ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 9 (448)

УДК 514.764

С.Е. СТЕПАНОВ

О ГЕОМЕТРИИ ПРОЕКТИВНЫХ СУБМЕРСИЙ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Введение

Исследованию проективных или, по другой терминологии, геодезических диффеоморфизмов посвящены десятки работ (см. об этом в [1] и [2]). К их числу относятся и работы по глобальной геометрии проективных диффеоморфизмов компактных римановых многообразий (см., напр., [3] и [4]). Основным результатом их можно считать нахождение препятствия для существования подобных диффеоморфизмов в виде требования отрицательной определенности секционной кривизны многообразий. Развивая теорию проективных отображений, ряд авторов сняли требование равенства размерностей участвующих в отображении многообразий и, более того, ограничение на ранг отображения (см. [5]–[8]). Одновременно в круг исследований были включены проективные отображения полных римановых многообразий (см. [9] и [10]).

Данная статья дополняет эти исследования. В ней мы опишем геометрию риманова многообразия, допускающего проективную субмерсию на риманово многообразие меньшей размерности; найдем препятствия к существованию локальных проективных субмерсий риманова многообразия и глобальных проективных субмерсий компактного риманова многообразия с краем.

1. Проективные субмерсии с геодезически полными слоями

1.1. Пусть M и N будут соответственно m- и n-мерными римановыми многообразиями с метриками g и g' и связностями Леви-Чивита ∇ и ∇'. Рассмотрим гладкое отображение $f: M \to N$ класса C^∞. Обозначим через $f^{-1}TN$ векторное расслоение с базой M, слоем $T_{f(x)}N$ над точкой $x \in M$. Дифференциал $f_*: TM \to TN$ является линейным отображением, т.е. $f_{*x} \in T_{f(x)}N \times T^*M$ для каждой точки x многообразия M, и поэтому f_* является векторозначной 1-формой на M со значениями в векторном расслоении $f^{-1}TN$.

Отображение $f: M \to N$ называется *отображением постоянного ранга*, если величина $r = \mathrm{Rang}(f_{*x})$ не зависит от выбора точки $x \in M$. В частности, если $\mathrm{Rang}(f_{*x}) = \dim N$ во всех точках $x \in M$, отображение f называется *субмерсией*.

1.2. Пусть $\gamma : t \in J \to \gamma(t) \in M$ — предгеодезическая многообразия M с линейной связностью ∇, тогда $\nabla_X X = \varphi(t) X$ для касательного γ векторного поля $X = d\gamma/dt$. Проведем перепараметризацию γ так, чтобы t стал *аффинным параметром*. В этом случае $\nabla_X X = 0$, и кривая γ называется *геодезической*. Анализ последнего уравнения позволяет заключить (см. [11], с. 183), что имеет место одно из двух: либо γ — иммерсия, т.е. $d\gamma/dt \neq 0$ для всех $t \in J$, либо $\gamma(J)$ — это точка многообразия M.

Если отображение $f: M \to N$ каждую предгеодезическую γ многообразия M переводит в предгеодезическую $\gamma' = f(\gamma)$ многообразия N, то отображение называется *проективным* (см., напр., [12] и [13]). Если при этом f является отображением постоянного ранга $r < m$, то каждая предгеодезическая γ, которая служит интегральной кривой распределения $\ker f_*$ будет отображаться в точку $f(\gamma)$ многообразия N, что в силу сказанного выше не противоречит определению проективного отображения.

Если предположить, что каждая геодезическая γ многообразия M отображается в геодезическую γ' при сохранении аффинной параметризации кривых, то отображение f называется *аффинным* (см. [12]).

Пусть M_1 и M_2 суть римановы многообразия с метриками g_1 и g_2 соответственно, $\pi_a : M_1 \times M_2 \to M_a$ — каноническая проекция для $a = 1, 2$ и $\mu : M_1 \times M_2 \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая строго положительная функция. Тогда многообразие $M = M_1 \times M_2$ с метрикой $g = g_1(\pi_{1*}, \pi_{1*}) \oplus \mu g_2(\pi_{2*}, \pi_{2*})$ называется (см. [14]) *скрученным произведением римановых многообразий* или просто *скрученным многообразием* и обозначается как $M_1 \times_\mu M_2$. При этом канонические слоения произведения $M_1 \times M_2$ будут вполне геодезическим и вполне омбилическим слоениями риманова многообразия $M_1 \times_\mu M_2$.

Докажем, что справедлива

Теорема 1. *Односвязное риманово многообразие M, допускающее проективную субмерсию с геодезически полными слоями, изометрично скрученному произведению римановых многообразий M_1 и M_2 таких, что слои субмерсии и их ортогональные дополнения соответствуют каноническим слоениям произведения $M_1 \times M_2$.*

Доказательство. В [7] было доказано, что в случае проективной субмерсии $f : M \to N$ каждый ее слой $f^{-1}(y)$ для $y \in N$ является вполне геодезическим подмногообразием M, а распределение $\mathcal{H}$ на M, ортогонально дополнительное вертикальному распределению $\mathcal{V} = \ker f_*$, является интегрируемым и при этом его интегральные многообразия являются вполне омбилическими подмногообразиями M (см. также [8]).

Более того, в [9] нами была доказана локальная теорема, согласно которой m-мерное риманово многообразие M допускает проективное отображение $f : M \to N$ постоянного ранга $r < m$ тогда и только тогда, когда M локально является скрученным произведением r- и $(m - r)$-мерных римановых многообразий M_1 и M_2 таким, что канонические слоения произведения $M_1 \times M_2$ являются интегральными многообразиями распределений $\ker f_*$ и $(\ker f_*)^\perp$.

С другой стороны, согласно утверждению, доказанному в [14], односвязное многообразие M, несущее два ортогональных дополнительных слоения $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$, из которых первое — вполне геодезическое и геодезически полное, а второе — вполне омбилическое, изометрично скрученному произведению $M_1 \times_\mu M_2$ римановых многообразий M_1 и M_2 такому, что интегральные многообразия распределений $\mathcal{V}$ и $\mathcal{H}$ соответствуют каноническим слоениям произведения $M_1 \times M_2$. Из этих двух утверждений и вытекает справедливость доказываемой теоремы.

Если учесть, что вполне геодезическое подмногообразие полного риманова многообразия M геодезически полное (см. [15], с. 174), то справедливо

Следствие. Односвязное полное риманово многообразие M, допускающее проективную субмерсию, изометрично скрученному произведению римановых многообразий M_1 и M_2 таких, что слои субмерсии и их ортогональные дополнения соответствуют каноническим слоениям произведения $M_1 \times M_2$.

Теорема 2. *Если односвязное полное риманово многообразие M, допускающее проективную субмерсию, имеет неотрицательную секционную кривизну, то оно изометрично прямому произведению римановых многообразий M_1 и M_2 таких, что слои субмерсии и их ортогональные дополнения соответствуют каноническим слоениям произведения $M_1 \times M_2$.*

Доказательство. Как уже говорилось, риманово многообразие M, допускающее проективную субмерсию $f : M \to N$, несет два интегрируемых распределения: вертикальное распределение $\mathcal{V} = \ker f_*$ с вполне геодезическими интегральными многообразиями и ортогональное дополнительное ему горизонтальное распределение $\mathcal{H} = (\ker f_*)^\perp$ с вполне омбилическими интегральными многообразиями. В [16] рассматривалась подобная пара распределений на полном римановом многообразии M и была доказана теорема, согласно которой интегральные многообразия распределения $\mathcal{H}$ будут вполне геодезическими, если в каждой точке $x \in M$ для тензора римановой кривизны R, локального ортонормированного базиса $\{E, \ldots, E_n\}$ векторных полей, касающихся распределения $\mathcal{H}$, и его вектора средней кривизны ξ^h, имеют место неравенства $\sum\limits_{a=1}^{n} R(\xi^h, E_a, \xi^h, E_a) \geq 0$ или $\sum\limits_{a=1}^{n} R(E_a, E_\alpha, E_a, E_\alpha) \geq 0$ при $\xi^h(x) = 0$ и произвольном E_α, касательном к $\mathcal{V}$. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что согласно теореме де Рама ([12], с. 180) при наличии на односвязном полном римановом многообразии M двух ортогональных дополнительных интегрируемых распределений с вполне геодезическими интегральными многообразиями M будет изометричным прямому произведению римановых многообразий M_1 и M_2 такому, что интегральные многообразия распределений соответствуют каноническим слоениям произведения $M_1 \times M_2$. $\square$

2. Препятствия к существованию проективных субмерсий

2.1. Пусть для произвольного m-мерного риманова многообразия M существует субмерсия $f : M \to N$ на n-мерное ($n < m$) риманово многообразие N. В этом случае (см., напр., [7]) на M существует полуинтегрируемая $O(n) \times O(m-n)$-структура, где

$$O(n) \times O(m-n) = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix};\ A \in O(n),\ C \in O(m-n) \right\},$$

с интегрируемым вертикальным распределением $\mathcal{V} = \ker f_*$ и ортогональным дополнительным ему горизонтальным распределением $\mathcal{H} = (\ker f_*)^\perp$. Если распределение $\mathcal{H}$ интегрируемо, интегрируемой будет и $O(n) \times O(m-n)$-структура (см. [17], с. 22).

Если в каждой точке $x \in M$ через $h : T_xM \to \mathcal{H}_x$ и $v : T_xM \to \mathcal{V}_x$ обозначить операторы ортогонального проектирования, то на многообразии M можно задать тензорное поле $P = v - h$, удовлетворяющее, как это проверяется непосредственно, следующим условиям: $P^2 = \mathrm{id}$ и $g(P, P) = g$. Тензорное поле P называется (см., напр., [18]) *фундаментальным тензором структуры*.

2.2. Полагая субмерсию $f : M \to N$ проективной, докажем, что справедлива

Теорема 3. *Риманово многообразие M отрицательной секционной кривизны не допускает проективных субмерсий.*

Доказательство. Пусть на m-мерном римановом многообразии M задана $O(n) \times O(m-n)$-структура с ортогонально дополнительными распределениями $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$. Полагаем $R^{hv} = \sum\limits_{a=1}^{n} \sum\limits_{\alpha=n+1}^{m} R(E_a, E_\alpha, E_a, E_\alpha)$ для локальных ортонормированных базисов $\{E_a\}_{a=1,\ldots,n}$ и $\{E_\alpha\}_{\alpha=n+1,\ldots,m}$ распределений $\mathcal{H}$ и $\mathcal{V}$ соответственно.

Обозначим векторы средних кривизн распределений $O(n) \times O(m-n)$-структуры (см. [19], с. 149) через ξ^h и ξ^v, тогда (см. [20])

$$\mathrm{div}_{\mathcal{V}}\, \xi^h = \sum_{a=1}^{n} g(\nabla_{E_a} \xi^h, E_a), \quad \mathrm{div}_{\mathcal{H}}\, \xi^v = \sum_{\alpha=n+1}^{m} g(\nabla_{E_\alpha} \xi^v, E_\alpha).$$

При этом в случае интегрируемой $O(n) \times O(m-n)$-структуры величины $\mathrm{div}_{\mathcal{H}}\, \xi^v$, $\mathrm{div}_{\mathcal{V}}\, \xi^h$ и R^{hv} связаны следующим равенством (см. [20]):

$$4R^{hv} = -\frac{1}{2}|\nabla P|^2 + 2\,\mathrm{div}_{\mathcal{V}}\, \xi^h + 2\,\mathrm{div}_{\mathcal{H}}\, \xi^v. \tag{2.1}$$

Предположим, что максимальные интегральные многообразия вертикального распределения $\mathcal{V}$ являются вполне геодезическими подмногообразиями риманова многообразия M, тогда равенству (2.1) можем придать следующий вид:

$$\mathrm{div}_{\mathcal{V}}\, \xi^h = 2R^{hv} + \frac{1}{4}|\nabla P|^2. \tag{2.2}$$

Если существует хотя бы одно максимальное замкнутое интегральное многообразие M' распределения $\mathcal{V}$, то, применяя к векторному полю ξ^h теорему Грина ([15], с. 260), в силу (2.2) получим

$$\int_{M'} \{2R^{hv} + \tfrac{1}{4}|\nabla P|^2\} dV' = 0, \tag{2.3}$$

где dV' — форма объема подмногообразия M'.

Для произвольной субмерсии $f : M \to N$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ любой точки $y \in M$ является $(m-n)$-мерным замкнутым (вообще говоря, несвязным) подмногообразием M' многообразия M. При этом для проективной субмерсии $f : M \to N$ полный прообраз $f^{-1}(y)$ будет вполне геодезическим подмногообразием, а потому имеет место равенство (2.3), где dV' — элемент объема подмногообразия $M' = f^{-1}(y)$ (или его связной компоненты). Теперь, очевидно, что условие $R^{hv} < 0$ вступит в противоречие с равенством (2.3). $\square$

3. Условия препятствия к существованию проективных субмерсии компактных многообразий с краем

3.1. Прежде чем приступать к изложению основного материала, заметим, что наиболее простым решением общей задачи построения проективного отображения компактного риманова многообразия M с краем ∂M может служить тот случай, когда край ∂M представляет собою вполне геодезическое подмногообразие многообразия M, чего всегда можно добиться специальным выбором метрики на M ([21], с. 286). Тогда задание проективного отображения многообразия M будет автоматически предполагать проективное отображение его края ∂M.

3.2. Рассмотрим случай субмерсии $f : M \to N$ компактного риманова многообразия M с краем ∂M на риманово многообразие N, когда $\dim N = 1$ и интегрируемое распределение $\mathcal{V} = \ker f_*$ имеет своим интегральным многообразием край ∂M многообразия M.

Кривизну Риччи $\mathrm{Ric}(X)$ многообразия M в направлении векторов $X \in \mathcal{H}_x$ назовем *горизонтальной*. При этом горизонтальную кривизну Риччи многообразия M будем называть *квазиположительной* (соответственно *квазиотрицательной*), если всюду $\mathrm{Ric}(X) \geq 0$ (соответственно $\mathrm{Ric}(X) \leq 0$) и хотя бы в одной точке $x \in M$ для всех $X \in \mathcal{H}_x$ справедливо строгое неравенство $\mathrm{Ric}(X) > 0$ (соответственно $\mathrm{Ric}(X) < 0$).

Теорема 4. *Пусть $f : M \to N$ — субмерсия компактного ориентированного риманова многообразия M с краем ∂M на 1-мерное риманово многообразие N такая, что ∂M является интегральным многообразием вертикального распределения $\mathcal{V} = \ker f_*$. Если горизонтальная кривизна Риччи многообразия M квазиположительная или квазиотрицательная, то субмерсия f не может быть проективной.*

Доказательство. На компактном римановом многообразии M с краем $\partial M \neq \emptyset$ для вектора Йордена $Z = n\xi^h + (m-n)\xi^v$ произвольной $O(n) \times O(m-n)$-структуры согласно [22] имеем

$$\begin{gathered}\int_M R^{hv} dV + 2\int_M (|Q^h|^2 + |Q^v|^2) dV - 2\int_M (|F^h|^2 + |F^v|^2) dv - \\ - \int_M (n^2|\xi^h|^2 + (m-n)^2|\xi^v|^2) dV = \frac{n}{4}\int_{\partial M} g(\xi^h, \mathcal{N}) dV' + \frac{m-n}{4}\int_{\partial M} g(\xi^v, \mathcal{N}) dV',\end{gathered} \tag{3.1}$$

где через Q^h и F^h (соответственно Q^v и F^v) обозначены вторая фундаментальная форма и тензор интегрируемости горизонтального (соответственно вертикального) распределения структуры (см. [19], с. 148), а через dV и dV' — формы объема риманова многообразия M и его края ∂M.

Рассмотрим случай, когда распределение $\mathcal{H}$ интегрируемо, $\dim \mathcal{H} = m - 1$ и в каждой точке $x \in \partial M$ подпространства $\mathcal{H}_x$ и $T_x\partial M$ векторного пространства T_xM совпадают. В этом случае будем говорить, что *распределение $\mathcal{H}$ структуры касается края ∂M многообразия M*. Край ∂M является (см. [23], с. 97) замкнутым подмногообразием в M с естественным вложением $\phi : \partial M \to$

M. При этом ориентация на M индуцирует (см. [11], с. 252) естественную ориентацию на ∂M с помощью задания в каждой точке $x \in \partial M$ направленного наружу единичного нормального к ∂M вектора $\mathcal{N}_x \in T_x M$.

Пусть локальные уравнения края в окрестности $U' = U \cap \partial M$ для координатной окрестности U в M произвольной точки $x \in \partial M$ имеют вид $x^i = x^i(u^1, \dots, u^{m-1})$. Полагаем ϕ_* дифференциалом (естественного) вложения ϕ с компонентами $\phi^i_\alpha = \partial x^i / \partial u^\alpha$ в U'. Тогда индуцированную на ∂M метрику g' зададим равенством $g' = g(\phi_*, \phi_*)$. Выпишем для края ∂M как вложенного в M подмногообразия уравнения Гаусса

$$(\nabla'_{X'}\phi_*)Y' = Q'(X', Y')\mathcal{N}$$

и Вейнгартена (см., напр., [24], с. 92–93)

$$\nabla'_{X'}\mathcal{N} = -\phi_* B X', \tag{3.2}$$

где $Q = Q' \otimes \mathcal{N}$ — вторая фундаментальная форма ∂M и B — оператор Вейнгартена, определяемый равенством $Q'(X', Y') = g'(BX', Y')$ для произвольных касательных к ∂M векторных полей X' и Y'. Вдоль ∂M имеем

$$\zeta = \varepsilon \mathcal{N} \tag{3.3}$$

для $\mathcal{V} = \mathrm{Span}\{\zeta\}$ и $\varepsilon = \pm 1$. Дифференцируя ковариантным образом вдоль ∂M равенство (3.3), получим согласно (3.2) дифференциальное равенство

$$\nabla_{\phi_* X'}\zeta = -\varepsilon \phi_* B X',$$

которое запишем в координатах

$$\phi^j_\alpha \nabla_j \zeta^i = -\varepsilon \phi^i_\beta Q^\beta_\alpha \tag{3.4}$$

для $1 \le i, j \le m$ и $1 \le \alpha, \beta \le m-1$. Здесь $Q_{\alpha\beta} = g'_{\alpha\gamma} Q^\gamma_\beta$ — компоненты второй фундаментальной формы края ∂M, а $g'_{\alpha\beta} = \phi^i_\alpha \phi^j_\beta g_{ij}$ — компоненты его метрического тензора. Умножим левую и правую части равенства (3.4) на ϕ^α_i и воспользуемся тождеством

$$\mathcal{N}_j \mathcal{N}^i + \phi^\alpha_j \phi^i_\alpha = \delta^i_j,$$

где $\phi^\alpha_i = g'^{\alpha\beta} g_{ij} \phi^j_\beta$ для $g'^{\alpha\beta}$ — контравариантных компонент $g'^{\alpha\beta}$ метрического тензора g' края ∂M, в результате получим $(\delta^i_j - \mathcal{N}_j \mathcal{N}^i)\nabla_i \zeta^j = -\varepsilon Q^\alpha_\alpha$ или

$$(\zeta^j \nabla_j \zeta^i - \zeta^i \nabla_j \zeta^j)\mathcal{N}_i = \varepsilon^2 Q^\alpha_\alpha.$$

Тогда $g(Z, \mathcal{N}) = Q^\alpha_\alpha = (m-1)q$, где через q мы обозначили среднюю кривизну края ∂M, как $(m-1)$-мерного подмногообразия M. Далее, полагая *полной средней кривизной* края ∂M многообразия M величину $q(\partial M) = \int_{\partial M} q\, dV'$, перепишем интегральное равенство (3.1) в форме, соответствующей рассматриваемому случаю,

$$\int_M (\mathrm{Ric}(\zeta, \zeta) + |Q^h|^2 - (m-1)^2 |\xi^h|^2) dV = (m-1) q(\partial M). \tag{3.5}$$

В аналогичной ситуации, но уже с распределением $\mathcal{V}$, когда $\mathcal{V}$ интегрируемо, $\dim \mathcal{V} = m-1$, $\mathcal{V}_x = T_x \partial M$ для всех $x \in \partial M$ и $\mathcal{H} = \mathrm{Span}\{\zeta\}$, имеем

$$\int_M (\mathrm{Ric}(\zeta, \zeta) + |Q^v|^2 - (m-1)^2 |\xi^v|^2) dV = (m-1) q(\partial M). \tag{3.6}$$

Вернемся к условию теоремы. Согласно предположению интегральные многообразия вертикального распределения $\mathcal{V} = \ker f_*$ вполне геодезические и поэтому вторая фундаментальная форма Q края многообразия M должна обратиться в нуль, а тогда $q(\partial M) = 0$. При этом, как было доказано выше, горизонтальное распределение $\mathcal{H} = (\ker f_*)^\perp$ является интегрируемым с вполне омбилическими интегральными многообразиями.

С учетом сказанного интегральной формуле (3.6) можем придать вид $\int_M \mathrm{Ric}(\zeta,\zeta)dV = 0$. А потому заключаем, что многообразие M квазиотрицательной или квазиположительной горизонтальной кривизны Риччи не допускает подобных субмерсий. $\square$

3.3. Рассмотрим случай субмерсии $f : M \to N$ компактного риманова многообразия M с краем ∂M на риманово многообразие N, когда $\dim N = m-1$ и инволютивное распределение $\mathcal{H} = (\ker f_*)^\perp$ имеет своим интегральным многообразием край ∂M многообразия M.

Кривизну Риччи $\mathrm{Ric}(X)$ многообразия M в направлении векторов $X \in \mathcal{V}_x$ назовем *вертикальной*. При этом вертикальную кривизну Риччи многообразия M будем называть *квазиположительной* (соответственно *квазиотрицательной*), если всюду $\mathrm{Ric}(X) \geq 0$ (соответственно $\mathrm{Ric}(X) \leq 0$) и хотя бы в одной точке $x \in M$ для всех $X \in \mathcal{V}_x$ справедливо строгое неравенство $\mathrm{Ric}(X) > 0$ (соответственно $\mathrm{Ric}(X) < 0$).

Теорема 5. *Пусть $f : M \to N$ — субмерсия m-мерного компактного ориентированного риманова многообразия M с краем ∂M на $(m-1)$-мерное риманово многообразие N такая, что ∂M является интегральным многообразием горизонтального распределения $\mathcal{H} = (\ker f_*)^\perp$. Если выполняется одно из следующих условий:*

(1) *вертикальная кривизна Риччи многообразия M квазиотрицательна и полная средняя кривизна $q(\partial M)$ его края неотрицательна;*
(2) *вертикальная кривизна Риччи многообразия M неположительна и полная средняя кривизна $q(\partial M)$ его края положительна,*

то субмерсия f не может быть проективной.

Доказательство. Если для проективной субмерсии $f : M \to N$ при $\dim N = \dim M - 1$ край ∂M является интегральным многообразием горизонтального распределения $\mathcal{H} = (\ker f_*)^\perp$, то можно воспользоваться интегральной формулой (3.5), которой придадим вид

$$\int_M (\mathrm{Ric}(\zeta,\zeta) - (m-1)(m-2)|\xi^h|^2)dV = (m-1)q(\partial M). \tag{3.7}$$

Очевидно, одно из двух условий: $\int\limits_M \mathrm{Ric}(\zeta,\zeta)dV < 0$ и $q(\partial M) \geq 0$ или $\int\limits_M \mathrm{Ric}(\zeta,\zeta)dV \leq 0$ и $q(\partial M) > 0$ будет несовместимым с равенством (3.7). $\square$

Литература

1. Аминова А.В. *Псевдоримановы многообразия с общими геодезическими* // УМН. – 1993. – Т. 48. – Вып. 2. – С. 107–164.
2. Синюков И.С. *Геодезические отображения римановых пространств.* – М.: Наука, 1979. – 255 с.
3. Синюкова Е.Н. *О геодезических отображениях некоторых специальных римановых пространств* // Матем. заметки. – 1981. – Т. 30. – № 6. – С. 889–894.
4. Mikeš J. *Global geodesic mappings and their generalizations for compact Rietannian space* // Conf. on Diff. Geom. and its Appl. (Opava, August 24–28, 1992): Abstracts. – Opava, 1992. – P. 143–149.
5. Podesta F. *Projective submersion* // Bull. Austral. Math. Soc. – 1991. – V. 43. – № 26. – P. 251–256.
6. Nomizu K., Pinkall U. *On the geometry of projective immersion* // J. Math. Soc. Japan. – 1989. – V. 41. – № 4. – P. 607–623.
7. Степанов С.Е. *$O(n) \times O(m-n)$-структуры на m-мерных многообразиях и субмерсии* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – № 6. – С. 188–204.
8. Степанов С.Е. *К теории отображений римановых многообразий в целом* // Изв. вузов. вузов. Математика. – 1994. – № 10. – С. 81–88.
9. Степанов С.Е. *К глобальной теории проективных отображений* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 58. – № 1. – С. 111–118.

10. Stepanov S.E. *On the global theory of some classes of mappings* // Ann. Global Anal. and Geometry. – 1995. – V. 13. – № 3. – P. 239–249.
11. Зуланке Р., Винтген П. *Дифференциальная геометрия и расслоения.* Пер. с нем. – М.: Мир, 1975. – 352 с.
12. Yano K., Ishihara Sh. *Harmonic and relatively affine mappings* // J. Different. Geom. – 1975. – V. 10. – № 4. – P. 501–509.
13. Har' El Zvi. *Projective mappings and distortion theorems* // J. Different. Geom. – 1980. – V. 15. – P. 97–106.
14. Ponge R., Reckziegel H. *Twisted products in pseudo-Riemannian geometry* // Geom. dedic. – 1993. – V. 48. – № 1. – P. 15–25.
15. Кобаяси Ш., Номидзу К. *Основы дифференциальной геометрии.* Т. 2. Пер. с англ. – М.: Наука, 1981. – 414 с.
16. Brito F., Walczak P.G. *Totally geodesic foliations with integrable normal bundles* // Bol. Soc. Bras. Mat. – 1986. – V. 17. – № 1. – P. 41–46.
17. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии.* Пер. с англ. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
18. Yano K. *Affine connexions in an almost product space* // Kodai Math. Sem. Reports. – 1959. – V. 11. – № 1. – P. 1–24.
19. Reinhart B.L. *Differential geometry of foliations*: *the fundamental integrability problem.* – Berlin – N-Y: Springer Verlag, 1983. – 194 p.
20. Rocamora A.H. *Some geometric consequences of Weitzenbock formula on Riemannian almost-product manifolds*; *weak-harmonic distributions* // Illinois J. Math. – 1988. – V. 32. – P. 655–671.
21. Громол Д., Клингенберг В., Мейер В. *Риманова геометрия в целом.* Пер. с нем. – М.: Мир, 1971. – 343 с.
22. Stepanov S.E. *An integral formula for a Riemannian almost-product manifold* // Tensor. – 1994. – V. 55. – № 3. – P. 209–214.
23. Нарасимхан Р. *Анализ на действительных и комплексных многообразиях.* Пер. с англ. – М.: Мир, 1971. – 232 с.
24. Yano K. *Integral formulas in Riemannian geometry.* – N-Y: Marcel Dekker, 1970. – 156 c.

Владимирский государственный педагогический университет

Поступила
16.03.1998