ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 10 (437)

УДК 517.546

*И.А. АЛЕКСАНДРОВ, Г.Д. САДРИТДИНОВА*

# ОТОБРАЖЕНИЯ С СИММЕТРИЕЙ ВРАЩЕНИЯ

*Введение.* Пусть $S_p(M)$ — множество всех голоморфных в круге $E=\{z:|z|<1\}$ функций $f(z)=z+\cdots$, однолистно отображающих $E$ на области из круга $\{w:|w|<M\}$ $(1<M\le\infty)$, имеющие $p$-кратную ($p\in\mathbb{N}$) симметрию вращения относительно точки $w=0$.

Плотный в $S_p(M)$ подкласс функций (в топологии равномерной сходимости внутри $E$) образуют функции $w=M\zeta(z,\ln M)$, где $\zeta(z,\tau)$, $0\le\tau\le\ln M$, — решение уравнения Лёвнера ([1], с. 27)

$$\frac{d\zeta}{d\tau}=-\zeta\frac{\mu^p(\tau)+\zeta^p}{\mu^p(\tau)-\zeta^p},\quad \zeta(z,0)=z\in E, \tag{1}$$

в котором $\mu(\tau)$ — непрерывная функция с модулем, равным единице. Аналогичное предложение справедливо для класса $S_p(\infty)\equiv S_p$.

Примеры интегрирования уравнения (1) в квадратурах единичны. Кроме простейшего случая $\mu(\tau)=e^{i\alpha}$, $\alpha=\mathrm{const}$, отметим примеры, рассмотренные в [2]–[4].

В данной работе указывается управляющая функция $\mu(\tau)$, для которой уравнение (1) приводит к формуле для $\zeta(z,\tau)$ более общей, чем в [2]–[4].

*Выбор* $\mu(\tau)$. Пусть в (1)

$$\mu(\tau)=e^{-(\alpha+\delta\tau)i}(\lambda(\tau))^{1+\frac{1}{2s}}, \tag{2}$$

где $\alpha$, $\delta$ — вещественные постоянные, $s$ — положительное число и $\lambda(\tau)$, $\lambda(0)=1$, — некоторая непрерывно дифференцируемая функция на $(0,\ln M)$ с модулем, равным единице. Выполнив в (1) замену

$$\omega=e^{(\alpha+\delta\tau)i}(\lambda(\tau))^{-\frac{1}{2s}}\zeta,\quad \omega(0)=e^{i\alpha}z, \tag{3}$$

получим для $\omega$ уравнение

$$\frac{\omega'}{\omega}-i\delta+\frac{1}{2s}\frac{\lambda'}{\lambda}=-\frac{\lambda^p+\omega^p}{\lambda^p-\omega^p}$$

или, что то же самое,

$$\frac{\omega'}{\omega}=\left(1+i\delta-\frac{1}{2s}\frac{\lambda'}{\lambda}\right)\frac{\eta^p-\omega^p}{\lambda^p-\omega^p}, \tag{4}$$

где

$$\eta^p=\eta^p(\tau)=\lambda^p\frac{\lambda'+2s(1-i\delta)\lambda}{\lambda'-2s(1+i\delta)\lambda}.$$

Положим

$$\lambda(\tau)=e^{2i\psi(\tau)},\quad \psi(0)=0.$$

Функция

$$\eta^p(\tau)=e^{2ip\psi(\tau)}\frac{s+i(\psi'(\tau)-\delta)}{-s+i(\psi'(\tau)-\delta)}$$

имеет модуль, равный единице. В дальнейшем рассматривается только тот случай, когда

$$\eta^p(\tau)=e^{2ip\varphi}=\gamma^p$$

— постоянная. При этом $\psi(\tau)$, как легко показать, является решением уравнения

$$\psi' = s(\delta + \operatorname{ctg}(\psi - \varphi)p), \quad \psi(0) = 0. \tag{5}$$

Интегрирование уравнения, эквивалентного (5),

$$\lambda^p \frac{\lambda' + 2\overline{m}\lambda}{\lambda' - 2m\lambda} = \gamma^p, \quad \lambda(0) = 1,$$

где $m = s(1 + i\delta)$, т. е. уравнения

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{2\overline{m}\lambda(\lambda^p + \varepsilon\gamma^p)}{\lambda^p - \gamma^p}, \quad \lambda(0) = 1,$$

в котором $\varepsilon = m/\overline{m}$, приводит к формуле

$$\lambda^p + \varepsilon\gamma^p = (1 + \varepsilon\gamma^p)\lambda^{\frac{p}{1+\varepsilon}} e^{-\frac{2mp\tau}{1+\varepsilon}} \tag{6}$$

для нахождения $\lambda(\tau)$, а следовательно, и функции $\mu(\tau)$ — по формуле (2).

Из (6) следует, что при $M = \infty$

$$\lim_{\tau\to\infty} \lambda^p(\tau) = -\varepsilon\gamma^p. \tag{7}$$

*Функция* $\psi(\tau)$. В (5) произведем замены

$$(\psi - \varphi)p = y, \quad ps\tau = t$$

и придем к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \delta + \operatorname{ctg} y. \tag{8}$$

Общий интеграл уравнения (8) дается формулой

$$\delta y - \ln(\cos y + \delta \sin y) = (1 + \delta^2)t + \mathrm{const},$$

из которой с учетом условия $y(0) = -p\varphi/2$ получаем уравнение

$$\delta(y + p\varphi) - \ln \frac{\cos y + \delta \sin y}{\cos p\varphi - \delta \sin p\varphi} = (1 + \delta^2)t,$$

в явной форме задающее функцию $t = t(y)$, $t(-p\varphi) = 0$.

Если $\delta = 0$, то

$$\cos y = \cos p\varphi \cdot e^{-t}$$

и, значит, соответствующая управляющая функция $\mu(\tau)$ имеет вид

$$\mu(\tau) = e^{-i\alpha}(\lambda(\tau))^{1+\frac{1}{2s}},$$

где

$$\lambda^p(\tau) = e^{2ip\varphi}\big[\cos p\varphi \cdot e^{-t} - i\sqrt{1 - \cos^2 p\varphi \cdot e^{-2t}}\,\big]^2. \tag{9}$$

Если $\delta \neq 0$, то, полагая $\psi - s\delta\tau = u$, $\varphi - s\delta\tau = v$, видим из (5), что

$$\operatorname{sign} \frac{u'}{s} = \operatorname{sign}(\operatorname{ctg}(u - v)p)$$

и, следовательно, функция $u$ монотонно изменяется, если ее значения принадлежат любому из промежутков

$$k\pi/2 < (u - v)p < (k + 1)\pi/2 \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

*Интегрирование уравнения* (4). Учитывая равенство

$$1 + i\delta - \frac{\lambda'}{2s\lambda} = \frac{2\lambda^p}{\lambda^p - \gamma^p},$$

представим уравнение (4) в виде

$$\frac{d\omega}{d\tau}=\frac{2\lambda^p\omega(\gamma^p-\omega^p)}{(\lambda^p-\gamma^p)(\lambda^p-\omega^p)},\quad \omega(0)=z_1=e^{i\alpha}z.$$

Перейдем от переменной $\tau$ к $\lambda$. Получим

$$\frac{d\omega}{d\lambda}=-\frac{\lambda^{p-1}\omega(\gamma^p-\omega^p)}{\overline{m}(\lambda^p-\omega^p)(\lambda^p+\varepsilon\gamma^p)},\quad \omega\big|_{\lambda=1}=z_1,$$

где $m=s(1+i\delta)$, $\varepsilon=m/\overline{m}$. Выполнив в этом уравнении замену переменной $\lambda$ на $v$ по формуле

$$v=\frac{1}{\lambda^p+\varepsilon\gamma^p},$$

будем иметь

$$\frac{d\omega}{dv}=\frac{\omega(\gamma^p-\omega^p)}{\overline{m}pv\big(\frac{1}{v}-\varepsilon\gamma^p-\omega^p\big)},\quad \omega\big|_{v=\frac{1}{1+\varepsilon\gamma^p}}=z_1.$$

Нетрудно заметить, что производная $dv/d\omega$ линейна относительно $v$. Проинтегрируем уравнение

$$\frac{dv}{d\omega}=-\frac{\overline{m}p(\varepsilon\gamma^p+\omega^p)}{\omega(\gamma^p-\omega^p)}v+\frac{\overline{m}p}{\omega(\gamma^p-\omega^p)},\quad v\big|_{\omega=z_1}=\frac{1}{1+\varepsilon\gamma^p},$$

варьируя произвольную постоянную $C$ в общем решении

$$v(\omega)=\frac{C(\gamma^p-\omega^p)^{2s}}{\omega^{mp}}$$

соответствующего однородного уравнения. С учетом начального условия получим

$$\frac{\omega^{mp}}{(\gamma^p-\omega^p)^{2s}}v=\overline{m}p\int_{z_1}^{\omega}\frac{u^{mp-1}du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}}-\frac{z_1^{mp}}{(1+\varepsilon\gamma^p)(\gamma^p-z_1^p)^{2s}}.$$

Так как

$$\frac{z_1^{mp}}{(\gamma^p-z_1^p)^{2s}}=\overline{m}p\int_0^{z_1}\frac{u^{mp-1}(\varepsilon\gamma^p+u^p)du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}},$$

то окончательно получим

$$\frac{\omega^{mp}v}{\overline{m}p(\gamma^p-\omega^p)^{2s}}=\int_{z_1}^{\omega}\frac{u^{mp-1}du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}}+\frac{1}{1+\varepsilon\gamma^p}\int_0^{z_1}\frac{u^{mp-1}(\varepsilon\gamma^p+u^p)du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}}. \tag{10}$$

Итак, имеет место

**Теорема 1.** *Функция*

$$\zeta(z,\tau)=-e^{-(\alpha+\delta\tau)i}\lambda^{\frac{1}{2s}}(\tau)\omega(v(\tau)),\quad \zeta(0,\tau)=0,\quad \zeta'_z(0,\tau)>0,$$

*где* $\alpha$, $\delta$ *— вещественные постоянные,* $p\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{R}^+$, $\lambda(\tau)=e^{2i\psi(\tau)}$, *причем* $\psi(\tau)$ *определяется уравнением*

$$\delta\psi-\ln\frac{\cos(\psi-\varphi)p+\delta\sin(\psi-\varphi)p}{\cos p\varphi-\delta\sin p\varphi}=(1+\delta^2)ps\tau,$$

*и* $\omega(v)$ *неявно задается уравнением* (10), *в котором* $z_1=e^{i\alpha}z$, $m=s(1+i\delta)$, $\varepsilon=m/\overline{m}$, $\gamma=e^{2i\varphi}$ *— постоянная, конформно и однолистно отображает круг* $E$ *на область, лежащую в единичном круге и имеющую* $p$*-кратную симметрию вращения относительно нуля.*

*Предельный случай.* При $\tau = \ln M$ функция $M\zeta(z,\tau)$ входит в класс $S_p(M)$. Устремим $M$ к $\infty$. Предельная функция, как известно, голоморфна и однолистна. Найдем ее. Перейдем к пределу при $\tau \to \infty$ сначала в правой части формулы (10). Имеем

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[\int_{z_1}^{\omega}\frac{u^{mp-1}du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}}+\frac{1}{1+\varepsilon\gamma^p}\int_0^{z_1}\frac{u^{mp-1}(\varepsilon\gamma^p+u^p)du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}}\right]=-\frac{1}{1+\varepsilon\gamma^p}\int_0^{z_1}\frac{(1-u^p)u^{mp-1}du}{(\gamma^p-u^p)^{2s+1}},$$

поскольку каждое решение $\zeta(z,\tau)$, $z\in E$, уравнения (1) стремится к нулю при $\tau\to\infty$ равномерно относительно $z$ внутри $E$ и, следовательно, $\lim\limits_{\tau\to\infty}\omega(\tau)=0$.

Выполним теперь предельный переход при $\tau\to\infty$ в левой части формулы (10). Учтем, что $\lim\limits_{\tau\to\infty} e^{\tau}\zeta(z,\tau)=f(z)\in S_p$. Имеем, используя (6), (7),

$$\lim_{\tau\to\infty}\frac{\omega^{mp}}{(\lambda^p+\varepsilon\gamma^p)(\gamma^p-\omega^p)^{2s}}=\frac{e^{i\alpha mp}}{\gamma^{2ps}}\lim_{\tau\to\infty}\frac{e^{i\delta\tau mp}\lambda^{-\frac{mp}{2s}}\zeta^{mp}}{\lambda^p+\varepsilon\gamma^p}=$$

$$=\frac{e^{i\alpha mp}}{\gamma^{2ps}(1+\varepsilon\gamma^p)}\lim_{\tau\to\infty}\left[\lambda^{-\frac{mp}{2s}-\frac{p}{1+\varepsilon}}\cdot e^{i\delta\tau mp+\frac{2mp\tau}{1+\varepsilon}-\tau mp}\right]f^{mp}(z)=$$

$$=\frac{e^{i\alpha mp}}{\gamma^{2ps}(1+\varepsilon\gamma^p)}\lim_{\tau\to\infty}\lambda^{-p}\cdot f^{mp}(z)=-\frac{\overline{m}e^{i\alpha mp}f^{mp}(z)}{m(1+\varepsilon\gamma^p)\gamma^{(2s+1)p}}.$$

Приравнивая полученные пределы, найдем

$$f(z)=e^{i\alpha}\left[mp\int_0^{z_1}\frac{(1-u^p)u^{mp-1}du}{(1-\overline{\gamma}^pu^p)^{2s+1}}\right]^{\frac{1}{mp}}. \tag{11}$$

**Теорема 2.** *Пусть $\alpha$, $\delta$ — вещественные постоянные, $p\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{R}^+$, $m=s(1+i\delta)$, $z_1=e^{i\alpha}z$. Тогда однозначная ветвь функции $f(z)=z+\cdots$, даваемая формулой (11), однолистна в единичном круге и отображает его на область с $p$-кратной симметрией вращения относительно начала.*

*Случай $m=1$.* Взяв интегралы в (10) при $s=1$, $\delta=0$ и $\varepsilon=1$, получаем уравнение

$$\frac{\omega^p}{(\lambda^p+\gamma^p)(\gamma^p-\omega^p)^2}=\frac{1}{2(\gamma^p-\omega^p)^2}+\left(\frac{z_1^p}{1+\gamma^p}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{(\gamma^p-z_1^p)^2},$$

сводящееся к квадратному алгебраическому уравнению относительно $\omega^p$. Остановимся здесь на случае, когда $\alpha=\varphi=0$. Простые вычисления и формула (3) приводят к соотношению

$$\zeta^p(z,\tau)=\lambda^{p/2}\omega^p=\frac{\lambda^{p/2}}{1+\lambda^p}\left[\lambda^p+z^p-\lambda^p\sqrt{(1-z^p)(1-\lambda^{-2p}z^p)}\,\right].$$

Функция $\zeta(z,\tau)=e^{-\tau}z+\cdots$ с $\lambda(\tau)$, записываемой по формуле (9), отображает единичный круг на круг с $p$ исключенными луночками.

## Литература


1. Александров И.А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций.* – М.: Наука, 1976. – 343 с.
2. Куфарев П.П. *Одно замечание об интегралах уравнения Лёвнера* // ДАН СССР. – 1947. – Т. 57. – № 7. – С. 655–656.
3. Александров И.А. *Об одном случае интегрирования уравнения Лёвнера* // Сиб. матем. журн. – 1981. – Т. 22. – № 2. – С. 207–209.
4. Helling K. *Beiträge zur Theorie der Löwnerschen Differentialgleichung* // Wiss. Z. Päd. Hochsch. “Liselotte-Herrmann” Güstrow. Math. – naturwiss. Fak. – 1976. – № 2. – S. 319–328.



*Томский государственный университет*



*Поступила* 10.04.1996