ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.956

Е.А. УТКИНА

ПОВЫШЕНИЕ ПОРЯДКА НОРМАЛЬНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЗАДАЧИ ГУРСА

Рассмотрим уравнение

$$L(u) \equiv \sum_{i_1=0}^{m_1} \sum_{i_2=0}^{m_2} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} a_{i_1 i_2 \dots i_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial^{i_1+i_2+\dots+i_n} u}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{i_2} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0, \tag{1}$$

где $a_{m_1 m_2 \dots m_n} \equiv 1$, а гладкость остальных коэффициентов определяется включениями

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in C^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} i_\alpha}(\overline{D}).$$

Здесь $C^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n}$ — класс непрерывных в $\overline{D}$ вместе с их производными

$$\partial^{r_1+r_2+\dots+r_n}/\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{r_2} \dots \partial x_n^{r_n} \quad (r_1 = 0, \dots, \alpha_1,\ r_2 = 0, \dots, \alpha_2, \dots,\ r_n = 0, \dots, \alpha_n)$$

функций. Можно считать (1) наиболее общим псевдопараболическим уравнением, частные случаи которого изучались в работах ([1], [2], с. 5). Случаи уравнения (1) встречаются в приложениях, например, уравнение Буссинеска–Лява — из теории колебаний ([1], формула (20)) и уравнение Аллера ([2], с. 261) при математическом моделировании процесса поглощения влаги в биологии.

В области $D = \{x_{10} < x_1 < x_{11},\ x_{20} < x_2 < x_{21}, \dots,\ x_{n0} < x_n < x_{n1}\}$ получено [3] решение задачи Гурса (Г) для (1) с граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{i_1} u}{\partial x_1^{i_1}}(x_{10}, x_2, \dots, x_n) = \varphi_{1 i_1}(x_2, \dots, x_n) \qquad (i_1 = \overline{0, m_1 - 1}),\\
&\frac{\partial^{i_2} u}{\partial x_2^{i_2}}(x_1, x_{20}, \dots, x_n) = \varphi_{2 i_2}(x_1, x_3, \dots, x_n) \quad (i_2 = \overline{0, m_2 - 1}),\\
&\qquad \dots\\
&\frac{\partial^{i_n} u}{\partial x_n^{i_n}}(x_1, x_2, \dots, x_{n0}) = \varphi_{n i_n}(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (i_n = \overline{0, m_n - 1}),
\end{aligned} \tag{2}$$

удовлетворяющими условиям согласования для них

$$\begin{aligned}
\varphi_{10}(x_{20}, x_3, \dots, x_n) &= \varphi_{20}(x_{10}, x_3, \dots, x_n),\\
\varphi_{10}(x_2, x_{30}, x_4, \dots, x_n) &= \varphi_{30}(x_{10}, x_2, x_4, \dots, x_n),\\
&\dots\\
\varphi_{10}(x_{20}, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) &= \varphi_{n0}(x_{10}, x_2, \dots, x_{n-1}),\\
\varphi_{20}(x_1, x_{30}, x_4, \dots, x_n) &= \varphi_{30}(x_1, x_{20}, x_4, \dots, x_n),\\
&\dots\\
\varphi_{20}(x_1, x_3, x_4, \dots, x_{n0}) &= \varphi_{n0}(x_1, x_{20}, x_3, \dots, x_{n-1}),\\
\varphi_{n-10}(x_2, x_3, x_4, \dots, x_{n0}) &= \varphi_{n0}(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-10}),
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\varphi_{1i_1} \in C^{\sum\limits_{\alpha=2}^{n} m_\alpha}(\overline{X}_1),\ \varphi_{2i_2} \in C^{\sum\limits_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2}^{n} m_\alpha}(\overline{X}_2), \ldots,\ \varphi_{ni_n} \in C^{\sum\limits_{\alpha=1}^{n-1} m_\alpha}(\overline{X}_n),$$

где $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — грани D при $x_1 = x_{10}$, $x_2 = x_{20}, \ldots, x_n = x_{n0}$, а согласованные в (3) значения непрерывно дифференцируемы.

Здесь рассматривается аналог задач, изученных в [2] для уравнения более простого вида и названных там задачами Γ_1. А именно, будем заменять хотя бы одно из условий (2) на соответствующее условие из набора

$$\frac{\partial^{m_1} u}{\partial x_1^{m_1}} = \varphi_{1m_1}(x_2, \ldots, x_n),\quad \frac{\partial^{m_2} u}{\partial x_2^{m_2}} = \varphi_{2m_2}(x_1, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\frac{\partial^{m_n} u}{\partial x_n^{m_n}} = \varphi_{nm_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}). \tag{4}$$

Гладкость заданных граничных значений определяется условиями $\varphi_{km_n} \in C^{\sum\limits_{\alpha=1,\ \alpha\neq k}^{n} m_\alpha}(\overline{X}_k)$. Для наименования задач, как и в [4], будем использовать сочетания букв Г и N. А именно, если условия на характеристике берутся только из набора (2), то для наименования будем применять Г, в противном случае — N. Таким образом, можно получить задачи NГГ...Г, ГNГ...Г, ..., Г...ГN, NNГ...Г, ..., NN...NN. Остановимся сначала на одной из таких задач.

Задача NГГ...Г. Найти функцию

$$u \in C^{m_1+\cdots+m_n}(D) \cap C^{m_1+0+0+\cdots+0}(D \cup \overline{X}_1) \cap C^{0+(m_2-1)+0+\cdots+0}(D \cup \overline{X}_2) \ldots C^{0+\cdots+0+(m_n-1)}(D \cup \overline{X}_n),$$

являющуюся в D решением уравнения (1), удовлетворяющую первому условию из (4) и всем соотношениям (2), кроме первого при $i_1 = 0$.

Решение будем осуществлять с помощью редукции условий NГГ...Г к условиям задачи Гурса. При этом требуется определить φ_{10} через заданные. Для этого проинтегрируем (1) в пределах от x_{20} до x_2, от x_{30} до $x_3, \ldots$, от x_{n0} до x_n соответственно $m_2, m_3, \ldots, m_n$ раз. Выполним сначала эту процедуру для переменной x_2. При этом будет использована формула, которую можно считать интегральным аналогом известной формулы дифференцирования Лейбница

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \sum_{p_2=0}^{i_2} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-p_2}\Big[C_{i_2}^{p_2} D_{x_2}^{p_2}(a_{i_1\ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n)) \prod_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u(x_1, \ldots, x_n))\Big](-1)^{p_2} -$$
$$- \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \sum_{p_2=0}^{i_2-1} \sum_{p_{21}=0}^{p_2} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-p_2}\Big[C_{i_2-(p_2-p_{21})}^{p_{21}} D_{x_2}^{p_{21}}(a_{i_1\ldots i_n}(x_1, x_{20}, x_3, \ldots, x_n)) \times$$
$$\times \prod_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha} D_{x_2}^{p_2-p_{21}}(u(x_1, x_{20}, x_3, \ldots, x_n))\Big](-1)^{p_{21}} = 0. \tag{5}$$

Здесь $D_t^k\varphi \equiv \partial^k\varphi/\partial t^k$ при $k = 1, 2, \ldots$ и $D_t^k\varphi \equiv \int\limits_{t_0}^{t} \frac{(t-\tau)^{-k-1}\varphi(\tau)}{(-k-1)!}d\tau$, если $k = -1, -2, \ldots$; D_t^0 — единичный оператор. Проще всего можно убедиться в выполнении (5) непосредственной проверкой.

Вычислим m_3-кратный интеграл по x_3 от (5)

$$\sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \sum_{p_2=0}^{i_2} \sum_{p_3=0}^{i_3} D_{x_2}^{-(m_2-i_2)-p_2} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-p_3}\Big[C_{i_2}^{p_2} C_{i_3}^{p_3} D_{x_2}^{p_2} D_{x_3}^{p_3}(a_{i_1\ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n)) \times$$
$$\times \prod_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2,3}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha}(u(x_1, \ldots, x_n))\Big](-1)^{p_2+p_3} -$$
$$- \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_n=0}^{m_n} \sum_{p_2=0}^{i_2-1} \sum_{p_3=0}^{i_3-1} \sum_{p_{31}=0}^{p_3} D_{x_2}^{-(m-2-i_2)-p_2} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-p_3}\Big[C_{i_2}^{p_2} C_{i_3-(p_3-p_{31})}^{p_{31}} \times$$

$$\times D_{x_2}^{p_2} D_{x_3}^{p_{31}}(a_{i_1\dots i_n}(x_1,x_2,x_{30},\dots,x_n)) \prod_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2,3}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha} D_{x_3}^{p_3-p_{31}}(u(x_1,x_2,x_{30},\dots,x_n))\Big](-1)^{p_2+p_{31}} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{p_2=0}^{i_2-1}\sum_{p_3=0}^{i_3-1}\sum_{p_{21}=0}^{p_2} D_{x_2}^{-(m-2-i_2)-p_2} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-p_3}\Big[C_{i_2-(p_2-p_{21})}^{p_{21}} C_{i_3}^{p_3}\times$$

$$\times D_{x_2}^{p_{21}} D_{x_3}^{p_3}(a_{i_1\dots i_n}(x_1,x_{20},x_3,\dots,x_n)) \prod_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2,3}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha} D_{x_2}^{p_2-p_{21}}(u(x_1,x_{20},x_3,\dots,x_n))\Big](-1)^{p_{21}+p_3} +$$

$$+\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{p_2=0}^{i_2-1}\sum_{p_3=0}^{i_3-1}\sum_{p_{21}=0}^{p_2}\sum_{p_{31}=0}^{p_3} D_{x_2}^{-(m-2-i_2)-p_2} D_{x_3}^{-(m_3-i_3)-p_3}\Big[C_{i_2-(p_2-p_{21})}^{p_{21}}\times$$

$$\times C_{i_3-(p_3-p_{31})}^{p_{31}} D_{x_2}^{p_{21}} D_{x_3}^{p_{31}}(a_{i_1\dots i_n}(x_1,x_{20},x_{30},\dots,x_n))\times$$

$$\times \prod_{\alpha=1,\ \alpha\neq 2,3}^{n} D_{x_\alpha}^{i_\alpha} D_{x_2}^{p_2-p_{21}} D_{x_3}^{p_3-p_{31}}(u(x_1,x_{20},x_{30},\dots,x_n))\Big](-1)^{p_{21}+p_{31}} = 0.$$

Продолжая интегрирование по $m_4,\dots,m_n$, в итоге получим формулу

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{p_2=0}^{i_2}\dots\sum_{p_n=0}^{i_n}\prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-p_\alpha}\Big[\prod_{k=2}^{n}(C_{i_k}^{p_k} D_{x_k}^{p_k})(a_{i_1\dots i_n}(x_1,\dots,x_n))\times$$

$$\times D_{x_1}^{i_1}(u(x_1,\dots,x_n))\Big](-1)^{p_2+p_3+\dots+p_n} -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{p_2=0}^{i_2}\dots\sum_{p_{n-1}=0}^{i_n-1}\sum_{p_n=0}^{i_n-1}\sum_{p_{n1}=0}^{p_n}\prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-p_\alpha}\Big[\prod_{k=2}^{n-1}(C_{i_k}^{p_k} D_{x_k}^{p_k}) C_{i_n-(p_n-p_{n1})}^{p_{n1}}\times$$

$$\times D_{x_n}^{p_{n1}}(a_{i_1\dots i_n}(x_1,\dots,x_{n-1},x_{n0})) D_{x_1}^{i_1} D_{x_n}^{p_n-p_{n1}}(u(x_1,\dots,x_n,x_{n0}))\Big](-1)^{p_2+\dots+p_{n-1}+p_{n1}} -$$

$$+(-1)^{n-1}\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{p_2=0}^{i_2-1}\dots\sum_{p_n=0}^{i_n-1}\sum_{p_{21}=0}^{p_2}\dots\sum_{p_{n1}=0}^{p_n}\prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-p_\alpha}\Big[\prod_{k=2}^{n-1}(C_{i_k-(p_k-p_{k1})}^{p_{k1}} D_{x_k}^{p_{k1}})\times$$

$$\times (a_{i_1\dots i_n}(x_1,x_{20},\dots,x_{n0})) D_{x_1}^{i_1}\prod_{j=2}^{n} D_{x_j}^{p_j-p_{j1}}(u(x_1,x_{20},\dots,x_{n0}))\Big](-1)^{p_{21}+\dots+p_{n1}} = 0.$$

После этого устремим x_1 к x_{10} и перепишем последнюю формулу следующим образом:

$$\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{\delta_2=0}^{1}\dots\sum_{\delta_n=0}^{1}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-(1-\delta_2)}\dots\sum_{i_{n1}=0}^{i_n-(1-\delta_n)}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}(1-\delta_2)}\dots\sum_{i_{n2}=0}^{i_{n1}(1-\delta_n)}\prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-i_{\alpha 1}}\times$$

$$\times\Big[\prod_{k=2}^{n}(C_{i_k-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} D_{x_k}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)})(a_{i_1\dots i_n}(x_{10},x_{2\delta_2},\dots,x_{n\delta_n}))\times$$

$$\times D_{x_1}^{i_1}\prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}(u(x_{10},x_{2\delta_2},\dots,x_{n\delta_n}))\Big]\times$$

$$\times(-1)^{i_{21}+\dots+i_{n1}-(i_{21}-i_{22})(1-\delta_2)-\dots-(i_{n1}-i_{n2})(1-\delta_n)} = 0.$$

Выделим из этой формулы слагаемые, содержащие в качестве множителя $\varphi_{10}(x_2,\dots,x_n)$. Они получаются при $\delta_2=\dots=\delta_n$, $i_1=0$. Таким образом, получаем интегральное уравнение

$$\sum_{i_2=0}^{m_2}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n} D_{x_2}^{-i_2}\dots D_{x_n}^{-i_n}[A_{0 i_2\dots i_n}(x_2,\dots,x_n)\varphi_{10}(x_2,\dots,x_n)] =$$

$$= -\sum_{i_1=1}^{m_1}\sum_{i_2=0}^{m_2}\sum_{i_n=0}^{m_n} D_{x_2}^{-i_2}\dots D_{x_n}^{-i_n}[A_{i_1 i_2\dots i_n}(x_2,\dots,x_n)\varphi_{1i_1}(x_2,\dots,x_n)] -$$

$$-\sum_{i_1=0}^{m_1}\dots\sum_{i_n=0}^{m_n}\sum_{\substack{\delta_2=0\\ \delta_2\cdot\ldots\cdot\delta_n\neq 1}}^{1}\dots\sum_{\delta_n=0}^{1}\sum_{i_{21}=0}^{i_2-(1-\delta_2)}\dots\sum_{i_{n1}=0}^{i_n-(1-\delta_n)}\sum_{i_{22}=0}^{i_{21}(1-\delta_2)}\dots\sum_{i_{n2}=0}^{i_{n1}(1-\delta_n)}\prod_{\alpha=2}^{n} D_{x_\alpha}^{-(m_\alpha-i_\alpha)-i_{\alpha 1}}\times$$

$$\times\Bigg[\prod_{k=2}^{n}(C_{i_k-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)} D_{x_k}^{i_{k1}-(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)})(a_{i_1\dots i_n}(x_{10},x_{2\delta_2},\dots,x_{n\delta_n}))\times$$

$$\times D_{x_1}^{i_1}\prod_{k=2}^{n} D_{x_k}^{(i_{k1}-i_{k2})(1-\delta_k)}(u(x_{10},x_{2\delta_2},\dots,x_{n\delta_n}))\Bigg]\times$$

$$\times(-1)^{i_{21}+\dots+i_{n1}-(i_{21}-i_{22})(1-\delta_2)-\dots-(i_{n1}-i_{n2})(1-\delta_n)},\quad (6)$$

где

$$A_{i_1,i_2\dots i_n}(x_2,\dots,x_n) = \sum_{i_{21}=0}^{i_2}\dots\sum_{i_{n1}=0}^{i_n} C_{m_2-(i_2-i_{21})}^{i_{21}}\cdot\ldots\cdot C_{m_n-(i_n-i_{n1})}^{i_{n1}}\times$$

$$\times D_{x_2}^{i_{21}}\dots D_{x_n}^{i_{n1}}[a_{i_1,m_2-(i_2-i_{21}),\dots,m_n-(i_n-i_{n1})}](-1)^{p_{21}+\dots+p_{n1}}.$$

При этом считаем, что $x_{21},\dots,x_{n1}$ в данном случае совпадают с $x_2,\dots,x_n$ соответственно.

Исследуя уравнение (6), видим, что имеет место

Теорема. *Выполнение условия*

1) $\sum\limits_{i_2=0}^{m_2}\dots\sum\limits_{i_n=0}^{m_n} A_{i_2\dots i_n}^2\neq 0$ *обеспечивает однозначное определение функции* $\varphi_{10}(x_2,\dots,x_n)$ *через* $\varphi_{1i_1}(x_2,\dots,x_n)$ $(i_1=\overline{1,m_1})$, $\varphi_{2i_2}(x_1,x_3,\dots,x_n)$ $(i_2=\overline{0,m_2-1}),\dots,$ $\varphi_{n i_n}(x_1,\dots,x_{n-1})$, $(i_n=\overline{0,m_N-1})$. *При этом функция записывается в явном виде в следующих случаях*:

2) *оба условия* $A_{0i_2\dots i_n}$, $A_{0i_2+1\dots i_n}$ *отличны от нуля при* $i_2=\overline{0,m_2-1}$, $i_3=\overline{0,m_3},\dots,$ $i_n=\overline{0,m_n};\dots$ $A_{0i_2\dots i_n}$, $A_{0i_2\dots i_n+1}$ *отличны от нуля при* $i_2=\overline{0,m_2}$, $i_3=\overline{0,m_3},\dots,$ $i_n=\overline{0,m_n-1}$;

3) $A_{0i_2\dots i_n}\neq 0$, $A_{0i_2+1\dots i_n}\neq 0$, $A_{0i_2+2\dots i_n}\neq 0$, $A_{0i_2+1\dots i_n}-x_2A_{0i_2+2\dots i_n}\equiv 0$ *при* $i_2=\overline{0,m_2-2}$, $i_3=\overline{0,m_3,\dots,}$ $i_n=\overline{0,m_n};\dots$ $A_{0i_2\dots i_n}\neq 0$, $A_{0i_2\dots i_n+1}\neq 0$, $A_{0i_2\dots i_n+2}\neq 0$, $A_{0i_2\dots i_n+1}-x_nA_{0i_2\dots i_n+2}\equiv 0$ *при* $i_2=\overline{0,m_2}$, $i_3=\overline{0,m_3},\dots,$ $i_n\overline{0,m_n-2}$;

4) *все коэффициенты, кроме одного* $A_{0i_2\dots i_n}\neq 0$, $i_2=\overline{0,m_2}$, $i_3=\overline{0,m_3},\dots,$ $i_n=\overline{0,m_n}$, *равны нулю.*

Для принадлежности ее к указанному в [3] классу следует к уже имеющимся условиям гладкости на коэффициенты (1) добавить требования $a_{j_1j_2\dots j_n}\in C^{0+(i_2+j_2)+\dots+(i_n+j_n)}(D\cup\overline{X}_1)$.

Естественно, что в этих случаях функция $\varphi_{10}(x_2\dots x_n)$ тоже записывается в явном виде.

Так как переменные $x_1,\dots,x_n$ являются независимыми, интегральные уравнения для определения неизвестных функций в задачах ГNГ…Г,…, ГГ…ГN строятся аналогично (6). На основании указанных можно рассматривать более сложные задачи, когда условия заменяются на нескольких характеристиках. Рассмотрим подробно одну из них.

Задача NNГ…Г. Найти функцию

$$u\in C^{m_1+\dots+m_n}(D)\cap C^{m_1+0+\dots+0}(D\cup\overline{X}_1)\cap C^{0+m_2+0+\dots+0}(D\cup\overline{X}_2)\cap\dots\cap C^{0+\dots 0+(m_n-1)}(D\cup\overline{X}_n),$$

являющуюся в D решением уравнения (1), удовлетворяющую условиям (4_1), (4_2) и всем соотношениям (2), кроме первого и второго при $i_1=0$, $i_2=0$.

Функции $\varphi_{10}(x_2,\dots,x_n)$, $\varphi_{20}(x_1,x_3,\dots,x_n)$ определяются из уравнения (6) и аналогичного ему. При этом в каждой из задач для нахождения неизвестной функции используются соответствующие варианты теоремы 1)–5). Упоминание любого варианта означает выполнение всех содержащихся в нем требований, тождеств, условий гладкости и т.д. Для нахождения решения требуется комбинировать на X_1, X_2 варианты с учетом различных i_1, i_2 подобно тому, как это делается в [4]. Всего их 25 (без учета вариантов в каждом пункте): 11, 12, 21, 22, …, 55 (пишем номера подряд без скобок, на первом месте указан соответствующий пункт из теоремы, на втором — из ее аналога). Каждый набор дает информацию о характере разрешимости (явной или в резольвентах) и числе входящих в решение произвольных функций и (или) констант. Если в комбинации участвует единица, то редукция к задаче Гурса осуществляется в терминах резольвент, если не участвует — в явной форме. В общем случае решение находится с точностью до одной произвольной функции $\varphi_{10}(x_{20}, x_3, \dots, x_n)$.

Рассмотрим наиболее общую из указанного класса задач.

Задача NNN…N. Найти функцию

$$u \in C^{m_1+\dots+m_n}(D) \cap C^{m_1+0+\dots+0}(D \cup \overline{X}_1) \cap C^{0+m_2+0+\dots+0}(D \cup \overline{X}_2) \cap \dots \cap C^{0+\dots 0+m_n}(D \cup \overline{X}_n),$$

являющуюся в D решением уравнения (1), удовлетворяющую условиям (4) и всем соотношениям (2) при $i_1 + i_2 + \dots + i_n = 0$.

В данном случае требуется определить функции $\varphi_{10}(x_2, \dots, x_n)$, $\varphi_{20}(x_1, x_3, \dots, x_n), \dots,$ $\varphi_{n0}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. Для этого используется уравнение (6) и соответствующие его аналоги. Как и в предыдущем случае, для анализа возможности нахождения неизвестных функций будем комбинировать условия теоремы и ее аналогов. Получаем 5^n вариантов $11\dots1$, $121\dots1$, $112\dots1, \dots, 555\dots5$. В общем случае решение находится с точностью до следующих произвольных функций: $\varphi_{10}(x_{20}, x_3, \dots, x_n)$, $\varphi_{10}(x_2, x_{30}, x_4, \dots, x_n), \dots,$ $\varphi_{10}(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n0})$,
$\varphi_{20}(x_1, x_{30}, x_4, \dots, x_n)$, $\varphi_{20}(x_1, x_3, x_{40}, x_5, \dots, x_n), \dots,$ $\varphi_{20}(x_1, x_3, \dots, x_{n-1}, x_{n0})$,
$\varphi_{30}(x_1, x_2, x_{40}, x_5, \dots, x_n)$, $\varphi_{30}(x_1, x_2, x_4, x_{50}, \dots, x_n), \dots,$ $\varphi_{30}(x_1, x_2, x_4, \dots, x_{n-1}, x_{n0})$,
$\varphi_{n-1\,0}(x_1, x_2, \dots, x_{n-2}, x_{n0})$.

Отметим, что (1) является многомерным обобщением уравнения

$$L(u) \equiv \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_{ij}(x,y) \frac{\partial^{i+j} u}{\partial x^i \partial y^j} = 0, \tag{7}$$

для которого задача Гурса была изучена в [1]. Рассмотрим для (7) задачу NГ. Поскольку здесь используются только две переменные, обозначим $m_1 = m$, $m_2 = n$. Формула (6) в данном случае упрощается и принимает вид

$$\sum_{j=0}^{n} D_y^{-j}[A_{0j}(y)\varphi_{10}(y)] = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{n} D_y^{-j}[A_{ij}(y)\varphi_{1i}(y)] -$$
$$- \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{j_1=0}^{j-1}\sum_{j_2=0}^{j_1} D_y^{-(n-j)-j_1}[C_{j-(j_1-j_2)}^{j_2} D_y^{j_2}(a_{ij}(x_0,y_0)) D_x^i D_y^{j_1-j_2}(u(x_0,y_0))](-1)^{j_2}.$$

Функция $\varphi_{10}(y)$ определяется здесь единственным образом.

Задача NN в данном случае решается с точностью до одной произвольной константы $\varphi_{10}(y_0)$.

Литература

1. Солдатов А.П., Шхануков М.Х. *Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка* // Докл. РАН. – 1987. – Т. 297. – № 3. – С. 547–552.
2. Жегалов В.И., Миронов А.Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными* // Казанск. матем. об-во. – 2001. – 226 с.
3. Уткина Е.А. *К общему случаю задачи Гурса* // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 8. – С. 57–62.
4. Уткина Е.А. *О задачах Гурса с дополнительными нормальными производными в краевых условиях* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 4. – С. 61–65.

Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет

Поступила 17.10.2005