ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 9 (484)

УДК 517.946

Р.М. МАВЛЯВИЕВ

РЕШЕНИЕ ОСНОВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОДНОГО B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

Пусть E_2^+ — полуплоскость $y>0$ евклидовой плоскости E_2 точек (x,y), D_i — симметричная относительно координатной оси $y=0$ внутренняя область в E_2^+, ограниченная кривой Γ, D_e — внешняя область. Обозначим через D_i^+, D_e^+ и Γ^+ части D_i, D_e и Γ соответственно, расположенные в E_2^+. Область D_i^+ ограничена кривой Γ^+ и отрезком $\Gamma^{(0)}=[d_1,d_2]$ координатной оси $y=0$, область D_e^+ ограничена кривой Γ^+ и частью $Ox\setminus\Gamma^0$ оси $y=0$. Кривая Γ^+ принадлежит классу $\Lambda_{2,B}$, когда $\Gamma\in\Lambda_2$ [1].

В областях D_i^+ и D_e^+ рассматривается B-эллиптическое уравнение

$$\Delta_B^2 u+2a\frac{\partial}{\partial x}\Delta_B u+b\Delta_B u=0, \tag{1}$$

где $\Delta_B=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B_y$, $B_y=\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\alpha}{y}\frac{\partial}{\partial y}$, — оператор Бесселя, числа α, $a>0$ и $b<0$.

В работе строятся фундаментальные решения (ф. р.) и потенциалы типа простого и двойного слоев для уравнения (1), вычисляются предельные значения потенциалов и их нормальных производных на границе Γ^+, основные краевые задачи для уравнения (1) сводятся к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода и доказывается их однозначная разрешимость.

1. *Фундаментальные решения.* Подстановкой $\Delta_B u=e^{-ax}\omega$ уравнение (1) можно свести к уравнению

$$\Delta_B\omega-(a^2-b)\omega=0, \tag{2}$$

где коэффициент $k^2=a^2-b>0$. Известно [2], что функция $\omega=C_1(k,\alpha)e^{-ax}r^{-\frac{\alpha}{2}}K_{\frac{\alpha}{2}}(kr)$, где $K_q(t)$ — функция Макдональда, является фундаментальным решением (ф. р.) уравнения (2), $C_1(k,\alpha)$ — нормирующая константа, зависящая от k и α, $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Заменяя функцию ω конкретным значением, получаем неоднородное уравнение

$$\Delta_B u=C_1(k,\alpha)e^{-ax}r^{-\frac{\alpha}{2}}K_{\frac{\alpha}{2}}=F(x,y). \tag{3}$$

Известно [3], что ф. р. уравнения $\Delta_B u=0$ с особенностью в начале координат является функция $\varphi^*(x,y)=r^{-\alpha}$. Для получения ф. р. с особенностью в произвольной точке $M_0(x_0,y_0)$ применим к функции φ^* оператор обобщенного сдвига

$$\varphi(x,y;x_0,y_0)=T_{x,y}^{x_0,y_0}\varphi^*(x,y)=C_2(\alpha)\int_0^\pi((x-x_0)^2+y^2+y_0^2-2yy_0\cos\beta)^{-\frac{\alpha}{2}}\sin^{\alpha-1}\beta\,d\beta,$$

где $C_2(\alpha)=\frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{\Gamma(\frac12)\Gamma(\frac{\alpha}{2})}$. Используя схему, предложенную в [4], показываем, что ф. р. φ можно представить в виде

$$\varphi(x,y;x_0,y_0)=C_2(\alpha)\ln\frac{1}{r_{MM_0}}+\varphi^{**},$$

где $r_{MM_0}=|MM_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, $M(x,y)$ — внутренняя точка области, φ^{**} — регулярная часть решения φ.

Решение неоднородного уравнения (3) может быть найдено с помощью свертки

$$u(x,y) = \varphi^* * F(x,y) = \iint\limits_{E_2^+} \varphi(x,y;\xi,\eta)F(\xi,\eta)\eta^\alpha \, d\xi \, d\eta.$$

Используя правило композиции ядер [2], показываем, что функция u имеет в начале координат особенность вида

$$\psi^*(x,y) = r^{2-\alpha} + \psi^{**},$$

где ψ^{**} — регулярная часть решния ψ. Для получения ф. р. с особенностью в произвольной точке $M_0(x_0, y_0)$ применим к функции ψ^* оператор обобщенного сдвига

$$\psi(x,y;x_0,y_0) = T_{x,y}^{x_0,y_0}\psi^*(x,y) = C_2(\alpha)\int_0^\pi ((x-x_0)^2 + y^2 + y_0^2 - 2yy_0\cos\beta)^{\frac{2-\alpha}{2}} \sin^{\alpha-1}\beta \, d\beta.$$

Функция ψ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ особенность вида

$$\psi(x,y;x_0,y_0) = C_2(\alpha) r_{MM_0}^2 \ln\frac{1}{r_{MM_0}} + \psi^{***},$$

где ψ^{***} — регулярная часть решения ψ.

2. *Потенциалы.* Из результатов п. 1 следует, что фундаментальные решения φ и ψ имеют в точке (x_0, y_0), $y_0 > 0$, такие же особенности, что и их бигармонические аналоги [1]. Аналогично формулам, приведенным в [1], введем потенциалы, являющиеся решениями уравнения (1)

$$W_1(M,\mu) = \frac{1}{\pi}\int_{\Gamma^+} \mu(P_0)\left(\frac{1}{C_2(\alpha)}\varphi - \frac{1}{2C_2(\alpha)}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\right)\eta^\alpha d\Gamma^+,$$
$$W_2(M,\nu) = \frac{2}{\pi}\int_{\Gamma^+} \nu(P_0)\left(\frac{3}{2C_2(\alpha)}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{1}{4C_2(\alpha)}\frac{\partial^3\psi}{\partial n^3}\right)\eta^\alpha d\Gamma^+$$

с ядрами

$$(y\eta)^{-\frac{\alpha}{2}} cos^2\theta + \gamma_1 = \frac{1}{C_2(\alpha)}\varphi - \frac{1}{2C_2(\alpha)}\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2},$$
$$(y\eta)^{-\frac{\alpha}{2}} \frac{cos^3\theta}{r_{MP}} + \gamma_2 = \frac{3}{2C_2(\alpha)}\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \frac{1}{4C_2(\alpha)}\frac{\partial^3\psi}{\partial n^3},$$

где θ — угол между радиус-вектором $\overline{r}_{MP} = \overline{MP}$ и внешней нормалью $\overline{n}_P$ в точке $P \in \Gamma^+$, γ_1 и γ_2 — достаточно гладкие функции, $\mu(P)$ и $\nu(P)$ — плотности потенциалов.

Так как ядра потенциалов W_1 и W_2 имеют такие же особенности, что и их бигармонические аналоги [1], имеет место

Теорема 1. *Если плотности μ и ν — непрерывные функции на Γ^+ и $\Gamma^+ \in \Lambda_{2,B}$, то для потенциалов W_1, W_2 и их нормальных производных имеют место предельные соотношения*

$$W_1^\pm = \overline{W_1}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial W_1^\pm}{\partial n} = \mp C_3(\alpha)\mu + \overline{\frac{\partial W_1}{\partial n}}, \tag{5}$$

$$W_2^\pm = \pm C_3(\alpha)\nu + \overline{W_2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial W_2^\pm}{\partial n} = \mp C_4(\alpha)\chi\nu + \overline{\frac{\partial W_2}{\partial n}}, \tag{7}$$

где

$$C_3 = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+4}{2})}, \quad C_4 = \frac{\Gamma(\frac{\alpha+3}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+4}{2})},$$

знаки "+" и '−" обозначают соответственно предельные значения изнутри и извне области D^+, знак верхнего подчеркивания обозначает прямое значение на границе Γ, χ *— кривизна контура* Γ^+ *в точке* P_0.

3. *Основные краевые задачи. Внутренняя краевая задача*: найти четное по y решение уравнения (1) в области D_i^+, один раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{D_i^+} = D_i^+ \bigcup \Gamma^+$ и удовлетворяющее граничным условиям

$$u\big|_{\Gamma^+} = f_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma^+} = f_1. \tag{8}$$

Теорема 2. *Задача* (1), (8) *в классе* $C^4(D_i^+) \bigcup C^1(\overline{D_i^+})$ *не может иметь более одного решения.*

Внешняя краевая задача: найти четное по y решение уравнения (1) в области D_e^+, один раз непрерывно дифференцируемое в $\overline{D_e^+} = D_e^+ \bigcup \Gamma^+$, удовлетворяющее граничным условиям (8) и имеющее оценки

$$u = O(r^{2-\alpha}), \quad \Delta_B u = O(r^{-\alpha}) \tag{9}$$

при $r \to \infty$.

Теорема 3. *Задача* (1), (8), (9) *в классе* $C^4(D_i^+) \bigcup C^1(\overline{D_i^+})$ *не может иметь более одного решения.*

Доказательства проводятся с помощью формул Грина.

Решение задач (1), (8) и (1), (8), (9) ищется в виде

$$u(M) = W_1(M, \mu) + W_2(M, \nu). \tag{10}$$

Плотности μ и ν — неопределенные функции. Они находятся из требования, чтобы функция (10) удовлетворяла граничным условиям (8). Подставляя (10) в (8) и учитывая (4)–(7), получаем систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$\mu(M_0) = f_0(M_0) - \overline{W_1}(M_0, \mu) - \overline{W_2}(M_0, \nu),$$

$$\nu(M_0) = -f_1(M_0) - C_4(\alpha)\chi(P_0)\nu(M_0) + \frac{\partial \overline{W_1}(M_0, \mu)}{\partial n} + \frac{\partial \overline{W_2}(M_0, \nu)}{\partial n}.$$

По альтернативе Фредгольма эта система имеет единственное решение.

Литература

1. Панич О.И. *О потенциалах для полигармонического уравнения четвертого порядка* // Матем. сб. – 1960. – Т. 50. – № 3. – С. 335–368.
2. Мухлисов Ф.Г. *Потенциалы, порожденные оператором обобщенного сдвига, и краевые задачи для одного класса сингулярных эллиптических уравнений.* – Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Казань, 1991. – 260 с.
3. Киприянов И.А., Кононенко В.И. *Фундаментальные решения B-эллиптических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 1. – С. 114–129.
4. Weinstein A. *Discontinuous integrals and generalized potential theory* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 63. – № 2. – P. 342–354.

Казанский государственный
педагогический университет

Поступила
11.09.2001