И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2007 МАТЕМАТИКА № 4 (539)

УДК 517.968:519.642

Ю.Р. АГАЧЕВ, Р.К. ГУБАЙДУЛЛИНА

ОБ ОДНОМ МНОГОМЕРНОМ СЛАБО СИНГУЛЯРНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

Введение

Многочисленные прикладные задачи (см., напр., [1], [2] и библиографию в них) приводят к необходимости исследования многомерных интегральных уравнений с полярными ядрами. В данной работе рассматривается сингулярное интегральное уравнение (с. и. у.)

$$A\varphi \equiv a(x)\varphi(x) + \int_D \frac{h(x,y)\varphi(y)}{\rho^\alpha(x,y)}dy = f(x), \quad x \in D, \quad \alpha = \text{const}, \quad 0 \leqslant \alpha < 2, \tag{1}$$

где D — круг единичного радиуса с центром в начале координат, $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$ — его точки, $\rho(x,y) = |x-y|$ — евклидово расстояние между этими точками, $a(x) \in C(D)$, $h(x,y) \in C(D \times D)$, $f(x) \in L_2(D)$ — данные, а $\varphi(x) \in L_2(D)$ — искомая функции. Это уравнение, как правило, точно не решается, поэтому для нахождения его решения приходится использовать приближенные методы.

В работах [3]–[6] предложены и обоснованы приближенные методы решения многомерных с. и. у. с параллелепипедальной особенностью (см. также работу [7] и библиографию в ней). Однако вопрос численного решения с. и. у. со сферической особенностью, каковым является и уравнение (1), остается мало изученным. В [2] получены лишь некоторые результаты, касающиеся приближенного решения одного частного случая с. и. у. (1). В работе [8] исследуется многомерное уравнение вида (1) по произвольной открытой ограниченной области с кусочно-гладкой границей. В ней при достаточно жестких условиях на известные функции дается теоретическое обоснование методов коллокаций и механических кубатур, построенных на основе кусочно-постоянной аппроксимации, при этом предполагаются существование и единственность решения уравнения. Несмотря на проведенные исследования многомерных уравнений вида (1), многие численные методы их решения не изучены с точки зрения обоснования. Поэтому задача приближенного решения уравнения (1) с соответствующим теоретико-функциональным обоснованием по-прежнему остается актуальной.

В данной работе устанавливаются достаточные условия положительной определенности оператора A в пространстве L_2, на основе которых выводятся теоремы существования и единственности решения с. и. у. (1). Кроме того, предложены вычислительные схемы и теоретическое обоснование приближенных методов решения с. и. у. (1).

1. Теоремы существования и единственности решения

Неизвестную функцию $\varphi(x)$ будем искать в пространстве квадратично-суммируемых в круге D функций $L_2(D) = L_2$ со скалярным произведением и нормой соответственно

$$(\varphi, \psi) = \int_D \varphi(x)\psi(x)dx, \quad \varphi, \psi \in L_2,$$

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_2 = \|\varphi\|_{L_2} = \left(\int_D |\varphi(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad \varphi \in L_2.$$

Тогда с. и. у. (1) можно рассматривать как операторное уравнение

$$A\varphi \equiv a\varphi + S\varphi = f, \quad S\varphi = \int_D \frac{h(x,y)\varphi(x)}{\rho^\alpha(x,y)} dy, \quad \varphi, f \in L_2. \tag{2}$$

Пусть $C(D)$ — пространство всех непрерывных в круге D функций с нормой

$$\|\varphi\|_C = \|\varphi\|_{C(D)} = \max_{x\in D} |\varphi(x)|, \quad \varphi \in C(D).$$

Для с. и. у. (1) справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

1) *функция $a(x) \in C(D)$ не обращается в нуль ни в одной точке области D, и для нее справедливо неравенство*

$$\min_{x\in D} |a(x)| \geqslant m = \mathrm{const} > 0, \tag{3}$$

2) *симметричная функция*

$$g(x,y) = \frac{h(x,y) + h(y,x)}{\rho^\alpha(x,y)}$$

разлагается в симметричный ряд

$$g(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x)\beta_k(y), \quad x, y \in D,$$

сходящийся в пространстве $L_2(D^2)$, где $\{\beta_k(s)\}_{k=1}^\infty = \{\beta_k(s_1,s_2)\}_{k=1}^\infty$ — линейно независимая система функций из $L_2(D)$. Тогда с. и. у. (1) имеет единственное решение $\varphi^*(x) \in L_2(D)$ при любой правой части $f(x) \in L_2(D)$ и

$$\|\varphi^*\|_{L_2(D)} \leqslant \frac{1}{m} \|f\|_{L_2(D)}. \tag{4}$$

Следствие. Пусть выполнены условия

1) для функции $a(x) \in C(D)$ справедливо неравенство (3),

2) $h(x,y) = -h(y,x) \in C(D^2)$.

Тогда справедливо утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 1. В дальнейшем без ограничения общности можно считать, что $a(x) > 0$ (случай $a(x) < 0$ рассматривается аналогично).

Так как функция $h(x,y)$ непрерывна, то в силу ([1], гл. 7, § 3) оператор S является вполне непрерывным в пространстве $L_2(D)$ и согласно теореме 7.3.1 [1] для него выполняется неравенство

$$\|S\|_{L_2\to L_2} \leqslant \frac{2^{3-\alpha}}{2-\alpha}\pi h_0 = M_0, \quad h_0 = \max_{x,y\in D} |h(x,y)|. \tag{5}$$

Более того, компактным в пространстве $L_2(D)$ будет и оператор $\widetilde{S}$

$$\widetilde{S}\varphi = \int_D \frac{h(x,y)}{a(x)\rho^\alpha(x,y)} \varphi(y) dy, \quad \|\widetilde{S}\|_{L_2\to L_2} \leqslant \frac{2^{3-\alpha}}{2-\alpha}\pi h_1 = M_1, \quad h_1 = \max_{x,y\in D} \left|\frac{h(x,y)}{a(x)}\right|. \tag{6}$$

Таким образом, в силу условия 1) теоремы и неравенства (5) оператор $A : L_2 \to L_2$ ограничен

$$\|A\|_{L_2\to L_2} = \sup_{\substack{\varphi\in L_2\\ \|\varphi\|_2\leqslant 1}} \|A\varphi\|_{L_2} \leqslant \|a\|_C + M_0 \equiv M < \infty. \tag{7}$$

Учитывая (2) и условие 1) теоремы, для любого $\varphi \in L_2$ имеем

$$(A\varphi,\varphi) = (a\varphi,\varphi) + (S\varphi,\varphi) \geqslant m(\varphi,\varphi) + (S\varphi,\varphi). \tag{8}$$

Для оценки второго слагаемого в (8) ядро $h(x,y)$ представим в виде

$$h(x,y) = h^+(x,y) + h^-(x,y), \quad h^{\pm}(x,y) = \frac{h(x,y) \pm h(y,x)}{2}. \tag{9}$$

Тогда интегральный оператор из (2) принимает вид

$$S\varphi = \int_D \frac{h(x,y)\varphi(x)}{\rho^\alpha(x,y)}dy = \int_D \frac{h^+(x,y)\varphi(x)}{\rho^\alpha(x,y)}dy + \int_D \frac{h^-(x,y)\varphi(x)}{\rho^\alpha(x,y)}dy \equiv S^+\varphi + S^-\varphi.$$

Рассмотрим скалярное произведение

$$(S\varphi,\varphi) = (S^-\varphi,\varphi) + (S^+\varphi,\varphi). \tag{10}$$

Учитывая кососимметричность функции $h^-(x,y)$ и тот факт, что функция $\rho^\alpha(x,y)$ является симметричной при любом значении α, последовательно находим

$$(S^-\varphi,\varphi) = \int_D \varphi(x)dx \int_D \frac{h^-(x,y)\varphi(y)}{\rho^\alpha(x,y)}dy = \int_D \varphi(y)dy \int_D \frac{-h^-(y,x)\varphi(x)}{\rho^\alpha(x,y)}dx =$$
$$= -\int_D \varphi(y)dy \int_D \frac{h^-(y,x)\varphi(x)}{\rho^\alpha(x,y)}dx = -(\varphi, S^-\varphi) = -(S^-\varphi,\varphi) = 0, \quad \varphi \in L_2.$$

Покажем, что второе слагаемое в (10) неотрицательно. Имеем

$$(S^+\varphi,\varphi) = \int_D \varphi(x)dx \int_D 2g(x,y)\varphi(y)dy = 2\int_D \varphi(x)dx \int_D \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k(x)\beta_k(y)\varphi(y)dy =$$
$$= 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_D \varphi(y)\beta_k(y)dy\right)^2 \geqslant 0.$$

Отсюда следует положительная определенность оператора A

$$(A\varphi,\varphi) = (a\varphi,\varphi) + (S^+\varphi,\varphi) + (S^-\varphi,\varphi) \geqslant (a\varphi,\varphi) \geqslant m\|\varphi\|^2_{L_2}, \quad \varphi \in L_2(D).$$

Следовательно, выполняется неравенство

$$\|A\varphi\|_{L_2} \geqslant m\|\varphi\|_{L_2}, \quad \varphi \in L_2.$$

Тогда ([9], гл. 5, § 4) оператор $A : L_2 \to L_2$ имеет левый непрерывный обратный A_l^{-1} и

$$\|A_l^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m} < \infty. \tag{11}$$

Следует отметить, что уравнение (1) является приводящимся к уравнению второго рода. Поскольку оператор $\widetilde{S}$ компактен в L_2, то в силу известного результата [9] уравнение (2) (а следовательно, и эквивалентное ему с. и. у. (1)) разрешимо при любом свободном члене $f \in L_2(D)$. Решение этого уравнения единственно и находится по формуле

$$\varphi^* = A_l^{-1}f = A_r^{-1}f = A^{-1}f, \tag{12}$$

где A_r^{-1} и A^{-1} — правый и соответственно двусторонний обратные операторы. Поэтому из формул (11) и (12) следует требуемое утверждение теоремы, в том числе и неравенство (4). □

В условиях следствия ядро $h^+(x,y) = 0$, поэтому утверждение следствия сразу получается из теоремы 1.

Замечание. Утверждение, аналогичное теореме 1, справедливо и в случае, когда $a(x) \equiv 1$, а ядро $h(x,y)$ является разрывной функцией, например, когда

$$h(x,y) \equiv h(y) = \frac{1}{\sqrt{1-|y|^2}}, \quad |y|^2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия*
1) *для функции* $a(x) \in C(D)$ *справедливо неравенство* (3),
2) *функция* $h(x,y)$ *такова, что для любых* $\{c_k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}$ *выполняется неравенство*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} G_{jk}c_jc_k \geqslant 0, \quad G_{jk} = \int_D \omega_j(x)dx \int_D \frac{h(x,y)+h(y,x)}{\rho^\alpha(x,y)}\omega_k(y)dy,$$

где $\{\omega_r(x)\}_{r=1}^{\infty} = \{\omega_r(x_1,x_2)\}_{r=1}^{\infty}$ – *полная система функций из* $L_2(D)$.

Тогда существует обратный оператор $A^{-1} : L_2 \to L_2$ *и*

$$\|A^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m} < \infty.$$

Доказательство. Достаточно показать, что оператор A положительно определен, и затем воспользоваться доказательством теоремы 1 данной работы.

Так как система $\{\omega_r(x)\}_{r=1}^{\infty}$ полна в пространстве $L_2(D)$, то можно без ограничения общности считать ее ортонормированной. Тогда любую функцию $\varphi \in L_2(D)$ можно представить в виде сходящегося ряда

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(\varphi,\omega_j)\omega_j(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\omega_j(x), \quad c_j = \int_D \varphi(x)\omega_j(x)dx.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, представим ядро $h(x,y)$ в виде (9) и рассмотрим скалярное произведение (10). Первое слагаемое в сумме (10) равно нулю в силу кососимметричности ядра. Для второго слагаемого, учитывая условие 2) доказываемой теоремы, имеем

$$(S^+\varphi,\varphi) = \int_D \varphi(x)dx \int_D \frac{h(x,y)+h(y,x)}{2\rho^\alpha(x,y)}\varphi(y)dy = \int_D \sum_{j=1}^{\infty} c_j\omega_j(x)dx \int_D g(x,y)\sum_{k=1}^{\infty} c_k\omega_k(y)dy,$$

$$g(x,y) = \frac{h^+(x,y)}{\rho^\alpha(x,y)} = \frac{h(x,y)+h(y,x)}{\rho^\alpha(x,y)}.$$

Отсюда следует положительность оператора S^+:

$$(S^+\varphi,\varphi) = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_jc_k \int_D \omega_j(x)dx \int_D g(x,y)\omega_k(y)dy = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} G_{jk}c_jc_k \geqslant 0.$$

Следовательно, в силу равенств (2) и (10) оператор A положительно определен. □

2. Итерационные методы

Для с. и. у. (1) справедлива

Теорема 3. *В условиях любой из теорем 1 и 2 единственное решение* $\varphi^* \in L_2$ *уравнения* (1) *при любой функции* $f \in L_2$ *можно найти как предел в* L_2 *итерационной последовательности*

$$\varphi^k = \varphi^{k-1} + \frac{m}{M^2}(f - A\varphi^{k-1}), \quad k = 1,2,\dots, \tag{13}$$

с любым начальным приближением $\varphi^0 \in L_2$. *При этом погрешность* k*-го приближения может быть оценена неравенствами*

$$\|\varphi^* - \varphi^k\| \leqslant \lambda^k\|\varphi^* - \varphi^0\| \leqslant \frac{\lambda^k}{1-\lambda}\|\varphi^1 - \varphi^0\|, \quad k = 0,1,\dots, \tag{14}$$

где

$$\lambda = \sqrt{1 - \frac{m^2}{M^2}} < 1; \tag{15}$$

если же за начальное приближение принять $\varphi^0 = (m/M^2)\, f$, *то*

$$\|\varphi^* - \varphi^k\| \leqslant \frac{\lambda^{k+1}}{1-\lambda}\, \frac{m}{M^2}\|f\|, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{16}$$

где m *и* M *определены в* (3) *и* (7) *соответственно.*

Доказательство. Уравнение (2) запишем в эквивалентном виде

$$\varphi = B\varphi + \tau f, \quad \tau > 0,$$

где $B = B(\tau) = E - \tau A : L_2 \to L_2$ есть так называемый оператор перехода. Нетрудно показать, что при $\tau = \tau_0 = m/M^2$ оператор $B(\tau_0)$ — сжимающее отображение с коэффициентом сжатия (15). Тогда в силу принципа сжимающих отображений (напр., [9]) уравнение

$$\varphi = B(\tau_0)\varphi + \tau_0 f, \tag{$2'$}$$

а также эквивалентное ему уравнение (2), однозначно разрешимы при любой правой части.

Поскольку $\|B\| \leqslant \lambda < 1$, то по малой теореме Банаха существует обратный оператор $\left(E - B(\tau_0)\right)^{-1}$, причем

$$\|(E - B(\tau_0))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\lambda}.$$

Тогда имеем

$$\|\varphi^*\| = \|(E - B(\tau_0))^{-1}\tau_0 f\| \leqslant \frac{m}{M^2}\, \frac{1}{1-\lambda}\|f\|,$$

т. е. решение уравнения ($2'$) устойчиво относительно малых изменений начальных данных.

Запишем метод простой итерации для уравнения ($2'$)

$$\varphi^k = B\varphi^{k-1} + \tau_0 f = \varphi^{k-1} + \frac{m}{M^2}(f - A\varphi^{k-1}) \ \ \forall \varphi^0 \in L_2(D), \quad k = 1, 2, \dots$$

Очевидно, универсальный итерационный метод (13) для исходного уравнения (2) совпадает с методом простой итерации для вспомогательного уравнения ($2'$), эквивалентного исходному уравнению (2). Тогда неравенства (14) следуют из известных результатов для метода последовательных приближений (напр., [9]). Неравенство (16) получается из (14), если учесть, что

$$\|\varphi^1 - \varphi^0\| = \|B\varphi^0\| \leqslant \lambda\|\varphi^0\| = \lambda\tau_0\|f\| = \lambda\frac{m}{M^2}\|f\|. \quad \square$$

Поскольку $a(x) \neq 0$ в условиях любой из теорем 1 и 2 и оператор $\widetilde{S}$, определенный в (6), является вполне непрерывным, то итерационный метод решения уравнения $\varphi + \widetilde{S}\varphi = f/a$ может быть немного уточнен, а именно, справедлива

Теорема 3*. *В условиях любой из теорем* 1 *и* 2 *единственное решение* $\varphi^* \in L_2$ *уравнения* (1) *при любой функции* $f \in L_2$ *можно найти как предел в* L_2 *итерационной последовательности*

$$\varphi^k = -\widetilde{S}\varphi^{k-1} + \frac{f}{a} \ \ \forall \varphi^0 \in L_2(D), \quad k = 1, 2, \dots$$

При этом погрешность k*-го приближения может быть оценена следующим неравенством:*

$$\|\varphi^* - \varphi^k\|_{L_2} \leqslant \|\widetilde{S}\|_{L_2 \to L_2}\, \|\varphi^* - \varphi^0\|_{L_2} \leqslant M_1\|\varphi^* - \varphi^0\|_{L_2},$$

где постоянная M_1 *определена в* (6).

3. Общий проекционный метод

В силу сепарабельности пространства L_2 в нем всегда существует линейно независимая полная ортонормальная система функций

$$\{\psi_k(x)\}_1^\infty, \quad \psi_k \in L_2(D), \quad D \subset \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Обозначим через X_n линейную оболочку, натянутую на первые $n \in \mathbb{N}$ элементов системы (17). Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде суммы

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^n \gamma_k \psi_k(x), \quad \varphi_n \in X_n, \quad x \in D, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Неизвестные коэффициенты γ_k находятся из условия ортогональности невязки, что приводит к соотношениям

$$(A\varphi_n - f, \psi_l) = 0, \quad l = \overline{1,n}. \tag{19}$$

Очевидно, система уравнений (19) эквивалентна, с одной стороны, системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) порядка n относительно неизвестных γ_k

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k c_l(A\psi_k) = c_l(f), \quad l = \overline{1,n}, \tag{20}$$

где $c_p(y)$ — коэффициенты Фурье функции $y \in L_2$ по системе координатных функций (17). С другой стороны, условие (19) эквивалентно операторному уравнению

$$A_n\varphi_n \equiv P_n A\varphi_n = P_n f \quad (\varphi_n, P_n f \in X_n), \tag{21}$$

где $P_n : L_2 \to X_n \subset L_2$ — линейный оператор ортогонального проектирования, определяемый по формуле

$$P_n(f; x) = \sum_{k=1}^n c_k(f)\psi_k(x), \quad f \in L_2.$$

Тогда

$$P_n^2 = P_n, \quad P_n^* = P_n, \quad \|P_n\|_{L_2} = 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Для вычислительной схемы (1), (18)–(21) справедлива

Теорема 4. *В условиях любой из теорем* 1 *и* 2 *СЛАУ* (20) *однозначно разрешима при любом значении* $n \in \mathbb{N}$ *и приближенные решения* (18) *сходятся в* L_2 *к точному решению уравнения* (1). *При этом погрешность приближенной формулы* $\varphi^*(x) \approx \varphi_n(x)$ *при любом* $n \in \mathbb{N}$ *может быть оценена с помощью формул*

$$E_n(\varphi^*) \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\| \leqslant \frac{M}{m} E_n(\varphi^*), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{23}$$

$$E_n(\varphi^*) \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\| \leqslant (1+\varepsilon_n) E_n(\varphi^*), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{24}$$

где $E_n(\varphi^*)$ — *наилучшее приближение в* L_2 *функции* $\varphi^* \in L_2$ *всевозможными элементами из* X_n, *постоянные* m *и* M *определяются из условий* (3) *и* (7) *соответственно, а* $0 < \varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Получим утверждения этой теоремы в условиях теоремы 1. Для любого $\varphi_n \in X_n$ последовательно находим

$$(A_n\varphi_n, \varphi_n) = (P_n A\varphi_n, \varphi_n) = (A\varphi_n, P_n^*\varphi_n) = (A\varphi_n, P_n\varphi_n) = (A\varphi_n, \varphi_n) \geqslant m\|\varphi_n\|^2.$$

Поэтому

$$\|A_n\varphi_n\| \geqslant m\|\varphi_n\|, \quad \varphi_n \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Это условие, как известно (напр., [10]), является в силу конечномерности подпространств X_n необходимым и достаточным условием существования ограниченного двустороннего обратного оператора $A_n^{-1} : X_n \to X_n$

$$\|A_n^{-1}\| \leqslant \frac{1}{m} < \infty, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Поэтому уравнение (21), а следовательно, и СЛАУ (20) однозначно разрешимы при любом $n \in \mathbb{N}$. Оценим погрешность $\varphi^* - \varphi_n = A^{-1}f - A_n^{-1}P_n f$ приближенного решения в пространстве L_2. С учетом (25) и $\varphi_n \in X_n$ из леммы 2.2 ([4], гл. 1) находим

$$E_n(\varphi^*) \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\| = \|\left(E - A_n^{-1}P_nA\right)(\varphi^* - P_n\varphi^*)\| \leqslant \|E - A_n^{-1}P_nA\|\,\|\varphi^* - P_n\varphi^*\|. \tag{26}$$

Тогда, учитывая последнее из равенств (22) и неравенство (25), из (26) получим

$$E_n(\varphi^*) \leqslant \|\varphi^* - \varphi_n\| \leqslant \|A_n^{-1}P_nA\|\,\|\varphi^* - P_n\varphi^*\| \leqslant \frac{M}{m}E_n(\varphi^*).$$

Оценка (24) может быть доказана следующим образом. В силу условия (3) и компактности оператора $\widetilde{S}$, определенного в (6), к полученному уравнению можно применить теорему 1 из [11], а именно воспользоваться оценкой

$$\|\varphi^* - \varphi_n\| \leqslant (1 + \varepsilon_n)\|\varphi^* - P_n\varphi^*\|,$$

где ε_n определяется в явном виде, причем $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, откуда непосредственно следует оценка (24).

Так как $E_n(y) \to 0$ при $n \to \infty$ для любого элемента $y \in L_2$, то из (23),(24) следует требуемое утверждение в условиях теоремы 1. В условиях теоремы 2 аналогичные рассуждения снова приводят к требуемому результату. □

Литература

1. Михлин С.Г. *Курс математической физики.* – М.: Наука, 1968. – 575 с.
2. Хай М.В. *Двумерные интегральные уравнения типа ньютоновского потенциала и их приложения.* – Киев: Наук. думка, 1993. – 253 с.
3. Габдулхаев Б.Г. *Многомерные сингулярные интегральные уравнения с положительными операторами* // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29. – № 9. – С. 1504–1516.
4. Габдулхаев Б.Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.
5. Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент.* – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 519 с.
6. Лифанов И.К., Тыртышников Е.Е. *Теплицевы матрицы и интегральные уравнения* // Вычисл. процессы и системы. – 1990. – Вып. 7. – С. 94–278.
7. Габдулхаев Б.Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1980. – Т. 18. – С. 251–307.
8. Вайникко Г.М. *Кусочно-постоянная аппроксимация решения многомерных слабо сингулярных интегральных уравнений* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1991. – Т. 31. – № 6. – С. 832–849.
9. Канторович Л.В. Акилов Г.П. *Функциональный анализ в нормированных пространствах.* – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.
10. Габдулхаев Б.Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.
11. Польский Н.И. *О сходимости некоторых приближенных методов анализа* // Укр. матем. журн. – 1955. – Т. 7. – № 1. – С. 56–70.

Казанский государственный университет

Поступила 01.10.2005