И З В Е С Т И Я   В Ы С Ш И Х   У Ч Е Б Н Ы Х   З А В Е Д Е Н И Й

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 517.518

Ф.Н. ГАРИФЬЯНОВ

О ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

Введение. В работе исследована проблема моментов

$$L(F(t),t^n) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sign} t \exp(-|t|)t^n(F(t)+i^{n+1}F(it))dt = c_n, \tag{1}$$

где $c_0, c_1, \dots$ — заданные числа, а $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа (ц. ф. э. т.) σ. Ее индикатор должен удовлетворять неравенствам $h(\pi k/2) < 1$, $k = \overline{0,3}$, т. е. $\sigma \in [0, \sqrt{2})$. Задача (1) рассматривается как обобщение проблем Стильтьеса и Гамбургера на случай четырех лучей. Под классом $[\rho, \sigma)$ понимается множество целых функций, порядок которых $\lambda \le \rho$ и тип $\mu < \sigma$.

В разделе 1 получены три основные теоремы.

Теорема 1. *В классе* $[1, \sqrt{2}/2)$ *однородная интерполяционная задача* (1) *имеет лишь нулевое решение.*

Через B обозначим класс ц. ф. э. т. с индикатором

$$h(\theta) = (\cos\theta + \sin\theta)/2, \quad \theta \in [0, \pi/2); \quad h(\theta + \pi/2) = h(\theta). \tag{2}$$

Пусть их нижние функции имеют на границе сопряженной индикаторной диаграммы (единичного квадрата) только логарифмические особенности в вершинах $t_1 = -t_3 = -1/2 - i/2$, $t_2 = -t_4 = 1/2 - i/2$. Таким образом, нижние функции голоморфны в плоскости с некоторыми разрезами, соединяющими точки ветвления t_j. Класс соответствующих нижних функций обозначим через B_1.

Теорема 2. *Если* $F(z) \in [1; 1-\sqrt{2}/2)$, *то* $F(z)$ *по своим моментам* $\{c_n\}$ *восстанавливается рядом*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k F_k(z), \tag{3}$$

причем

$$F_k(z) \in B, \quad L(F_k(t), t^n) = \delta_{k,n}. \tag{4}$$

Пусть D — множество особых точек нижней функции $f(z)$, а $\widetilde{D}$ — множество особых точек функции $(Vf)(z) \equiv f(z-1) + f(z+1) - f(z-i) - f(z+i)$.

Теорема 3. *Ц. ф. э. т.* $F(z)$, *для которой множество*

$$A = C \setminus \widetilde{D} \tag{5}$$

связно, единственным образом определяется моментами (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00914).

Задача (1) *в классе* B (*т. е. уже в случае, когда множество* A *несвязно и* $\sigma = \sqrt{2}/2$) *также всегда имеет единственное решение, если только*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|/n!} < \sqrt{2}. \tag{6}$$

Если множество A несвязно и $\sigma > \sqrt{2}/2$, то выделение классов единственности интерполяционной задачи (1) происходит лишь за счет полного описания множества особых точек $f(z)$. Из возможных вариантов в статье изучен случай, когда у $f(z)$ имеются точки ветвления в вершинах t_j и полюсы в некоторых точках окружности $|z| = \sigma$.

В разделе 2 рассмотрены частные случаи задачи (1), сводящиеся к классической проблеме моментов Стильтьеса (М. С.) — отыскания функции $F(x)$, для которой

$$\int_0^\infty F(x)x^n dx = c_n, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

где $c_0, c_1, \ldots$ — заданные числа. Впервые четко сформулированная в 1894 г. в [1], она привлекла внимание ряда известных математиков (напр., [2]). В работах [3], [4] применена теория трансформаций Фурье в комплексной области к исследованию проблемы (7). При $F(x)e^{\alpha\sqrt{x}} \in L_1(0, \infty)$, $\alpha > 0$, задача (7) сведена к разрешимому в замкнутой форме уравнению

$$\int_0^\infty F(x)\cos z\sqrt{x}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n z^{2n}}{(2n)!}, \quad |\operatorname{Im} z| < \alpha. \tag{8}$$

Решение единственно с точностью до значений на множествах меры нуль. Существенно ослабить ограничения на скорость убывания $F(x)$ нельзя, т. к., например, все М. С. функции

$$F_\mu(x) = \exp(-x^\mu \cos\mu\pi)\sin(x^\mu \sin\mu\pi), \quad 0 < \mu < \frac{1}{2},$$

равны нулю ([5], гл. 11, § 9). Для функции класса Харди сумма ряда в уравнении (8) должна быть аналитически продолжима из круга сходимости в полосу $|\operatorname{Im} z| < \alpha$ и стремиться к нулю, когда $z \to \pm\infty$ внутри данной полосы.

В последнее время вновь возник интерес к проблеме (7). В [6] введен класс функций

$$S_+ : F(t) \in C^\infty[0, \infty); \quad F^{(k)}(0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} t^m F^{(k)}(t) = 0 \ \ \forall k, m.$$

Оказалось, что для любого набора $\{c_n\} \subset \mathbf{C}$ проблема (7) разрешима в классе S_+. В [7], в частности, установлено, что решение $F(x)$ всегда можно выбрать в классе целых функций фиксированного порядка $\rho > \frac{1}{2}$.

Частный случай задачи (1) из раздела 1 — это задача о восстановлении целой функции $F(z) \in [1/4; 1)$ по М. С. функции

$$\widetilde{F}(x) = \sqrt{x}F(x)\exp(-\sqrt[4]{x}).$$

Исследуется и более общая задача: найти целую функцию $F(z)$ с помощью условий

$$c_n + \lambda\alpha^{5n}\widehat{c}_{5n} = b_n, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad |\alpha| < 1. \tag{9}$$

Здесь $\{\widehat{c}_n\}$ — М. С. функции

$$\widetilde{F}(x) = \sqrt{x}F(x)\exp(-\gamma\sqrt[4]{x}), \quad \gamma > 1,$$

а для заданной последовательности $\{b_n\}$ выполнено неравенство (6). Подчеркнем принципиальное отличие этой задачи от проблемы М.С., заключающееся в том, что теперь неизвестен ни один из моментов: ни моменты $\{c_n\}$ относительно веса $\exp(-\sqrt[4]{x})$, ни моменты $\{\widehat{c}_n\}$ относительно веса $\exp(-\gamma\sqrt[4]{x})$. Поэтому здесь существенно (как и при доказательстве теорем 2 и 3 в случае несвязного множества A) используется разработанная автором теория особых линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами [8].

1. Приступим к исследованию задачи (1). Перепишем (1) как функциональное уравнение

$$L(F(t)\exp(-zt),1) = g(z), \quad z \in D. \tag{10}$$

Здесь функция

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n c_n z^n}{n!} \tag{11}$$

голоморфна в некоторой окрестности нуля A_0. Для нижней функции $f(z)$ запишем уравнение (10) как разностное уравнение

$$(Vf)(z) = g(z), \quad z \in A_0. \tag{12}$$

Возможны два случая.

а) Множество (5) связно (напр., если тип $\sigma < \sqrt{2}/2$). Тогда $g(z)$ голоморфна на множестве A и $g(\infty) = 0$, а соотношение (12) справедливо и при $|z| > 1+\sigma$. В таком случае $g(z)$ ассоциировано по Борелю с ц. ф. э. т. $G(z)$, т. е. вместо (12) имеем

$$F(z) = G(z)/H(z), \quad H(z) = \sum_{k=1}^{4}(-1)^k \exp(i^k z). \tag{13}$$

Ниже будет предложен и другой способ решения частных случаев этой задачи, не требующий аналитического продолжения суммы ряда (11) в окрестность бесконечно удаленной точки.

б) Множество A несвязно. Тогда из (12) не следует, что $(Vf)(z) = g(z)$ при $|z| > 1 + \sigma$, не говоря уже о том, что $g(z)$ вообще не обязана быть аналитически продолжимой через любую часть границы ∂A_0 или при возможности такого продолжения удовлетворять условию $g(\infty) = 0$. Методы исследования уравнения (12), примененные в п. а), уже не работают.

Теперь заметим, что при предположениях теоремы 1 множество (5) связно и $G(z) \equiv 0$, т. е. с учетом (13) имеем $F(z) \equiv 0$, что и завершает ее доказательство.

Покажем, что результаты теоремы 1 неулучшаемы. Пусть D — единичный квадрат с вершинами t_j, т. е. $D \equiv A_0$. Стороны l_j пронумерованы в порядке положительного обхода границы. Пусть

$$g^+(t) \in C(\bar{l}_j), \quad j = \overline{1,4}; \quad g(z) \in A(D). \tag{14}$$

В работе [8] было установлено, что уравнение (12) имеет единственное решение, представимое в виде интеграла типа Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \varphi(\tau)(\tau - z)^{-1} d\tau, \quad z \notin \overline{D}, \tag{15}$$

плотность которого может иметь лишь точки разрыва первого рода в вершинах. Положим $g(z) \equiv 1$ и введем функцию

$$f_0(z) : (Vf_0)(z) = 1, \quad z \in D, \implies (Vf_0^{(k)})(z) = 0, \quad z \in D, \quad k \geq 1.$$

Любая система ее производных линейно независима, т. е. без фиксации поведения нижней функции на границе сопряженной индикаторной диаграммы нельзя гарантировать не только единственности, а даже и конечности числа решений задачи (1). При этом производные $f_0^{(k)}(z)$ имеют в вершинах t_j неинтегрируемые особенности. Ц. ф. э. т.

$$\widetilde{F}(z) = \int_{|t|=\varepsilon} f_0'(t)\exp(zt)dt, \quad \varepsilon > \sqrt{2}/2,$$

имеет тип $\sigma = \sqrt{2}/2$ и нулевые моменты (1). Заметим, что предположение $\sigma < \sqrt{2}/2$ сразу влечет за собой ситуацию, описанную в случае а), откуда $f_0'(z) \equiv 0$, что невозможно.

Для доказательства теоремы 2 введем систему функций

$$\{f_m(z) : (Vf_m)(z) = z^m/m!,\ z \in D,\ m = \overline{0,\infty}\}.$$

Их верхние функции $F_m(z)$ удовлетворяют условию (4). Пусть D_0 — область, ограниченная дугами четырех окружностей $|z - i^k| = \sqrt{2}/2$, $k = \overline{1,4}$, и $0 \in D_0$. Будем говорить, что ц. ф. э. т. $F(z)$ принадлежит $B(D_0)$, если $f(z) \in A[cD_0]$. Класс $B(D_0)$ содержит все целые функции класса $[1;\ 1 - \sqrt{2}/2)$ и некоторые из целых функций класса $[1; \sqrt{2})$. В работе ([9], § 3) была получена формула

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(z), \quad z \in \mathbf{C} \setminus \overline{D}_0,$$

причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте $\overline{H} \subset \mathbf{C} \setminus \overline{D}_0$. При этом существенно использовались равенства

$$\frac{(-1)^{m+1}}{2\pi i} \int_{\partial D_0} f_m(z) E^{(k)}(z) dz = \delta_{m,k},$$

где $E(z) = 2z/(z^4 - 1)$. Подчеркнем, что функции $f_m(z)$ являются аналитически продолжимыми на множество $D \setminus D_0$ в силу своего определения. Умножим обе части разложения $f(z)$ в биортогональный ряд на множитель $\exp(\lambda z)dz$, после чего проинтегрируем по окружности $L : |z| = \varepsilon$, $\varepsilon > \sqrt{2}/2$. В итоге получим искомую формулу (3), что и завершает доказательство. Заметим, что существенно ослабить условия теоремы 2 нельзя. Достаточно вспомнить построенную выше функцию $\widetilde{F}(z)$, для которой $c_k = 0\ \ \forall k$.

Формула (3) позволяет обойтись без аналитического продолжения ряда (11) в окрестность бесконечно удаленной точки.

Доказательство теоремы 3. Ее первое утверждение — прямое следствие формулы (13), т. к. при $G(z) \equiv 0$ имеем $F(z) \equiv 0$. Второе утверждение теоремы вытекает из приведенного выше результата [8] о разрешимости разностного уравнения (12) в случае, когда A_0 — квадрат D с вершинами t_j. При выполнении неравенства (6) радиус сходимости степенного ряда (11) больше, чем $\sqrt{2}/2$, т. е. $g(z) \in A[D]$. □

Замечание 1. Можно показать, что ц. ф. э. т. $F_m(z)$ — вещественная на R, вполне регулярного роста с индикатором (2), причем $F_m(iz) = -i^m F_m(z)$. Множество ее корней, не лежащих на координатных осях, может иметь лишь нулевую плотность. Множество ее корней, лежащих на осях координат "вдали" от начала координат, состоит лишь из простых корней и является R-множеством ([10], гл. II, § 1). Функция $F_m(z)$ — каноническое произведение Вейерштрасса нулевого рода и $\exists \gamma : |F_m(z)| \le \gamma \exp(\sqrt{2}|z|/2)/m!\ \ \forall m$. Такие результаты следуют из свойств нижних функций $f_m(z)$, установленных в ([8], § 3).

Замечание 2. Кроме ряда (3), равенство (4) порождает еще один биортогональный ряд $P(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m z^m$, т. е. обычный ряд Маклорена. Легко установить, что если $P(z)$ — целая функция класса $[1; 1/2)$, то ее коэффициенты a_m могут быть вычислены с помощью (4). Это позволяет получить некоторую информацию о свойствах ц. ф. э. т. $F_m(z)$ (см. раздел 2).

Выделим некоторые классы ц. ф. э. т., в которых проблема (1) имеет единственное решение.

1) При $\sigma = \sqrt{2}/2$ в качестве такого класса выберем B. Условия (14) заведомо выполнены, если справедливо неравенство (6).

2) При $\sigma \in (\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ берем класс ц. ф. э. т. B_2. Поведение ассоциированных с ними по Борелю нижних функций $f(z)$ на ∂D идентично поведению функций из класса B_1. Но у $f(z)$ есть еще особенность — простой полюс в точке $z_0 = \sigma \exp(i\varphi)$ с фиксированным вычетом β.

Аргумент φ выбран так, чтобы $(V\widetilde{f})(z) \in A[D]$, где $\widetilde{f}(z) = \beta(z - z_0)^{-1}$. Другими словами, точки z_0 — это те точки окружности $|z| = \sigma$, которые лежат вне замыкания множества $\widetilde{D}$. Уравнение

$$(Vf)(z) = -(V\widetilde{f})(z) + g(z), \quad z \in D,$$

имеет единственное решение $f(z) \in B_1$. Решением задачи (1) будет ц. ф. э. т., ассоциированная по Борелю с нижней функцией $f(z) + \widetilde{f}(z)$.

Перечисленные классы единственности не исчерпывают всех возможных вариантов. Здесь прослеживается связь с теорией краевых задач для аналитических функций, когда индекс задачи, от которого зависит число решений или условий разрешимости, четко определяется выбранным классом граничных значений.

2. Подробнее изучим свойства функций $F_{4m+3}(z)$. Имеем

$$F_{4m+3}(z) = z^2 P_m(z^4), \quad \int_0^\infty t^{k+1/2} P_m(t) \exp(-\sqrt[4]{t}) dt = \delta_{m,k}, \tag{16}$$

где $P_m(t)$ — вещественная на действительной оси функция с тригонометрическим индикатором $h(\theta) = [\cos(\theta/4) + \sin(\theta/4)]$. Введем функции

$$P(z) = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{P}_j(z) P_{m_j}(z), \tag{17}$$

где $\widetilde{P}_j(z)$ — вещественные на действительной оси целые функции класса $[1/4; \varepsilon]$, $\varepsilon < 1/2$. Пусть $\{a_k\}_0^\infty$ — множество положительных корней нечетной кратности целой функции (17). Образуем каноническое произведение Вейерштрасса $\Theta(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_k})$. Подчеркнем, что все корни $\Theta(z)$ простые. Докажем, что у канонического произведения $\Theta(z)$ тип $\sigma \geq 1/2 - \varepsilon$. Предположим противное. Тогда существует интеграл

$$J = \int_0^\infty x^{k+1/2} P(x) \Theta(x) \exp(-\sqrt[4]{x}) dx$$

и $J \neq 0$ в силу знакопостоянства произведения $P(x)\Theta(x)$. С другой стороны, почленное интегрирование ряда Маклорена целой функции $x^k \widetilde{P}_j(x)\Theta(x)$ типа $\sigma < 1/2$ с учетом (16) приводит к тому, что $J = 0$ при $k > \max\limits_j m_j$ (см. замечание 2).

Изложим ход решения уравнения

$$(Vf_1)(z) + \lambda(f_1[\mu(z) + \gamma] + f_1[\mu(z) - \gamma] - f_1[\mu(z) + \gamma i] - f_1[\mu(z) - \gamma i]) = g(z), \quad z \in D,$$

где $\mu(z) \in A[D]$, $\mu(iz) = i\mu(z)$, $\mu(\overline{D}) \subset D$, $\gamma > 1$, аналогичный проведенному в [8] для $\lambda = 0$. Используем интегральное представление (15), неизвестная плотность которого удовлетворяет условию

$$\varphi(t) + \Theta_t \varphi(\alpha(t)) = 0.$$

Здесь $\Theta_t = \{1, t \in l_1 \cup l_3; -1, t \in l_2 \cup l_4\}$, а l_1 — сторона квадрата с концами в точках t_1 и t_2. Сдвиг $\alpha(t)$ на стороне l_k определен формулой $\alpha(t) = t + i^k$, $k = \overline{1,4}$, т. е. $\alpha(t) : \partial D \to \partial D$ с изменением ориентации. Поэтому $\alpha(\alpha(t)) \equiv t$, $t \notin \{t_k\}$. Теперь разностное уравнение сводится к функциональному уравнению

$$\Phi(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \varphi(\tau) A(z, \tau) d\tau = g(z), \quad z \in D, \tag{18}$$

с ядром $A(z, \tau) = E(\tau - z) + \gamma^{-1} E((\tau - \mu(z))/\gamma)$. С помощью аналога формулы Сохоцкого

$$\Phi^+(t) = -\frac{\Theta_t}{2} \varphi(\alpha(t)) + \Phi(t)$$

перейдем к интегральному уравнению Фредгольма

$$(T\varphi)(t) \equiv \varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}(A(t,\tau)-\Theta_t\Theta_\tau A(\alpha(t),\alpha(\tau)))\varphi(\tau)d\tau = g^+(t)-\Theta_t g^+(\alpha(t)), \quad t\in\partial D. \tag{19}$$

Заметим, что $(T\varphi)(t) \equiv \Phi^+(t)-\Theta_t\Phi^+(\alpha(t))$. Это позволяет с помощью теории краевой задачи Карлемана установить эквивалентность функционального уравнения (18) и интегрального уравнения (19). Ядро уравнения (19) ограничено на ∂D. Оператор T удобно рассматривать на банаховом пространстве $\widetilde{C}(\partial D)$ — множестве функций $\varphi(t)\in C(\bar{l}_j)$, $j=\overline{1,4}$, с нормой $\|\varphi\| = \max|\varphi(t)|$, $t\in\partial D$. Очевидно, $T:\widetilde{C}(\partial D)\to\widetilde{C}(\partial D)$. При $\lambda=0$ обратимость оператора T была установлена в [8] применением принципа сжимающих отображений. Этот результат остается справедливым и при достаточно малых $|\lambda|\neq 0$. В частности, при $\mu(z)=\alpha z^5$, $g(iz)=-ig(z)$, $|\alpha|<1$, для функций $F(x)=F_1(\sqrt[4]{x})\sqrt{x}$, где $F_1(x)$ ассоциирована по Борелю с $f_1(x)$, получим задачу (9).

Замечание 3. Предложенные методы позволяют свести проблему моментов

$$\int_0^\infty F(x)e^{-x}x^k dx+\lambda\int_0^{-\infty}F(x)e^{-|x|}x^k dx+\beta\int_0^{i\infty}F(x)e^{-|x|}x^k dx+\lambda\beta\int_0^{-i\infty}F(x)e^{-|x|}x^k dx = c_k$$

в классе функций с фиксированным индикатором (2) к исследованию некоторого интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

Пусть D — фундаментальный многоугольник конечно-порожденной разрывной группы дробно-линейных преобразований, ограниченный конечным числом дуг окружностей, причем D выбран так, что среди его вершин нет предельных точек группы. Считаем, что любая вершина D является общей для четного или бесконечного числа конгруэнтных фундаментальных многоугольников. Рассмотрим функциональные уравнения (18), где

$$A(z,\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\tau-\sigma_k(z)}. \tag{20}$$

Обозначим через $S_r(z)$ порождающие преобразования группы, для которых конгруэнтные многоугольники $S_r(\overline{D})$ имеют с $\overline{D}$ общую сторону. Пусть $m(j)$ — наименьшее число порождающих преобразований $S_r(z)$ и преобразований, обратных к ним, суперпозицией которых является преобразование $\sigma_j(z)$. В этой суперпозиции каждое преобразование считается столько раз, какова его кратность. При этом на разных местах могут быть одни и те же преобразования $S_r(z)$ или $S_r^{-1}(z)$, поскольку дробно-линейные функции, вообще говоря, не коммутируют. Введем такую функцию $\alpha(t)$, что $\alpha(\alpha(t))=t$, а на сторонах l_k она совпадает с порождающими преобразованиями группы $\alpha(l_k)=l'_k$. Здесь l_k и l'_k — конгруэнтные стороны границы ∂D.

Пусть в формуле (20) сумма берется по таким преобразованиям группы, для которых числа $m(k)$ нечетны и, кроме того, $\sigma_k(\overline{D})\cap\overline{D}\neq\emptyset$ (свойства таких лакунарных ядер см. в [11]). Тогда функциональное уравнение (18), с одной стороны, равносильно проблеме моментов

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{\arg\tau=\varphi_k}F(\tau)\frac{d^j}{dz^j}\exp(-\sigma_k(z)\tau)|_{z=a}d\tau = g^{(j)}(a), \quad a\in D, \quad j=\overline{0,\infty}.$$

С другой стороны, оказывается возможным с помощью формул Ю.В. Сохоцкого свести его к исследованию интегрального уравнения Фредгольма второго рода с ядром

$$K(t,\tau)=A(t,\tau)-\alpha'(\tau)A(\alpha(t),\alpha(\tau)),$$

ограниченным на ∂D.

Литература

1. Стильтьес Т.И. *Исследование о непрерывных дробях.* – Харьков–Киев: ГНТИ Украины, 1936. – 156 с.
2. Ахиезер Н.И. *Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею.* – М.: Физматгиз, 1961. – 301 с.
3. Hardy G.H. *On Stieltjes "probleme des moments"* // Messenger of Math. – 1916. – V. 46. – P. 175–182.
4. Hardy G.H. *On Stieltjes "probleme des moments"* // Messenger of Math. – 1917. – V. 47. – P. 81–88.
5. Титчмарш Е. *Введение в теорию интегралов Фурье.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 479 с.
6. Duran A.I. *The Stieltjes moments problem for rapidly decreasing functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 107. – P. 631–641.
7. Попов А.Ю. *О проблеме моментов быстро убывающих функций* // Матем. заметки. – 1996. – Т. 60. – № 1. – С. 66–74.
8. Гарифьянов Ф.Н. *Проблема обращения особого интеграла и разностные уравнения для функций, аналитических вне квадрата* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 7. – С. 7–16.
9. Гарифьянов Ф.Н. *Трансформации биортогональных систем и некоторые их приложения.* II // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 8. – С. 13–25.
10. Левин Б.Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.
11. Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *О лакунарных аналогах тэта-ряда Пуанкаре и их приложении* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 5. – С. 977–986.

Казанский государственный энергетический университет

Поступила 18.05.2001