ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 517.929

М.И. ДОДКИН

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. *Формулировка задачи.* Установим асимптотическое поведение решения $x(t)$ дифференциально-разностного уравнения

$$\dot{x}(t) = a(t)x(t-\omega), \quad t \in R_+; \quad x(\xi) = 0, \quad \xi < 0,$$

где $\omega > 0$, функция $a : R_+ \to C$ обладает свойством $a(t+\omega) = Ma(t)$, причем $M \in C$. Здесь и далее C обозначает комплексную плоскость, а R_+ — положительную полуось.

2. *Общий подход.* Как известно [1], [2], на каждом конечном отрезке $[0, b]$ задача Коши для рассматриваемого уравнения имеет в пространстве абсолютно непрерывных функций единственное решение, представимое в виде $x(t) = X(t)x(0)$, где $X(t)$ — решение задачи

$$\dot{X}(t) = a(t)X(t-\omega), \quad t \in R_+; \quad X(\xi) = 0, \quad \xi < 0;$$
$$X(0) = 1.$$

Таким образом, исследование асимптотического поведения $x(t)$ свелось к исследованию асимптотики $X(t)$. В частности, представляют интерес следующие варианты поведения $X(t)$:

(а) $X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$,
(б) $X(t)$ *ограничено*,
(в) $X(t)$ *неограничено.*

Важную роль в дальнейшем исследовании играют следующие два утверждения, доказываемые по индукции.

Утверждение 1.

$$X((n+1)\omega) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^k M^{\frac{k(k+1)}{2}}(1-M^{n-k+1})^k \quad \forall n \in N_0. \tag{1}$$

Утверждение 2.

$$X(n\omega+\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} T^k M^{nk-\frac{k(k+1)}{2}} X((n-k)\omega) \quad \forall n \in N_0, \quad \forall \tau \in [0;\omega]. \tag{2}$$

Здесь и далее $T = \int\limits_0^\tau a(\xi)d\xi$, $A = \int\limits_0^\omega a(\xi)d\xi$, $X_n(\tau) = X(n\omega+\tau)$.

3. *Случай* $|M| < 1$. В этом случае, как будет сейчас показано, фундаментальное решение $X(t)$ асимптотически стремится к некоторой константе.

Теорема 1. *Если* $|M| < 1$, *то существует* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^k M^{\frac{k(k+1)}{2}}$.

Доказательство. Докажем возможность предельного перехода в формуле (1). Обозначим $B=\frac{1+|M|}{1-|M|}$. Тогда $\left|A^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}\left(\frac{1-M^{n-k+1}}{1-M}\right)^k\right|\le|AB|^k$, $\left|\left(\frac{A}{1-M}\right)^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}\right|\le|AB|^k$. Так как $\forall\varepsilon>0$ $\exists N:\sum\limits_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|AB|^k\le\frac{\varepsilon}{4}$ и при достаточно больших n благодаря условию $|M|<1$ имеет место оценка

$$A_{nN}\equiv\left|\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}-\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!}A^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}\left(\frac{1-M^{n-k+1}}{1-M}\right)^k\right|\le\frac{\varepsilon}{2},$$

то

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}A^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}\left(\frac{1-M^{n-k+1}}{1-M}\right)^k\right|\le A_{nN}+2\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{k!}|AB|^k\le\frac{\varepsilon}{2}+2\frac{\varepsilon}{4}=\varepsilon.$$

Таким образом,

$$X((n+1)\omega)\xrightarrow[n\to\infty]{}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^kM^{\frac{k(k+1)}{2}},$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}T^kM^{nk-\frac{k(k-1)}{2}}X((n-k)\omega)\right|\le e^{|AB|}|M|^{n/2}(e^{|TM^{1/2}|}-1)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Отсюда и из формулы (2) получим утверждение теоремы. $\square$

Наличие предела у $X(t)$ означает для решения $x(t)$ устойчивость по Ляпунову [3]. Представляет интерес вопрос о том, когда равна нулю сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{A}{1-M}\right)^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}$, т.к. в этом случае решение задачи асимптотически устойчиво. Рассмотрим голоморфную в C функцию $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}$, где $z=\frac{A}{1-M}$. После представления $f(z)=1+g_0(z)$, где $g_0(z)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}z^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}$, оценим $|g_0(z)|\le\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}|zM|^k=e^{|zM|}-1$. При $|zM|\le\ln 2$ получим $|g_0(z)|<1$ и $|f(z)|\ge1-|g_0(z)|>0$, т.е. уравнение $f(z)=0$ неразрешимо.

Таким образом, доказанной является

Теорема 2. *Для всех комплексных A и M таких, что $|M|<1$ и $\left|\frac{AM}{1-M}\right|<\ln 2$, справедливо соотношение $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)\neq0$.*

В представлении $f(z)=P_1(z)+g_1(z)$, где $P_1(z)=1+Mz$, $g_1(z)=\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}z^kM^{\frac{k(k+1)}{2}}$, оценим

$$|P_1(z)|\ge\big|1-|zM|\big|,\quad |g_1(z)|\le\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}|zM^{3/2}|^k=e^{|zM^{3/2}|}-1-|zM^{3/2}|.$$

Теорема 3. *Для любого комплексного M с условием $|M|<\frac{1}{(e-1)^2}$, найдется такое комплексное A, что $\lim\limits_{t\to\infty}X(t)=0$.*

Доказательство. На окружности $|z|=R>\frac{1}{|M|}$ неравенство $\big|1-|zM|\big|>e^{|zM^{3/2}|}-1-|zM^{3/2}|$ запишется в виде $|zM^{3/2}|(1+|M|^{-1/2})>e^{|zM^{3/2}|}$. Минимум функции $y(x)=e^x-x(1+1/\sqrt{|M|})$ меньше нуля, если $x_{\min}=\ln(1+1/\sqrt{|M|})>1$, т.е. если $|M|<\frac{1}{(e-1)^2}$. Так как используется окружность $|z|=\left|\frac{A}{1-M}\right|>\frac{1}{|M|}$, то найдутся такие значения A, что $|zM^{3/2}|=\ln(1+1/\sqrt{|M|})>1$, т.е. на окружности $|z|=|M|^{-3/2}\ln(1+1/\sqrt{|M|})>\frac{1}{|M|}$ имеем $|zM|^{3/2}(1+|M|^{-1/2})>e^{|zM^{3/2}|}$, а значит, на ней $|P_1(z)|>|g_1(z)|$. Следовательно, по теореме Руше [4] она ограничивает круг, содержащий нуль функции $f(z)$. $\square$

4. *Случай* $|M| = 1$. На окружности $|M| = 1$ точка $M = 1$ является в некотором смысле особой, т. к. делает возможными все три поведения $X(t)$: (а), (б) и (в).

Для этого случая известна

Теорема ([5], [6]). *Имеют место следующие утверждения:*

1. $A \in D \Rightarrow X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$;
2. $A \in \partial D \Rightarrow X(t)$ *ограничена на* R_+, *но предела не имеет;*
3. $A \notin D \cup \partial D \Rightarrow X(t)$ *не ограничена на* R_+,

где D — *овал в комплексной плоскости (овал Рехлицкого), граница* ∂D *которого в полярных координатах* (ρ, φ) *задается как*

$$\rho(\varphi) = \begin{cases} \varphi - \frac{\pi}{2}, & \varphi \in [\frac{\pi}{2}, \pi]; \\ -\varphi - \frac{\pi}{2}, & \varphi \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]. \end{cases}$$

В остальных точках окружности $|M| = 1$ можно было бы ожидать, что при надлежащем выборе A возможна неограниченность фундаментального решения $X(t)$. Однако это не так, потому что имеет место

Теорема 4. *Если* $|M| = 1$ *и* $M \neq 1$, *то* $X(t)$ *ограничена на* R_+.

Доказательство. Введем обозначение $\widetilde{A} \equiv \int\limits_0^\omega |a(\xi)| d\xi$. Воспользовавшись формулами (1), (2), получаем оценки

$$|X((n+1)\omega)| \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |A|^k \left|\frac{2}{1-M}\right|^k \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left|\frac{2\widetilde{A}}{1-M}\right|^k = e^{\frac{2\tilde{A}}{|1-M|}},$$

$$|X(n\omega + \tau)| \leq e^{\frac{2\tilde{A}}{|1-M|}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widetilde{A}^k e^{\frac{2\tilde{A}}{|1-M|}} = e^{\frac{2\tilde{A}}{|1-M|}} e^{\tilde{A}} = e^{\tilde{A}(\frac{2}{|1-M|}+1)}.$$

Таким образом, $|X(t)| \leq e^{\tilde{A}(\frac{2}{|1-M|}+1)} = \text{const}$. $\square$

Теорему 4 можно дополнить исследованием вопроса о стремлении фундаментального решения $X(t)$ к нулю.

Теорема 5. *Пусть* $|M| = 1$, $M \neq 1$ *и* $|\frac{2A}{1-M}| < \ln 2$. *Тогда если* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)$ *существует, то он отличен от нуля.*

Доказательство. Проведем нетрудные выкладки

$$X((n+1)\omega) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{A}{1-M}\right)^k M^{\frac{k(k+1)}{2}} (1 - M^{n-k+1})^k,$$

а теперь оценим

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{A}{1-M}\right)^k M^{\frac{k(k+1)}{2}} (1 - M^{n-k+1})^k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \left|\frac{2A}{1-M}\right|^k \leq e^{|\frac{2A}{1-M}|} - 1 < 1,$$

т. к. $|\frac{2A}{1-M}| < \ln 2$. $\square$

Теорема 6. *Пусть* $M \neq 1$ *и существует такое натуральное* n, *что* $M^{n+1} = 1$. *Тогда*

1) *если* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t)$ *существует, то он равен нулю;*

2) $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + \sum\limits_{q=1}^{n} M^{-\frac{q(q+1)}{2}} z_m^q e^{A z_m \frac{1-M^q}{M^q(1-M)}} = 0 \;\; \forall m = 1, \ldots, n+1,$

где $\{z_m\}_{m=1}^{n+1}$ — *множество корней уравнения* $z^{n+1} M^{\frac{n(n+1)}{2}} = 1$.

Доказательство. Функция $F(\tau,z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} M^{-\frac{k(k+1)}{2}} X_k(\tau) z^k$ представима в виде $F(\tau,z) = K(z) e^{z\int_0^\tau a(\xi)d\xi}$, где $K(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} M^{-\frac{k(k+1)}{2}} z^k e^{Az\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}}$ является решением уравнения $K(Mz) = 1 + ze^{Az}K(z)$. Методом математической индукции несложно доказать, что решение этого уравнения удовлетворяет всем уравнениям

$$K(M^{l+1}z) = 1 + \sum_{k=1}^{l} (M^{k(l+1)-\frac{k(k+1)}{2}} z^k e^{Az\frac{M^{l+1}(\frac{1}{M^k}-1)}{1-M}}) + M^{\frac{l(l+1)}{2}} z^{l+1} e^{Az\frac{M^{l+1}-1}{M-1}} K(z) \ \ \forall l \in N.$$

Запишем уравнение, соответствующее $l = n$,

$$K(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} M^{-\frac{k(k+1)}{2}} e^{Az\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}} z^k + z^{n+1} M^{\frac{n(n+1)}{2}} K(z).$$

Тогда имеем

$$F(\tau,z) = \frac{e^{z\int_0^\tau a(\xi)d\xi} \left(1 + \sum\limits_{k=1}^{n} M^{-\frac{k(k+1)}{2}} e^{Az\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}} z^k\right)}{1 - z^{n+1} M^{\frac{n(n+1)}{2}}} \equiv \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}.$$

Если γ_r и γ_R — произвольные окружности $|z|{=}r < 1$ и $|z|{=}R > 1$ соответственно, то, поскольку $z_m^{n+1} M^{\frac{n(n+1)}{2}} = 1$,

$$M^{-\frac{k(k+1)}{2}} X_k(\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} dz = -\sum_{m=1}^{n+1} \operatorname*{res}_{z_m} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} dz =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} \frac{\varphi(z_m)}{z_m^k} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} dz \ \ \forall k \in N_0, \quad (3)$$

$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} dz\right| \le \frac{\mathrm{const}}{R^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ равномерно по $\tau \in [0,\omega]$.

1) Допустим, что $\exists \lim\limits_{t\to\infty} X(t) \ne 0$. Рассмотрим $\{X_k(\tau)\}_{k=2p(n+1),\ p\in N_0}$. По формуле (3) имеем

$$X_k(\tau) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\varphi(z_m) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} dz \xrightarrow[k\to\infty]{} \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\varphi(z_m) \ne 0.$$

В силу определения предела величина $\sum\limits_{m=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\varphi(z_m)$ не зависит от способа стремления $t \to \infty$, а значит, не может быть функцией $\tau \in [0,\omega]$. Поэтому

$$\sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{n+1}\varphi(z_m) = \sum_{m=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} e^{z_m\int_0^\tau a(\xi)d\xi} \left(1 + \sum_{q=1}^{n} M^{-\frac{q(q+1)}{2}} z_m^q e^{Az_m\frac{1-M^q}{M^q(1-M)}}\right) \equiv \mathrm{const} \ne 0.$$

В силу линейной независимости функций $e^{z_m\int_0^\tau a(\xi)d\xi}$, $m = 0,\dots,n+1$, должно быть $\mathrm{const} = 0$. Полученное противоречие доказывает 1).

2) Допустим, что $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$. Повторяя все проведенные выше рассуждения о линейной независимости функций, приходим к требованию о равенстве нулю всех коэффициентов при них. Необходимость доказана. Достаточность доказывается просто, т. к. в этом случае $\varphi(z_m) = 0$ $\forall m = 1,\dots,n+1$ и по формуле (3) получаем

$$|X_k(\tau)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{\varphi(z)}{z^{k+1}\psi(z)} dz\right| \le \frac{\mathrm{const}}{R^k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \ \text{ равномерно по } \tau,$$

т. е. $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = 0$. Последнее не только завершает доказательство, но и дает оценку скорости сходимости. □

Следствие. Пусть выполнены условия теорем 5 и 6. Тогда $X(t)$ не имеет предела на бесконечности.

5. *Случай* $|M| > 1$. В этом частном случае утверждение о неограниченности фундаментального решения $X(t)$ при положительных значениях M и A является тривиальным. В общем же случае его доказательство сопряжено со значительными трудностями, т. к. требует оценки $|X(t)|$ снизу, а не сверху, как это обычно бывает при доказательстве ограниченности. Тем ценнее

Теорема 7. *Если* $\frac{|M|+1/|M|}{|1-M|} < 1$ *и* $A \neq 0$, *то* $X(t)$ *неограничено.*

Доказательство. С помощью формулы (1) получим представление

$$X_n(0) = \frac{M^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n-1)!}\left(\frac{A}{M}\right)^n \left(\frac{1}{A} + M^n \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{A^k M^{\frac{k(k+1)}{2}}}\left(\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}\right)^{n-k}\right),$$

$$\left|\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}\right| \leq \frac{1+\frac{1}{|M|^k}}{|1-M|} \leq \frac{1+\frac{1}{|M|^2}}{|1-M|} \equiv q,$$

где по условию теоремы $q < 1$,

$$\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{A^k M^{\frac{k(k+1)}{2}}}\left(\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}\right)^{n-k}\right| \leq \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{|A|^k |M|^{\frac{k(k+1)}{2}}} q^{n-k} \equiv \sum_{k=2}^{n} a_{nk} \equiv \Sigma_n.$$

Выберем $\alpha > 1$ так, чтобы выполнялось $\alpha q|M| < 1$. Легко убедиться в том, что $a_{n+1\,k} = a_{nk}\frac{n}{n-k+1}q$, причем при достаточно больших n для некоторых k выполнено условие $\frac{n}{n-k+1} \leq \alpha$, откуда $k \leq n(1-\frac{1}{\alpha})+1$, т. е. для чисел k существует максимальное значение $k_{\max}$, которое линейно возрастает с ростом n. Аналогично получаем $a_{n+1\,k+1} = a_{nk}\frac{n}{|A|\,|M|^{k+1}}$, причем при достаточно больших n для некоторых k выполнено условие $\frac{n}{|A|\,|M|^{k+1}} \leq \alpha q$, откуда $k \geq \frac{\ln\frac{n}{|A|\alpha q}}{\ln|M|} - 1$. Значит, для чисел k существует минимальное значение $k_{\min}$, которое линейно зависит от $\ln n$. Полученное неравенство показывает, что $k_{\min}$ тоже растет, но гораздо медленнее, чем $k_{\max}$. Поэтому при достаточно больших n имеет место неравенство $k_{\min} < k_{\max}$. Выберем индекс $p : k_{\min} < p < k_{\max}$. Тогда

$$\Sigma_n = \sum_{k=2}^{p} a_{nk} + \sum_{k=p+1}^{n} a_{nk}, \quad \Sigma_{n+1} \leq \sum_{k=2}^{p} a_{nk}\alpha q + \sum_{k=p}^{n} a_{nk}\alpha q = \Sigma_n \alpha q + a_{np}\alpha q.$$

При больших значениях n будем выбирать p следующим образом: $p(n+1) \in \{p(n),\, p(n)+1\}$ с сохранением условия $k_{\min} < p < k_{\max}$, а т. к. $a_{n+1\,p} \leq \alpha q a_{np}$ и $a_{n+1\,p+1} \leq \alpha q a_{np}$, то $a_{np} \leq a_0(\alpha q)^n$ при всех достаточно больших n.

Таким образом, $\Sigma_{n+1} \leq \Sigma_n \alpha q + a_0(\alpha q)^{n+1}$ $\forall n > n_0 \in N$.

Нетрудно проверить, что решением вспомогательной задачи $x_{n+1} = x_n b + ab^{n+1}$, $x_0, a, b \in R_+$, является $x_n = b^n(x_0 + na)$. Если взять $x_0 = \Sigma_{n_0}$, $b = \alpha q$, $a = a_0(\alpha q)^{n_0}$, то получим $x_m = (\alpha q)^m(\Sigma_{n_0} + ma_0(\alpha q)^{n_0}) \geq \Sigma_{n_0+m}$ $\forall m \in N_0$. При $n = n_0 + m$ имеем

$$\Sigma_n \leq (\alpha q)^n \frac{(\Sigma_{n_0} - n_0 a_0(\alpha q)^{n_0}) + na_0(\alpha q)^{n_0}}{(\alpha q)^{n_0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

$$\left|M^n \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{A^k M^{\frac{k(k+1)}{2}}}\left(\frac{1-M^k}{M^k(1-M)}\right)^{n-k}\right| \leq |M|^n \Sigma_n \leq$$

$$\leq (\alpha q|M|)^n \frac{(\Sigma_{n_0} - n_0 a_0(\alpha q)^{n_0}) + na_0(\alpha q)^{n_0}}{(\alpha q)^{n_0}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т. к. $\alpha q|M| < 1$. Таким образом, при достаточно больших n верна оценка

$$|X(n\omega)| \geq \frac{|M|^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(n-1)!}\left|\left(\frac{A}{M}\right)^n \frac{1}{2A}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty. \quad \square$$

Литература

1. Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *О представлении решения линейного функционально-дифференциального уравнения* // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9. – № 6. – С. 1026–1036.
2. Малыгина В.В. *Устойчивость функционально-дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* – ППИ, 1982. – 80 с. – Деп. в ВИНИТИ 1.09.82, № 4701-82.
3. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
4. Шабат Б.В. *Введение в комплексный анализ.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1976. – Ч. 1. – 320 с.
5. Рехлицкий З.И. *Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в банаховом пространстве* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 111. – № 1. – С. 29–32.
6. Рехлицкий З.И. *Об устойчивости решений периодических дифференциально-разностных уравнений* // Изв. АН СССР. – 1966. – Т. 30. – Вып. 5. – С. 971–974.

Пермский государственный технический университет

Поступила 22.03.2002