V_0^{-1}(0)$ *функция* $v(t,x)$ *удовлетворяет при некоторых функциях* $c(r) \in K$ *и* $a_1(r) \in K$, $a_1(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$ *оценкам* $\dot v(t,x) \le -c(\|x\|)$, $v(t,x) \ge a_1(\|x\|)$ *при всех* $(t,x) \in R_+ \times M$;
5. *в некоторой окрестности* $S(M,\alpha) = \{x \in R^n : \rho(x,M) < \alpha\}$ *множества* $M = V_0^{-1}(0)$, *постоянные Липшица* $L_X(r)$ *и* $L_v(r)$ *таковы, что при некотором* $\beta > 0$ *и всех* $0 < \alpha_1 < \alpha$ *выполняется неравенство* $\beta c(r) \ge L_X(r+\alpha_1)L_v(r+\alpha_1)$ *для всех* $r \ge r_0 > 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Доказательство. Из условий 1–3 следует (см. [4]), что $\rho(x(t,x_0,t_0),M) \to 0$ при $t \to +\infty$ равномерно по $\{t_0,x_0\}$. Из условия 4 следует, что $x=0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно M в целом. Поэтому нулевое решение системы (1) будет равномерно асимптотически устойчивым [14]. Для завершения доказательства остается только показать, что решения системы (1), остающиеся в $S(M,\alpha)$, будут ограниченными равномерно по $\{t_0,x_0\}$.

Для каждого $x \in S(M,\alpha)$ через $\bar{x}(x)$ будем обозначать такую точку из M, что $\rho(x,M) = \|x - \bar{x}(x)\|$ (в случае существования нескольких таких точек можно взять любую из них). Оценивая производную $\dot{v}(t,x)$ и считая $\|x\| \le r$, с учетом условия 4 получаем

$$\dot{v}(t,x) \le -c(\|\bar{x}(x)\|) + \alpha L_X(r+\alpha)L_v(r+\alpha),$$

откуда на основании условия 5 при достаточно малом α и достаточно большом $r > r_0 > 0$ будем иметь $\dot{v}(t,x) \le -0.5\, c(r_0)$ при всех $t \ge 0$, $x \in S(M,\alpha)$, $\|x\| > r_0$.

Отсюда следует, что решения не могут быть неограниченными в области $S(M,\alpha)$, поскольку иначе функция $v(t,x)$ не могла бы оставаться неотрицательной. $\square$

Замечание. Если каким-либо образом установлено, что все решения системы (1) ограничены равномерно по $\{t_0, x_0\}$, то условие 5 в теореме 2 становится излишним.

Пример 2. Используя в качестве ФЛ, фигурирующих в теореме 2, функции $V(t,x) = x_2^2$ и $v(t,x) = x_1^2$, легко установить, что нулевое решение системы

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2x_2(1+a^2x_1^2)^{-1/2}, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \tag{11}$$

глобально асимптотически устойчиво при всех отличных от нуля значениях параметра $a = \mathrm{const}$.

Этот пример показывает, что условие 5 в теореме 2 существенно и его можно опустить только при дополнительных условиях. Действительно, полагая $a = 0$, получим из (11) систему

$$\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^2x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \tag{12}$$

нулевое решение которой не является глобально асимптотически устойчивым (см. [23], с.82), и граница области притяжения задается уравнением $x_1x_2 = 1$. Функции $V(t,x) = x_2^2$ для системы (12) удовлетворяют всем условиям теоремы 2, кроме условия 5 (сравн. [24], теорема 2).

Аналогично теореме 2 доказывается следующая

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *существуют такие ЗПФЛ* $V(t,x) \in \mathrm{Lip}(n,1)$, $V(t,x) \ge 0$ *и* $v(t,x) \in \mathrm{Lip}(n,1)$, $v(t,x) \ge 0$, *что выполняются следующие условия:*

1. $\dot{V}(t,x) \le -W(x) \le 0$ *при всех* $(t,x) \in R_+ \times R^n$;
2. $W(x) \ge a(\rho(x,N))$, $N = W^{-1}(0) = \{x \in R^n : W(x) = 0\}$, $a(r) \in K$;
3. *на множестве* $N = W^{-1}(0)$ *функция* $v(t,x)$ *удовлетворяет при некоторых функциях* $c(r) \in K$ *и* $a_1(r) \in K$, $a_1(r) \to +\infty$ *при* $r \to +\infty$ *оценкам* $\dot{v}(t,x) \le -c(\|x\|)$, $v(t,x) \ge a_1(\|x\|)$;
4. *в некоторой окрестности* $S(N,\alpha)$ *множества нулей производной от функции* $V(t,x)$ *в силу системы* (1) *постоянные Липшица* $L_X(r)$ *и* $L_v(r)$ *таковы, что выполнено условие* 5 *теоремы* 2.

Тогда нулевое решение системы (1) *равномерно асимптотически устойчиво в целом.*

Замечание 1. Используя приведенный в (2) пример, покажем, что условие 2 в теореме 3 является существенным и его нельзя отбросить даже в том случае, когда множество N является ограниченным. Как установлено в [2], нулевое решение системы

$$\dot{x}_1 = \frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} + 2x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{2x_1}{(1+x_1^2)^2} - \frac{2x_2}{(1+x_1^2)^2}$$

не является асимптотически устойчивым в целом. Функции $V(t,x) = x_1^2(1+x_1^2)^{-1} + x_2^2$ и $v(t,x) = x_1^2 + x_2^2$ для этой системы удовлетворяют всем условиям теоремы 3, за исключением условия 2, поскольку

$$\dot{V}(t,x) = -4\Big(\frac{x_1^2}{(1+x_1^2)^4} + \frac{x_2^2}{(1+x_2^2)^2}\Big) = W(t,x) \le 0, \quad N = W^{-1}(0) = \{x = 0\}$$

и $W(t,x_1,x_2) \to 0$ при $|x_1| \to +\infty$ и любом фиксированном $x_2 \in R$.

Замечание 2. Если каким-либо образом установлена равномерная ограниченность всех решений системы (1), то условия 2 и 4 в теореме 3 можно опустить.

В заключение отметим, что при доказательстве теоремы 1 не использовались свойства $L_X(r)$, поэтому эта теорема справедлива и для более широкого класса неавтономных систем, чем рассматриваемые в данной статье уравнения с равномерно липшицевыми правыми частями (напр., для рассматривавшихся в [15]–[17]). Однако в целях единообразия изложения здесь и правые части, и ФЛ считаются равномерно липшицевыми, что позволяет обеспечить все необходимые условия для применимости используемых методов и охватить достаточно богатый для приложений класс неавтономных систем.

Литература

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. – 472 с.
2. Барбашин Е.А., Красовский Н.Н. *Об устойчивости движения в целом* // ДАН СССР.– 1952. – Т. 86. – № 3. – С.453–456.
3. Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* М.: Физматгиз, 1959. – 211 с.
4. Матросов В.М. *К устойчивости движения* // ПММ. – 1962. – Т. 26. – № 6. – С. 992–1002.
5. Самойленко А.М. *Изучение динамических систем с помощью знакопостоянных функций* // Укр. мат. журн. – 1972. – Т. 24. – № 3. – С. 374–386.
6. Булгаков Н.Г., Калитин Б.С. *Обобщение теорем второго метода Ляпунова* // Весцi АН БССР. Сер. физ.-мат. навук. – 1978. – № 3. – С. 32–35.
7. Гайшун И.В., Княжище Л.Б. *Условия устойчивости вполне интегрируемых автономных уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18. – № 8. – С.1453–1456.
8. Грудо Э.И. *К теории устойчивости обыкновенных дифференциальных систем и систем Пфаффа* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 5. – С.782–789.
9. Булгаков Н.Г. *Знакопостоянные функции в теории устойчивости.* Минск: 1984. – 80 с.
10. Матросов В.М. *Об устойчивости множеств неизолированных положений равновесия неавтономных систем* // Тр. Казанск. авиац. ин-та. – 1965, вып. 89. – С.20–32.
11. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.
12. Косов А.А. *К теории устойчивости неавтономных систем* // Ред. журн. “Вестник ЛГУ”. – Ленинград, 1985. – 10 с. – Деп. в ВИНИТИ № 4848-85.
13. Колмановский В.Б., Носов В.Р. *Применение вырожденных функций Ляпунова в теории устойчивости* // ДАН СССР. – 1988. – Т. 298. – № 5. – С.1061–1055.
14. Косов А.А. *К задаче об устойчивости движения относительно части переменных* // Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений. – Новосибирск.: Наука, 1988. – С. 185–194.

15. Андреев А.С. *Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы* // ПММ. – 1984. – Т. 48. – № 2. – С. 225–232.
16. Artstein Z. *Topological dynamics of an ordinary differential equation* // J. Different. Equat. – 1977. – V. 23. – № 2. – P. 216–223.
17. Artstein Z. *Uniform asymptotic stability via the limiting equations* // J. Different. Equat. – 1978. – V. 27. – № 2. – P. 172–189.
18. Сиразетдинов Т.К., Аминов А.Б. *К задаче построения функций Ляпунова при исследовании устойчивости в целом решения систем с полиномиальной правой частью* // Метод функций Ляпунова и его приложения. – Новосибирск.: Наука, 1984. – С. 72–77.
19. Косов А.А. *Исследование устойчивости неавтономных систем методом знакопостоянных функций Ляпунова.* Дисс. … канд. физ.-матем. наук. Ленинград, 1985. – 159 с.
20. Шестаков А.А. *Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов* // Функции Ляпунова и их применения. – Новосибирск.: Наука, 1987. – С. 14–48.
21. Калитин Б.С. *Устойчивость неавтономных динамических систем* // Актуальные задачи теории динамических систем управления. – Минск.: Наука и техника, 1989. – С. 37–46.
22. Матросов В.М. *Об устойчивости движения* // ПММ. – 1962. – Т. 26. – № 5. – С. 885–895.
23. Зубов В.И. *Устойчивость движения.* – М.: Высш. школа, 1973. – 271 с.
24. Иртегов В.Д. *К вопросу построения функций Ляпунова* // Прямой метод в теории устойчивости и его приложения. – Новосибирск.: Наука, 1981. – С. 115–124.

Иркутский государственный университет

Поступила
10.02.1995