Известия вузов. Математика
2017, №1, с. 92–96

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

Краткое сообщение, представленное Л.А. Аксентьевым

К.Г. ГАРАЕВ

ЗАДАЧА О БРАХИСТОХРОНЕ КАК ИНВАРИАНТНАЯ ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Аннотация. В работе излагается теоретико-групповой подход к решению задачи о брахистохроне, основанный на модифицированной теории инвариантных вариационных задач, разработанной автором.

Ключевые слова: брахистохрона, функционал, первый интеграл, конформная инвариантность, инфинитезимальный оператор, время наискорейшего спуска.

УДК: 519.97

Эта задача была поставлена одним из основателей вариационного исчисления И. Бернулли в 1696 г. и решена им же в 1697 г. (это решение было опубликовано в Acta Eruditorum, 1697 г.). Впоследствии она была решена также И. Ньютоном, Г. Лейбницем, Я. Бернулли и Г. Лопиталем (например, [1]). Сформулируем эту задачу.

Даны две точки A и B, лежащие в вертикальной плоскости и не лежащие на одной вертикальной прямой. Какова траектория точки, движущейся только под действием силы тяжести, которая начинает двигаться из A и достигает B за кратчайшее время?

Оказалось, что данная кривая — циклоида и ее уравнения в параметрическом виде имеют вид

$$\begin{aligned} x &= a(t - \sin t), \\ y &= a(1 - \cos t), \end{aligned} \qquad t \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Здесь a — радиус производящего круга, t — угол поворота круга.

С точки зрения вариационного исчисления поставленная задача сводится к отысканию минимума функционала

$$T[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^l \sqrt{\frac{1 + y'^2}{y}} dx \tag{2}$$

и уравнения (1) являются уравнениями Эйлера, дающие необходимые условия минимума функционала (2). Позднее было доказано, что на брахистохроне действительно достигается сильный минимум (например, [2]).

Покажем, что все известные ранее результаты (первый интеграл, время наискорейшего спуска) можно получить с единых позиций: модифицированной теории инвариантных вариационных задач [3].

Поступила 18.04.2016

Рассмотрим интеграл $I = \int\limits_{D_0} L\big(x, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}\big)dx$, где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — независимые переменные, $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^m)$ — зависимые переменные. Через $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ обозначена совокупность частных производных первого порядка

$$\varphi_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 1, \dots, m;$$

лагранжиан L — гладкая функция своих аргументов.

Определение. Интеграл называется L^*-инвариантным относительно r-параметрической группы непрерывных преобразований

$$x'^i = f^i(x, \varphi, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, n, \quad \varphi'^k = g^k(x, \varphi, \varepsilon), \quad k = 1, \dots, m,$$

если для всех функций $\varphi^k(x)$, для каждого из этих преобразований и для любой подобласти $D \subset D_0 \subset R^n$ выполняется равенство

$$\int_{D'} L\left(x', \varphi', \frac{\partial \varphi'}{\partial x'}\right) dx' = \int_D L^*\left(x, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \varepsilon\right) dx,$$

где $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^r)$ — параметр группы. Подчеркнем, что структура лагранжиана L^* задается заранее: если, например, $L^* \equiv L$, то имеет место классическая инвариантность по Э. Нётер [4]. Если $L^* = L + D_i F^i\big(x, \varphi, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \varepsilon\big)$, где D_i — оператор полного дифференцирования по переменной x^i, то имеет место дивергентная инвариантность [5], если $L^* = h(\varepsilon)L$, то конформная инвариантность [6].

Теорема. *Для L^*-инвариантности интеграла I относительно точечной группы Ли G_1 с оператором $X = \xi_x^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi_\varphi^k \frac{\partial}{\partial \varphi^k}$ необходимо и достаточно выполнения бесконечной цепочки равенств*

$$\widetilde{X}\left(\frac{\partial^{p-1} L_0^*}{\partial \varepsilon^{p-1}}\right) + \frac{\partial^{p-1} L_0^*}{\partial \varepsilon^{p-1}} D_i(\xi_x^i) = \frac{\partial^p L_0^*}{\partial \varepsilon^p}, \quad i = 1, \dots, n, \quad p = 1, 2, \dots\ . \tag{3}$$

Здесь

$$\frac{\partial^0 L_0^*}{\partial \varepsilon} \equiv L.$$

Следствие 1. Если $L^* \equiv L$, то из (3) следует необходимое и достаточное условие классической инвариантности по Э. Нётер [7] $\widetilde{X}L + LD_i\xi_x^i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 2. Необходимое и достаточное условие конформной инвариантности интеграла I относительно группы G_1 с функцией $L^* = L\exp(s\cdot\varepsilon)$, $s \in R$, в соответствии с (3) примет вид $\widetilde{X}L + LD_i\xi_x^i = s\cdot L$, $i = 1, \dots, n$.

Следствие 3. Для случая дивергентной инвариантности с функцией

$$L^* = L + [\exp(s\cdot\varepsilon) - 1]\, D_i F^i$$

бесконечная цепочка равенства (3) также обрывается;

$$\widetilde{X}L + LD_i\big(\xi_x^i\big) = sD_iF^i,$$

$$\widetilde{X}\left(D_iF^i\right) + \left(D_iF^i\right)\left[D_i(\xi_x^i)\right] = sD_iF^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

В этих формулах $\widetilde{X}$ — оператор группы G_1, полученной продолжением оператора X на производные φ_i^k.

Пусть теперь интеграл I вариационный, т.е. функции $\varphi_i^k(x)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi^k} - D_i\left(\frac{\partial L}{\partial \varphi_i^k}\right) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m.$$

***L**-теорема.** *Пусть функционал I инвариантен относительно группы Ли G_1 с оператором X. Тогда имеет место следствие уравнений Эйлера (обобщенный закон сохранения) вида*

$$D_i(T^i) - \frac{\partial L_0^*}{\partial \varepsilon} = 0, \tag{4}$$

$$T_i = \left(\xi_\varphi^k - \varphi_j^k \xi_x^j\right) \frac{\partial L}{\partial \varphi_i^k} + \xi_x^i L, \quad i, j = 1, \ldots, n, \quad k = 1, \ldots, m.$$

В качестве следствия рассмотрим вариационную задачу с одной независимой переменной, при этом будем рассматривать конформную инвариантность функционала I относительно группы G_1 с функцией $L^* = \exp(s \cdot \varepsilon)L$.

Аналог формулы Ньютона–Лейбница. Рассмотрим функционал

$$I = \int_{x_0}^{x_1} L\left[x, \varphi^k(x), \dot\varphi^k(x)\right] dx, \quad k = 1, \ldots, m.$$

Равенство (4) примет вид[1]

$$\frac{dT^x}{dx} - sL = 0, \tag{5}$$

где

$$T^x = \left(\xi_\varphi^k - \dot\varphi^k \xi_x \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi^k} + L\xi_x\right). \tag{6}$$

Интегрируя (5) в пределах от x_0 по x_1, получим

$$I = \frac{1}{s} \cdot T^x \Big|_{x_0}^{x_1}. \tag{7}$$

Таким образом, если функционал I конформно инвариантен относительно однопараметрической группы G_1 с оператором X и экстремали $\varphi^k(x)$ найдены, то экстремальное значение функционала можно вычислить по формуле (7), которую естественно назвать аналогом формулы Ньютона–Лейбница для функционала с одной независимой переменной.

Вернемся к функционалу (1). Здесь с точностью до постоянной

$$L = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}.$$

Нетрудно проверить, что функционал (2) конформно инвариантен относительно однопараметрической группы, порожденной оператором

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi = x, \quad \xi = y,$$

с функцией $L^* = e^{s\cdot\varepsilon}$ $\left(s = \frac{1}{2}\right)$. Тогда в соответствии с формулой (6) имеем

$$T^x = \left(y - xy'\right) \frac{\partial L}{\partial y'} + L \cdot x$$

[1]В случае классической инвариантности по Э. Нётер ($S = 0$) имеет место первый интеграл $T^x = \text{const}$.

или после преобразований

$$T^x = \frac{1}{\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}}\left(y\cdot y' + x\right). \tag{8}$$

Так как L не содержит в явной форме x, то функционал I инвариантен относительно группы переносов по координате x и в соответствии с (5) имеет место первый интеграл $L - y'F_{y'} = c$ или после преобразований

$$y\left(1+y'^2\right) = c, \quad c = 2a. \tag{9}$$

Из уравнений (1) следует

$$x = a\cdot\left(\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right) - \sin\left(\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right)\right)\right), \quad 0 \le t \le \pi,$$

или

$$x = a\cdot\left(\arccos\left(1-\frac{y}{a}\right) - \sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}\right), \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y/a}{\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}}.$$

Следовательно,

$$y'\cdot y = a\cdot\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2}. \tag{10}$$

С учетом (9), (10) формула (8) запишется в виде

$$T^x = \frac{1}{\sqrt{2a}}\left(a\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{a}\right)^2} + x\right)$$

и время наискорейшего спуска в соответствии с (2) и (7) определится по формуле

$$\min T = \sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{2\frac{h}{a} - \left(\frac{h}{a}\right)^2} + \frac{l}{a}\right).$$

Геометрический способ определения радиуса производящего круга a указал еще сам И. Бернулли.

Литература

[1] Полак Р.С. *Вариационные принципы механики* (ГИФМЛ, М., 1960).
[2] Ахиезер Н.И. *Лекции по вариационному исчислению* (ГИТТЛ, М., 1955).
[3] Гараев К.Г. *Замечание к теории Нётер*, Изв. вузов. Матем., № 5, 69–71 (1989).
[4] Noether E. *Invariant variational problems*, Gött. Nachr. 235–257 (1918).
[5] Bessel-Hagen E. *Über die Erhaltungssätze der Electrodynamik*, Math. Ann. **84** (3–4), 258–276 (1921).
[6] Steudel H. *Eine Erweiterung des ersten Noetherschen Satzes*, Z. Naturforsch **17A**, 133–135 (1962).
[7] Ибрагимов Н.Х. *Инвариантные вариационные задачи и их законы сохранения*, Теорет. и матем. физика **1** (3), 350–359 (1969).

К.Г. Гараев

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева, ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,

e-mail: sm@kai.ru

K.G. Garaev

A problem on branchistochrone as invariant variational problem

Abstract. Based on the modified theory of invariant variational problems developed by the author, we describe a theoretical group approach to solving a problem of branchistochrone.

Keywords: branchistochrone, functional, first integral, conformal invariance, infinitesimal operator, time of steepest descent.

K.G. Garaev

Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,

e-mail: sm@kai.ru