ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2003 МАТЕМАТИКА № 6 (493)

УДК 517.548

В.В. АСЕЕВ

ВАРИАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ КВАЗИКОНФОРМНОСТИ

Введение

Под конденсатором в данной статье понимается пара (E, F) непустых непересекающихся континуумов в $\overline{R^n}$, а через $\operatorname{Cap}(E,F)$ (или $\operatorname{Cap}_n(E,F)$) обозначается его конформная емкость (определение и свойства см., напр., [1], с. 83–96 или [2], с. 37–38). Геометрическим критерием квазиконформности гомеоморфизма $f : R^n \to R^n$, данным в [3], служит выполнение оценки

$$K^{-1} \operatorname{Cap}(E,F) \leq \operatorname{Cap}(f(E), f(F)) \leq K \ \operatorname{Cap}(E,F) \tag{1}$$

для всех конденсаторов в $\overline{R^n}$. В связи с этим возникает вопрос о квазиконформной *достаточности* того или иного семейства конденсаторов, т. е. вопрос о квазиконформности отображения f при наличии оценки (1) лишь для конденсаторов (E, F) из заданного семейства $\mathcal{A}$. Так, например, семейство конденсаторов $\{(\partial B(x,R), \partial B(x,r)) : x \in R^n,\ r > 0,\ R > 0\}$ является в этом смысле достаточным [3].

На плоскости R^2 с отмеченной системой декартовых координат фиксируем семейство $\mathcal{H}$ всех гомеоморфизмов плоскости на себя и семейство $\mathcal{Q}$ всех квадратов со сторонами, параллельными координатным осям, которые далее будем называть $\mathcal{Q}$-квадратами. В [4] было рассмотрено следующее геометрическое условие, необходимое, но не достаточное для квазиконформности гомеоморфизма $f : R^2 \to R^2$.

Слабое условие квадрата: для любого $\mathcal{Q}$-квадрата T конформный модуль криволинейного четырехсторонника $f(T)$ ограничен сверху константой M, не зависящей от выбора квадрата в семействе $\mathcal{Q}$.

В [5] рассмотрено аналогичное условие для $\mathcal{Q}$-прямоугольников с фиксированным конформным модулем $m > 1$ и показана его достаточность для квазиконформности f. Некоторые вариации этой задачи рассмотрены в [6]. Пространственные аналоги слабого условия квадрата изучались в [7]–[9].

Так как это условие в общем случае не является достаточным для квазиконформности, в [10] было введено

Сильное условие квадрата $\mathrm{SSC}(f, M')$: существует константа $M' > 0$ такая, что для любого квадрата $Q \in \mathcal{Q}$ и любой пары E, F его противоположных сторон конформная емкость конденсатора $(f(E), f(F))$ имеет оценку

$$\operatorname{Cap}(f(E), f(F)) \leq M'. \tag{2}$$

В [11] было доказано, что трехмерный аналог этого условия (сильное условие куба) обеспечивает квазиконформность гомеоморфизма $f : R^3 \to R^3$. Однако на плоскости вопрос о достаточности условия $\mathrm{SSC}(f, M)$ для квазиконформности отображения f так и остается открытым. В этой статье показано, что гомеоморфизм плоскости, удовлетворяющий условию $\mathrm{SSC}(f, M)$, переводит любую прямую в квазидугу (квазиконформный образ прямой). В частном случае прямоугольного отображения это условие обеспечивает билипшицевость гомеоморфизма, и этот случай рассмотрен отдельно в разделе 4. Оценки, полученные в теоремах 2.1 и 4.1, не являются точными. Нет видимых стимулов к получению точной оценки в теореме 2.1, однако вычисление точной оценки коэффициента билипшицевости в теореме 4.1 было бы полезным геометрическим упражнением.

Символом $[s_1, s_2]$ в статье обозначается неориентированный отрезок с концами в точках s_1 и s_2, а под проекцией всегда подразумевается ортогональная проекция. Через $\operatorname{dist}(E, F)$ обозначена *дистанция* между множествами $E, F \subset R^n$, т. е. величина $\inf\{|x - y| : x \in E,\ y \in F\}$, обычно называемая "расстоянием". В случае одноточечного множества наряду с $\operatorname{dist}(\{a\}, F)$ используется также запись $\operatorname{dist}(a, F)$. Остальные символы, встречающиеся в статье, поясняются при первом их употреблении в тексте. Приведенные в разделе 3 параллельно к основному тексту нечеткие формулировки лемм являются необязательными и служат лишь для геометрической наглядности рассуждений.

1. Замена емкостного условия геометрическим

Фиксируем семейство $\mathcal{T}$ всех *тетрад* (упорядоченных четверок попарно различных точек) (s_1, s_2, s_3, s_4) в плоскости R^2 таких, что пары (s_1, s_2) и (s_3, s_4) лежат на противоположных сторонах какого-либо $\mathcal{Q}$-квадрата.

Определение 1.1. Гомеоморфизм $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Q}(f, M)$ с константой $1 \le M < \infty$, если для любой тетрады $(s_1, s_2, s_3, s_4) \in \mathcal{T}$ выполнено неравенство

$$|f(s_1) - f(s_2)|\,|f(s_3) - f(s_4)| \le M|f(s_1) - f(s_3)|\,|f(s_2) - f(s_4)|. \tag{3}$$

Теорема 1.1. *Для любого $f \in \mathcal{H}$*

(i) $\mathrm{SSC}(f, M_1) \Rightarrow \mathrm{Q}(f, M_2)$ *с константой M_2, зависящей лишь от M_1;*
(ii) $\mathrm{Q}(f, M_2) \Rightarrow \mathrm{SSC}(f, M_1)$ *с константой M_1, зависящей лишь от M_2.*

Доказательство. (i) Известно ([1], с. 94, лемма 7.35), что для любого конденсатора (E, F), пластины которого E и F суть невырожденные континуумы в R^n, $n \ge 2$, и для любой тетрады (a_1, a_2, a_3, a_4) такой, что $a_1, a_2 \in E$ и $a_3, a_4 \in F$, выполняется оценка

$$\operatorname{Cap}(E, F) \ge \tau_n(|a_1 - a_3|\,|a_2 - a_4|\,|a_1 - a_2|^{-1}\,|a_3 - a_4|^{-1}), \tag{4}$$

где $\tau_n(t)$ — монотонно убывающая вещественная функция на полуоси $t \in (0, +\infty)$, определяемая в ([1], (7.19), с. 88) как конформная емкость конденсатора Тейхмюллера в пространстве R^n. В нашем случае при $n = 2$ для пары (B_1, B_2) противоположных сторон произвольно взятого $\mathcal{Q}$-квадрата и точек $s_1, s_2 \in B_1$, $s_3, s_4 \in B_2$ положим $E = f(B_1)$, $F = f(B_2)$, $a_i = f(s_i)$, $i = 1, \ldots, 4$. Оценка (4) и условие $\mathrm{SSC}(f, M_1)$ дают неравенство

$$\frac{|f(s_1) - f(s_2)|\,|f(s_3) - f(s_4)|}{|f(s_1) - f(s_3)|\,|f(s_2) - f(s_4)|} \le \varphi(\operatorname{Cap}(f(B_1), f(B_2))) \le \varphi(M_1),$$

где $\varphi(t) = 1/\tau_2^{-1}(t)$ — монотонно возрастающая функция на полуоси $(0, +\infty)$. Это и означает выполнение условия $\mathrm{Q}(f, M_2)$ с константой $M_2 = 1/\tau_2^{-1}(M_1)$.

(ii) Используем введенную в ([1], (2.34), с. 28) метрику, заданную в дополнении к компактному множеству $A \subset R^n$,

$$j_A(x, y) = \ln\left(1 + \frac{|x - y|}{\min\{\operatorname{dist}(x, A), \operatorname{dist}(y, A)\}}\right).$$

Конформная емкость конденсатора (E, F) в R^n имеет оценку ([1], замечание 7.42, с. 97)

$$\operatorname{Cap}(E, F) \le h_n(\min\{\operatorname{diam}_{j_E}(F), \operatorname{diam}_{j_F}(E)\}), \tag{5}$$

где h_n — монотонно возрастающая функция, определяемая лишь размерностью n, а $\operatorname{diam}_{j_A}(B)$ — диаметр множества B в метрике j_A. Пусть B_1, B_2 — противоположные стороны произвольно взятого $\mathcal{Q}$-квадрата, $E = f(B_1)$, $F = f(B_2)$. Выберем точки $x_1 \in E$, $x_3 \in F$ так, чтобы $|x_1 - x_3| = d = \mathrm{dist}(E, F)$. Тогда для любых точек $x_2 \in E$ и $x_4 \in F$ имеем

$$j_E(x_3, x_4) = \ln(1 + |x_3 - x_4|/d), \quad j_F(x_1, x_2) = \ln(1 + |x_1 - x_2|/d). \tag{6}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\delta = \mathrm{diam}_{j_E}(F) \le \mathrm{diam}_{j_F}(E)$. Подобрав точки x_2 и x_4 так, чтобы выполнялись равенства $j_E(x_3, x_4) = \delta/2 = j_F(x_1, x_2)$, из (6) получаем $|x_1 - x_2| = d(e^{\delta/2} - 1) = |x_3 - x_4|$. Применение условия $\mathrm{Q}(f, M_2)$ к тетраде (x_1, x_2, x_3, x_4) приводит к оценке

$$d^2(e^{\delta/2} - 1)^2 \le M_2 |x_1 - x_3|\,|x_2 - x_4| \le M_2 d(d + 2d(e^{\delta/2} - 1)) = M_2 d^2(2e^{\delta/2} - 1),$$

т. е. $(e^{\delta/2} - 1)^2 \le 2M_2 e^{\delta/2}$ и, следовательно, $\delta \le 4\ln(\mathrm{arsh}\sqrt{M_2/2}) = h^*(M_2)$. Тогда (5) дает оценку $\mathrm{Cap}(E, F) \le h_2(h^*(M_2)) = M_1$, означающую выполнение условия $\mathrm{SSC}(f, M_1)$ с константой M_1, зависящей лишь от M_2. $\square$

2. Квазиконформность образов прямых

Напомним общее определение кривой с ограниченным искривлением, введенное в ([12], (2.7), с. 100).

Определение 2.1. Относительным расстоянием ρ_Γ между точками x, y метрического континуума Γ называется величина $\rho_\Gamma(x, y) = \inf_\gamma \mathrm{diam}(\gamma)$, где inf берется по всем континуумам $\gamma \subset \Gamma$, содержащим точки x, y. *Искривлением* метрического континуума Γ называется величина

$$\mathrm{Cur}(\Gamma) = \sup_{x, y \in \Gamma} \rho_\Gamma(x, y)/|x - y|.$$

В R^2 роль жордановых кривых (или дуг) Γ с ограниченным искривлением состоит в том, что они и только они являются образами прямых (соответственно прямолинейных отрезков) при квазиконформных отображениях плоскости на себя, с верхней оценкой коэффициента квазиконформности, зависящей лишь от $\mathrm{Cur}(\Gamma)$ ([13], (8.6), с. 105).

Основным результатом данной статьи является

Теорема 2.1. *Если гомеоморфизм $f : R^2 \to R^2$ удовлетворяет условию $\mathrm{Q}(f, M)$, то образ $f(L)$ любой прямой $L \subset R^2$ имеет ограниченное искривление $\mathrm{Cur}(f(L)) \le 2(4M + 3)^{23}$.*

Применение теоремы 1.1 (i) и теоремы 2.1 позволяет получить

Следствие 2.1. Если гомеоморфизм $f : R^2 \to R^2$ удовлетворяет сильному условию квадрата $\mathrm{SSC}(f, M)$, то образ $f(L)$ любой прямой $L \subset R^2$ есть кривая с ограниченным искривлением $\mathrm{Cur}(f(L)) \le c_0$, где c_0 зависит лишь от M.

Однако вопрос о квазиконформности отображения f так и остается открытым.

3. Доказательство основной теоремы

Следующие леммы имеют форму логических процедур с входными параметрами, облегчающую их многократное использование в тексте. Для краткости записей вводим лексическое сокращение $K_n := K(4M + 3)^n$.

Лемма 3.1. *«s_1, s_2, s_3, s_4, M, K». Пусть $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Q}(f, M)$, и пусть две пары точек $\{s_1, s_2\}$, $\{s_3, s_4\}$ лежат на противоположных сторонах $\mathcal{Q}$-квадрата. Если*

(3.1.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_3)| \le K$; $|f(s_4)| \ge K_1$,

то

(3.1.2) $|f(s_2)| \le K_1$.

Доказательство. Из условия $\mathrm{Q}(f,M)$ следует неравенство $|f(s_4)-f(s_3)|\,|f(s_1)-f(s_2)| \le M|f(s_1)-f(s_3)|\,|f(s_4)-f(s_2)|$, которое с учетом (3.1.1) дает оценку

$$|f(s_4)-f(s_3)|\,|f(s_2)-f(s_1)| \le 2KM(|f(s_4)-f(s_3)|+2K+|f(s_2)-f(s_1)|). \tag{7}$$

Введем обозначения $\alpha = 1/|f(s_2)-f(s_1)|$, $\beta = 1/|f(s_4)-f(s_3)|$ и заметим, что в силу (3.1.1) $|f(s_4)-f(s_3)| \ge K_1 - K \ge 4KM$, т. е. $\beta \le 1/(4KM)$. Записав (7) в виде $1/(2KM) \le \alpha+\beta+2K\alpha\beta$, получаем с учетом оценки для β неравенство $1/(4KM) \le \alpha(1+2K/(4KM))$, из которого следует $\alpha \ge 1/(2K(2M+1))$. Поэтому

$$|f(s_2)| \le |f(s_1)| + |f(s_2)-f(s_1)| \le K + 2K(2M+1) = K(4M+3) = K_1. \quad \square$$

(С использованием нечетких предикатов "близкий" и "далекий" [14], содержание этой леммы выражается фразой: если точки s_1, s_3 "близкие", а точка s_4 "далекая", то s_2 — "близкая" точка.)

Лемма 3.2. «$s_1,s_2,s_3,s_4,s_5,s_6,M,K$». *Пусть* $f \in \mathcal{H}$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{Q}(f,M)$, *и точки* s_1, s_2, s_3, s_4 *являются вершинами* $\mathcal{Q}$*-квадрата с центром* s_5 *и диагональю* $[s_1,s_3]$. *Если*

(3.2.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_3)| \le K$

и

(3.2.2) $s_6 \in [s_4,s_3]$, $|f(s_6)| > K_4$,

то

(3.2.3) $|f(z)| \le K_4$ *для всех* $z \in [s_1,s_5]$.

Доказательство. Условия (3.2.1) и (3.2.2) позволяют применить к произвольной точке $z \in [s_1,s_2]$ лемму 3.1 «s_1,z,s_3,s_6,M,K» и получить соотношение

$$|f(z)| \le K_1 \quad \text{для всех} \quad z \in [s_1,s_2]. \tag{8}$$

Рассмотрим *допущение* D1: существует точка $p \in [s_1,s_5]$, в которой

$$|f(p)| > K_4. \tag{9}$$

Пусть p_1 — проекция точки p на отрезок $[s_1,s_2]$. Из (8), в частности, следует

$$|f(s_2)| \le K_1, \quad |f(p_1)| \le K_1. \tag{10}$$

Точки p_2, p_3 однозначно определены условием: "квадрат с вершинами p_1, s_2, p_2 из $[s_2,s_3]$, p_3 принадлежит семейству $\mathcal{Q}$". В силу (10) и (9) для любой точки $z \in [s_2,p_2]$ выполнены условия леммы 3.1 «s_2,z,p_1,p,M,K_1 » и, следовательно,

$$|f(z)| \le K_2 \quad \text{для всех} \quad z \in [s_2,p_2]. \tag{11}$$

Пусть p_4 и p_5 — проекции точки p на отрезки $[s_2,p_2]$ и $[s_4,s_3]$ соответственно. Из (11), в частности, следует

$$|f(p_4)| \le K_2. \tag{12}$$

Так как $|f(s_3)| \le K \le K_2$ и $|f(p)| \ge K_2(4M+3)$, то для любой точки $z \in [p_5,s_3]$ выполнены условия леммы 3.1 «s_3,z,p_4,p,M,K_2», в силу которой

$$|f(z)| \le K_2(4M+3) = K_3 \quad \text{для всех} \quad z \in [p_5,s_3]. \tag{13}$$

Пусть p_6 — проекция точки p на отрезок $[s_1,s_4]$. Неравенства $|f(p_1)| \le K_1 \le K_2$ (см. (10)), $|f(s_1)| \le K_2$ (см. (3.2.1)) и $|f(p)| \ge K_3$ (см. (9)) позволяют применить лемму 3.1 «s_1,p_6,p_1,p,M,K_2» и получить оценку

$$|f(p_6)| \le K_3. \tag{14}$$

Рассмотрим $\mathcal{Q}$-квадрат с вершинами p_6, p_7, p_8, s_4 и стороной $[s_4, p_8] \subset [s_4, s_3]$. Так как $p \in [s_1, s_5]$, то $p_8 \in [p_5, s_3]$ и, следовательно, $|f(p_8)| \le K_3$ (см. (13)). Оценки (14) и (9) позволяют применить лемму 3.1 «p_8, z, p_6, p, M, K_3» при любом $z \in [s_4, p_8]$ и получить оценку

$$|f(z)| \le K_4 \quad \text{для всех} \quad z \in [s_4, p_8]. \tag{15}$$

Так как $s_6 \in [s_4, s_3] = [s_4, p_8] \cup [p_5, s_3]$, то (15) и (13) дают неравенство $|f(s_6)| \le K_4$, противоречащее (3.2.2). Поэтому допущение D1 в форме (9) не может реализоваться, и, следовательно, верно соотношение (3.2.3). $\square$

(Нечеткая формулировка этой леммы: если концы диагонали D правильного квадрата — “близкие” точки, а на стороне S этого квадрата имеется “далекая” точка, то все точки той половины диагонали D, которая не пересекается с S, являются “близкими”.)

Лемма 3.3. *«s_1, s_2, s_3, s_4, M, K». Пусть $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Q}(f, M)$, и точки s_1, s_3, s_2, s_4 суть вершины $\mathcal{Q}$-квадрата с диагональю $[s_1, s_2]$. Если*

(3.3.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_2)| \le K$, $|f(s_4)| > K_4$,

то

(3.3.2) $|f(z)| \le K_4$ *для всех* $z \in [s_1, s_2]$.

Доказательство. Пусть $c = (s_1 + s_2)/2$. Лемма 3.2 «$s_1, s_3, s_2, s_4, c, s_4, M, K$» дает оценку (3.3.2) для всех $z \in [s_1, c]$, а лемма 3.2 «$s_2, s_3, s_1, s_4, c, s_4, M, K$» дает ту же оценку для всех $z \in [s_2, c]$. Так как $[s_1, s_2] = [s_1, c] \cup [c, s_2]$, то выполняется соотношение (3.3.2). $\square$

(В нечеткой формулировке: если концы диагонали правильного квадрата являются “близкими” точками, а одна из его вершин, не лежащая на этой диагонали, “далекая”, то все точки той же диагонали являются “близкими”.)

Лемма 3.4. *«s_1, s_2, M, K». Пусть $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Q}(f, M)$, и отрезок $[s_1, s_2]$ служит диагональю $\mathcal{Q}$-квадрата. Если*

(3.4.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_2)| \le K$,

то

(3.4.2) $|f((s_1 + s_2)/2)| \le K_4$.

Доказательство. Положим $c = (s_1 + s_2)/2$ и построим $\mathcal{Q}$-квадрат с вершинами s_1, z_1, s_2, z_2 и центром в точке c. Пусть выполняется *допущение* D2: $|f(c)| > K_4$. В силу (3.4.1) и гомеоморфности отображения f найдется точка z_3 на границе этого квадрата, в которой $|f(z_3)| > K_4$. Не ограничивая общности, можно считать, что $z_3 \in [z_2, s_2]$. Тогда лемма 3.2 «$s_1, z_1, s_2, z_2, c, z_3, M, K$» дает оценку $|f(c)| \le K_4$, противоречащую допущению D2. $\square$

(Нечеткая формулировка: если концы диагонали правильного квадрата суть “близкие” точки, то и его центр является “близкой” точкой.)

Лемма 3.5. *«s_1, s_2, M, K». Пусть $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию $\mathrm{Q}(f, M)$, и точки s_1, s_2 служат концами диагонали $\mathcal{Q}$-квадрата. Если*

(3.5.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_2)| \le K$,

то

(3.5.2) $|f(z)| \le K_{16}$ *для всех* $z \in [s_1, s_2]$.

Доказательство. Пусть s_1, z_1, s_2, z_2 — вершины рассматриваемого $\mathcal{Q}$-квадрата. Если хотя бы в одной из точек z_1 или z_2 выполняется неравенство $|f(z)| > K_4$, то лемма 3.3 «s_1, s_2, z_1, z_2, M, K» дает требуемую оценку $|f(z)| \le K_4 \le K_{16}$ для всех $z \in [s_1, s_2]$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда

$$|f(z_1)| \le K_4, \quad |f(z_2)| \le K_4. \tag{16}$$

Пусть выполняется *допущение* D3: нашлась точка $q \in [s_1, s_2]$, в которой $|f(q)| > K_{16}$, и для определенности $q \in [c, s_2]$, где c — центр рассматриваемого квадрата. Возьмем $\mathcal{Q}$-квадрат с вершинами s_1, w_1, b, w_2, центром в точке q и диагональю $[s_1, b]$. Если допустить, что $|f(b)| \le K_8$, то лемма 3.4 «s_1, b, M, K_8» даст оценку $|f(q)| \le K_{12}$, противоречащую допущению D3. Следовательно,

$$|f(b)| > K_8. \tag{17}$$

Если допустить, что $|f(w_1)| \le K_8$ и $|f(w_2)| \le K_8$, то лемма 3.4 «w_1, w_2, M, K_8» даст оценку $|f(q)| \le K_{12}$, противоречащую допущению D3. Следовательно, в одной из точек w_1 или w_2 (пусть для определенности это будет w_2) выполнено неравенство

$$|f(w_2)| > K_8. \tag{18}$$

Если допустить, что нашлась точка $z \in [w_1, b]$, в которой $|f(z)| \le K_7$, то лемма 3.1 «s_1, w_2, z, b, M, K_7» даст оценку $|f(w_2)| \le K_8$, противоречащую (18). Следовательно,

$$|f(z)| > K_7 \quad \text{для всех} \quad z \in [w_1, b] \tag{19}$$

и, в частности,

$$|f(w_1)| > K_7. \tag{20}$$

Если допустить, что имеется точка $z \in [w_2, b]$, в которой $|f(z)| \le K_6$, то лемма 3.1 «z, b, s_1, w_1, M, K_6» дает оценку $|f(b)| \le K_7$, противоречащую (17). Следовательно,

$$|f(z)| > K_6 \quad \text{для всех} \quad z \in [w_2, b]. \tag{21}$$

Положим $q_1 = (b + w_1)/2$ и $q_2 = (b + w_2)/2$. Если предположить, что имеется точка $z \in [q, q_2]$, в которой $|f(z)| \le K_7$, то лемма 3.1 «z, q, z_2, w_2, M, K_7» приводит к неравенству $|f(q)| \le K_8$, противоречащему допущению D3. Поэтому

$$|f(z)| > K_7 \quad \text{для всех} \quad z \in [q, q_2]. \tag{22}$$

Если предположить, что имеется точка $z \in [q, q_1]$, в которой $|f(z)| \le K_6$, то лемма 3.1 «z, q, z_1, w_1, M, K_6» даст неравенство $|f(q)| \le K_7$, противоречащее допущению D3. Следовательно,

$$|f(z)| > K_6 \quad \text{для всех} \quad z \in [q, q_1]. \tag{23}$$

В силу (23), (22), (21) и (19) неравенство $|f(z)| > K_6$ выполняется на всей границе квадрата q, q_1, b, q_2, и в силу гомеоморфности отображения f оно выполняется и во внутренней точке s_2 этого квадрата, т. е. $|f(s_2)| > K_6$, что противоречит (3.5.1). Таким образом, допущение D3 не может быть реализовано, и, следовательно, всюду на $[s_1, s_2]$ выполнена требуемая оценка $|f(z)| \le K_{16}$. $\square$

(Нечеткая формулировка: если концы отрезка, образующего угол $\pi/4$ с координатными осями, являются "близкими" точками, то и весь этот отрезок состоит из "близких" точек.)

Лемма 3.6. *«s_1, s_2, M, K». Пусть для $f \in \mathcal{H}$ выполняется условие* $\mathrm{Q}(f, M)$ *(из определения* 1.1*), и точки s_1, s_2 — смежные вершины некоторого $\mathcal{Q}$-квадрата. Если*

(3.6.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_2)| \le K$,

то

(3.6.2) $|f(z)| \le K_{21}$ *для всех* $z \in [s_1, s_2]$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{Q}$-квадраты s_1, s_2, z_1, z_2 и s_1, s_2, w_1, w_2, имеющие отрезок $[s_1, s_2]$ общей стороной и центры в точках z_0 и w_0 соответственно. Если $|f(z_1)| > K_1$, то лемма 3.1 «s_2, z_1, s_1, z_2, M, K» дает оценку $|f(z_2)| \le K_1$. Следовательно, неравенство $|f(z)| \le K_1$ выполняется либо в точке z_1, либо в точке z_2. Применение леммы 3.4 «s_1, z_1, M, K_1» или соответственно леммы 3.4 «s_2, z_2, M, K_1» приводит к оценке $|f(z_0)| \le K_5$. Тогда лемма 3.5 «s_1, z_0, M, K_5» дает оценку

$$|f(z)| \le K_{21} \quad \text{для всех} \quad z \in [s_1, z_0], \tag{24}$$

а лемма 3.5 «s_2, z_0, M, K_5» дает оценку

$$|f(z)| \le K_{21} \quad \text{для всех} \quad z \in [s_2, z_0]. \tag{25}$$

Заменив в этом рассуждении z_1, z_2, z_0 соответственно на w_1, w_2, w_0, получаем выполнение неравенства $|f(z)| \le K_{21}$ при всех $z \in [s_1, w_0] \cup [s_2, w_0]$. Совместно с оценками (24) и (25) это дает выполнение неравенства $|f(z)| \le K_{21}$ на всей границе квадрата с вершинами s_1, z_0, s_2, w_0, содержащего отрезок $[s_1, s_2]$ в своем замыкании. Поэтому в силу гомеоморфности отображения f требуемая оценка $|f(z)| \le K_{21}$ выполняется и на отрезке $[s_1, s_2]$. $\square$

(Нечеткая формулировка: если концы отрезка, параллельного одной из координатных осей являются “близкими” точками, то и весь этот отрезок состоит из “близких” точек.)

Лемма 3.7. *«s_1, s_2, M, K». Пусть $f \in \mathcal{H}$ удовлетворяет условию* $\mathrm{Q}(f, M)$. *Если*

(3.7.1) $|f(s_1)| \le K$, $|f(s_2)| \le K$,

то

(3.7.2) $|f(z)| \le K_{23}$ *для всех* $z \in [s_1, s_2]$.

(В нечеткой формулировке: все точки любого отрезка с “близкими” концами являются “близкими” точками.)

Доказательство. Случаи, когда отрезок $[s_1, s_2]$ параллелен одной из координатных осей или образует с ними угол $\pi/4$, рассмотрены в леммах 3.6 и 3.5 соответственно. Поэтому можно исключить эти случаи из рассмотрения. Тогда имеется единственный $\mathcal{Q}$-квадрат s_1, a_2, a_3, a_4 такой, что $s_2 \in [a_3, a_4]$. При этом $s_2 \ne a_3, a_4$. Рассмотрим три возможных ситуации.

1. Пусть $|f(a_4)| > K_1$. Построим проекцию p точки s_2 на отрезок $[s_1, a_2]$ и $\mathcal{Q}$-квадрат b_1, p, s_2, b_4 такой, что $s_1 \in [b_1, p]$ и $a_4 \in [s_2, b_4]$. Для любой точки $z \in [b_1, p]$ лемма 3.1 «s_1, z, s_2, a_4, M, K» дает оценку

$$|f(z)| \le K_1 \quad \text{для всех} \quad z \in [b_1, p]. \tag{26}$$

Так как, в частности, $|f(b_1)| \le K_1$, $|f(p)| \le K_1$, то применение леммы 3.5 «b_1, s_2, M, K_1» и леммы 3.6 «p, s_2, M, K_1» приводит к оценкам

$$|f(z)| \le K_{17} \quad \text{для всех} \quad z \in [b_1, s_2], \qquad |f(z)| \le K_{22} \quad \text{для всех} \quad z \in [p, s_2]. \tag{27}$$

Из оценок (26) и (27) следует $|f(z)| \le K_{22}$ на границе треугольника b_1, s_2, p. В силу гомеоморфности отображения f то же неравенство верно и на отрезке $[s_1, s_2]$, содержащемся в замыкании этого треугольника.

2. Пусть $|f(a_3)| > K_2$ и p — проекция точки s_2 на отрезок $[s_1, a_2]$. При любом $z \in [s_1, a_2]$ лемма 3.1 «s_1, z, s_2, a_3, M, K» дает соотношение

$$|f(z)| \le K_1 \quad \text{для всех} \quad z \in [s_1, a_2], \qquad |f(p)| \le K_1. \tag{28}$$

Построим $\mathcal{Q}$-квадрат p, c_2, c_3, s_2, для которого $a_2 \in [p, c_2]$. Для любой точки $z \in [p, c_2]$ лемма 3.1 «p, z, s_2, a_3, M, K_1» приводит к оценке

$$|f(z)| \le K_2 \quad \text{для всех} \quad z \in [p, c_2], \qquad |f(c_2)| \le K_2. \tag{29}$$

Лемма 3.5 «s_2, c_2, M, K_2» дает оценку

$$|f(z)| \le K_{18} \quad \text{для всех} \quad z \in [s_2, c_2]. \tag{30}$$

В силу (28) при любом $z \in [s_1, a_4]$ лемма 3.1 «s_1, z, a_2, a_3, M, K_1» дает оценку

$$|f(z)| \le K_2 \quad \text{для всех} \quad z \in [s_1, a_4], \quad |f(a_4)| \le K_2. \tag{31}$$

Лемма 3.6 «a_4, s_2, M, K_2» приводит к оценке

$$|f(z)| \le K_{23} \quad \text{для всех} \quad z \in [a_4, s_2]. \tag{32}$$

Из соотношений (28)–(32) следует выполнение оценки $|f(z)| \le K_{23}$ на границе трапеции s_1, c_2, s_2, a_4, содержащей отрезок $[s_1, s_2]$ в своем замыкании. В силу гомеоморфности f та же оценка выполняется и на $[s_1, s_2]$.

3. Пусть $|f(a_3)| \le K_2$ и $|f(a_4)| \le K_1$. Тогда применение леммы 3.6 «s_1, a_4, M, K_1», леммы 3.6 «a_4, a_3, M, K_2» и леммы 3.5 «s_1, a_3, M, K_2» дает оценку $|f(z)| \le K_{23}$ всюду на границе треугольника s_1, a_4, a_3. В силу гомеоморфности f та же оценка верна и на отрезке $[s_1, s_2]$, содержащемся в замыкании этого треугольника.

Таким образом, в каждой из трех ситуаций выполняется требуемое соотношение (3.7.2). □

Доказательство теоремы 2.1. Пусть на прямой L заданы точки s_1, s_2. Применив в образе параллельный перенос, не влияющий на условие $\mathrm{Q}(f, M)$, без ограничения общности можно считать, что $f(s_1) = 0$. Тогда лемма 3.7 «$s_1, s_2, M, |f(s_2)|$» дает оценку $|f(z) - f(s_1)| = |f(z)| \le |f(s_2) - f(s_1)|(4M + 3)^{23}$ для всех $z \in [s_1, s_2]$. Это означает

$$\operatorname{diam} f([s_1, s_2]) \le 2(4M + 3)^{23} |f(s_2) - f(s_1)|.$$

В силу произвольности выбора точек $s_1, s_2 \in L$ кривая $f(L)$ имеет ограниченное искривление $\mathrm{Cur}(f(L)) \le 2(4M + 3)^{23}$. □

4. Случай прямоугольного отображения

Пусть наряду с отмеченной системой декартовых координат, в которой рассматривались $\mathcal{Q}$-квадраты, на той же плоскости введена структура комплексной плоскости ($z = x + iy$), в которой точка $z = 0$ соответствует началу координат, а вещественная ось отклонена от оси абсцисс на угол $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. Любой прямоугольник со сторонами, параллельными вещественной и мнимой осям, будем называть Z-прямоугольником. Гомеоморфизм $f : R^2 \to R^2$, переводящий Z-прямоугольники в Z-прямоугольники и называемый “прямоугольным”, представляется в виде $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$ и является прямым произведением гомеоморфизмов $u : R^1 \to R^1$ и $v : R^1 \to R^1$. Рассмотрение этого специального случая мотивировано тем, что в теории дифференциальных уравнений такие отображения (отображения “с разделяющимися переменными”) играют особую роль. Покажем, что любой прямоугольный гомеоморфизм, удовлетворяющий условию $\mathrm{Q}(f, M)$, является билипшицевым.

Лемма 4.1. «Π, z_0, ε, M». *Пусть* $\varepsilon \le 1/(32M)$, *и прямоугольный гомеоморфизм* $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$ *удовлетворяет условию* $\mathrm{Q}(f, M)$. *Тогда для любого* Z*-квадрата* Π *с центром* $z_0 = x_0 + iy_0$ *и его образа —* Z*-прямоугольника* $f(\Pi)$ *с вершинами* w_1, w_2, w_3, w_4 *такими, что* $\mathrm{Re}(w_4 - w_1) = 0 = \mathrm{Im}(w_2 - w_1)$ *и* $|w_4 - w_1|/|w_2 - w_1| \le \varepsilon$, *выполняется либо*

$$|u(x_0) - \mathrm{Re}\, w_1| < (2M\varepsilon)^{1/2} |w_2 - w_1|, \tag{33}$$

либо

$$|\mathrm{Re}\, w_2 - u(x_0)| < (2M\varepsilon)^{1/2} |w_2 - w_1|. \tag{34}$$

Доказательство. Допустим противное

$$\min\{|u(x_0) - \operatorname{Re} w_1|, |u(x_0) - \operatorname{Re} w_2|\} \geq (2M\varepsilon)^{1/2}|w_2 - w_1|. \tag{35}$$

На сторонах Z-квадрата Π с вершинами $z_j = f^{-1}(w_j)$, $j = 1, \ldots, 4$, отметим точки $s_1 \in [z_1, z_4]$, $s_2 \in [z_1, z_2]$, $s_3 \in [z_2, z_3]$ и $s_4 \in [z_3, z_4]$, являющиеся последовательными вершинами $\mathcal{Q}$-квадрата T, вписанного в Π. На его сторонах отметим точки p_1 и p_2 такие, что $\operatorname{Re} p_1 = \operatorname{Re} p_2 = x_0$. Так как $u(\operatorname{Re} p_1) = u(\operatorname{Re} p_2) = u(x_0)$, то

$$|f(p_1) - f(p_2)| \leq |w_1 - w_4| \leq \varepsilon|w_1 - w_2|.$$

В силу (35) $|f(p_j) - f(s_k)| \geq (2M\varepsilon)^{1/2}|w_1 - w_2|$ при всех $j = 1, 2$ и $k = 1, 3$. Так как $\varepsilon < 1/2$ и $|f(s_1)-f(s_3)| \leq 2|w_1-w_4|+|w_1-w_2| \leq (1+2\varepsilon)|w_1-w_2| < 2|w_1-w_2|$, то применение условия $\mathrm{Q}(f, M)$ либо к парам точек s_1, p_1 и s_3, p_2, либо к парам s_1, p_2 и s_3, p_1 (в зависимости от того, на какой паре противоположных сторон $\mathcal{Q}$-квадрата T лежат точки p_1 и p_2) приводит к противоречию

$$2M\varepsilon|w_1 - w_2|^2 \leq M|f(p_1) - f(p_2)|\,|f(s_1) - f(s_3)| < M\varepsilon|w_1 - w_2|\,2|w_1 - w_2| = 2M\varepsilon|w_1 - w_2|^2. \quad \square$$

Лемма 4.2. *«L». Любой прямоугольный гомеоморфизм $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$, удовлетворяющий при любых x, y и $h \neq 0$ условию*

$$L^{-1} \leq |u(x + h) - u(x)|/|v(y + h) - v(y)| \leq L, \tag{36}$$

является L'-билипшицевым с $L' = L^5 \max\{|u(1) - u(0)|, 1/|u(1) - u(0)|\}$.

Доказательство. Для любых вещественных x_1, x_2 и y_1, y_2 таких, что $|x_1 - x_2| = |y_1 - y_2| = h$, из (36) вытекают оценки

$$L^{-1} \leq \frac{|u(x_2) - u(x_1)|}{|v(h) - v(0)|} \leq L, \quad L^{-1} \leq \frac{|u(y_2) - u(y_1)|}{|v(h) - v(0)|} \leq L,$$

из которых следует $L^{-2} \leq |u(x_2) - u(x_1)|/|u(y_2) - u(y_1)| \leq L^2$. Это означает, что гомеоморфизм u является свободно L^2-квазисимметрическим ([15], (5.6), с. 119) и, следовательно ([15], (5.7), с. 120), он является L_1-билипшицевым с константой $L_1 = L^4 \max\{|u(1) - u(0)|,\ 1/|u(1) - u(0)|\}$. Аналогично устанавливается L_2-билипшицевость гомеоморфизма $v : R^1 \to R^1$ с константой $L_2 = L^4 \max\{|v(1) - v(0)|, 1/|v(1) - v(0)|\}$. Тогда прямое произведение гомеоморфизмов u и v является L_3-билипшицевым с $L_3 = \max\{L_1, L_2\}$. Так как из (36) следует $L^{-1} \leq |u(1) - u(0)|/|v(1) - v(0)| \leq L$, то $L_3 \leq L^5 \max\{|u(1) - u(0)|, 1/|u(1) - u(0)|\} = L'$. $\square$

Теорема 4.1. *Любой прямоугольный гомеоморфизм $f(x + iy) = u(x) + iv(y)$, удовлетворяющий условию $\mathrm{Q}(f, M)$, является K-билипшицевым с константой*

$$K = (32M)^5 \max\{|u(1) - u(0)|, 1/|u(1) - u(0)|\}.$$

Доказательство. Зададим произвольно вещественные x, y и $h \neq 0$ и допустим, что $|v(y + h) - v(y)| = \varepsilon^{(0)}|u(x+h) - u(x)|$ с $\varepsilon^{(0)} < 1/(32M)$. Символом $\Pi^{(0)}$ обозначим Z-квадрат с вершинами в точках $z_1^{(0)} = x + iy$, $z_2^{(0)} = x + h + iy$, $z_3^{(0)} = x + h + i(y + h)$, $z_4^{(0)} = x + i(y + h)$ и построим последовательность вложенных Z-квадратов $\Pi^{(0)} \supset \Pi^{(1)} \supset \cdots \supset \Pi^{(k)} \supset \cdots$, для которых

a) квадрат $\Pi^{(k)}$ имеет сторону длины $|h|/2^k$, а его центр $z_0^{(k)}$ служит вершиной квадрата $\Pi^{(k+1)}$;

b) образы последовательно занумерованных вершин $z_1^{(k)}$, $z_2^{(k)}$, $z_3^{(k)}$, $z_4^{(k)}$ квадрата $\Pi^{(k)}$ удовлетворяют при всех $k = 1, 2, \ldots$ условиям $\operatorname{Re}(z_1^{(k)} - z_4^{(k)}) = 0 = \operatorname{Im}(z_1^{(k)} - z_2^{(k)})$ и

$$|f(z_2^{(k)}) - f(z_1^{(k)})| \geq |f(z_2^{(k-1)}) - f(z_1^{(k-1)})|(1 - (2M\varepsilon^{(k-1)})^{1/2}),$$

где

$$\varepsilon^{(k)} = \frac{|f(z_4^{(k)}) - f(z_1^{(k)})|}{|f(z_2^{(k)}) - f(z_1^{(k)})|} \leq (2/3)\varepsilon^{(k-1)} \leq (2/3)^k \varepsilon^{(0)}.$$

Допустим, что построен квадрат $\Pi^{(k-1)}$ с центром $z_0^{(k-1)} = x_0^{(k-1)} + iy_0^{(k-1)}$. Так как $\varepsilon^{(k-1)} \le \varepsilon^{(0)} \le 1/(32M)$, то в силу леммы 4.1 с параметрами «$\Pi^{(k-1)}, z_0^{(k-1)}, \varepsilon^{(k-1)}, M$» реализуется одна из ситуаций — (33) или (34).

Ситуация (33) в нашем случае соответствует неравенству

$$|u(x_0^{(k-1)}) - \operatorname{Re} f(z_1^{(k-1)})| < (2M\varepsilon^{(k-1)})^{1/2} |f(z_2^{(k-1)}) - f(z_1^{(k-1)})|,$$

из которого следует

$$|u(x_0^{(k-1)}) - \operatorname{Re} f(z_2^{(k-1)})| > (1 - (2M\varepsilon^{(k-1)})^{1/2}) |f(z_2^{(k-1)}) - f(z_1^{(k-1)})|. \tag{37}$$

Если $|\operatorname{Im} f(z_3^{(k-1)}) - v(y_0^{(k-1)})| \ge |\operatorname{Im} f(z_2^{(k-1)}) - v(y_0^{(k-1)})|$, то в качестве $\Pi^{(k)}$ берем Z-квадрат с диагональю $[z_0^{(k-1)}, z_2^{(k-1)}]$, полагая $z_4^{(k)} = z_0^{(k-1)}$ и $z_2^{(k)} = z_2^{(k-1)}$. В противном случае в качестве $\Pi^{(k)}$ берем Z-квадрат с диагональю $[z_0^{(k-1)}, z_3^{(k-1)}]$, полагая $z_1^{(k)} = z_0^{(k-1)}$ и $z_3^{(k)} = z_3^{(k-1)}$. В любом из этих случаев, используя (37) и учитывая $(1 - (2M\varepsilon^{(k-1)})^{1/2}) \ge 3/4$, получаем оценку

$$|f(z_1^{(k)}) - f(z_4^{(k)})| \le (1/2)|f(z_1^{(k-1)}) - f(z_4^{(k-1)})| =$$
$$= (1/2)\varepsilon^{(k-1)} |f(z_2^{(k-1)}) - f(z_1^{(k-1)})| \le (2/3)\varepsilon^{(k-1)} |f(z_1^{(k)}) - f(z_2^{(k)})|,$$

т. е. $\varepsilon^{(k)} \le (2/3)\varepsilon^{(k-1)}$. Из (37) следует также $|f(z_1^{(k)}) - f(z_2^{(k)})| \ge (1 - (2M\varepsilon^{(k-1)})^{1/2}) |f(z_1^{(k-1)}) - f(z_2^{(k-1)})|$. Таким образом, построенный квадрат $\Pi^{(k)}$ удовлетворяет требованиям a) и b).

В ситуации (34) в качестве $\Pi^{(k)}$ выбирается тот из двух Z-квадратов с диагональю $[z_0^{(k-1)}, z_1^{(k-1)}]$ или $[z_0^{(k-1)}, z_4^{(k-1)}]$ соответственно, образ которого имеет меньший размер вдоль мнимой оси. Выполнение условия b) для выбранного квадрата $\Pi^{(k)}$ проверяется аналогичным образом.

Так как для каждого $k = 1, 2, \ldots$ выполняется оценка $\varepsilon^{(k)} \le (2/3)^k \varepsilon^{(0)} < (2/3)^k/(32M)$, то для построенной последовательности Z-квадратов верно неравенство

$$|f(z_1^{(k)}) - f(z_2^{(k)})| \ge |f(z_1^{(0)}) - f(z_2^{(0)})| \prod_{j=0}^{k-1} (1 - (2M\varepsilon^{(j)})^{1/2}) \ge$$
$$\ge |f(z_1^{(0)}) - f(z_2^{(0)})| \prod_{j=0}^{k-1} (1 - (2/3)^{j/2}/4).$$

Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{\infty} (2/3)^{k/2}/4$ следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \ln(1 - (2/3)^{k/2}/4)$, равносильная сходимости бесконечного произведения $\kappa = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - (2/3)^{k/2}/4) > 0$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем оценку

$$\liminf_{k\to\infty} |f(z_1^{(k)}) - f(z_2^{(k)})| \ge \kappa |f(z_1^{(0)}) - f(z_2^{(0)})| > 0.$$

Поскольку $|z_1^{(k)} - z_2^{(k)}| \to 0$ при $k \to \infty$, эта оценка противоречит непрерывности отображения f.

Следовательно, допущение не реализуется, и для любых x, y и $h \ne 0$ выполняется оценка $|v(y+h) - v(y)| \ge |u(x+h) - u(x)|/(32M)$. Полагая $L = 32M$, получаем правую часть условия (36) в лемме 4.2. Применив то же рассуждение к комплексной структуре $z' = x' + iy'$, $x' = y$, $y' = x$, $f(z') = u'(x') + iv'(y')$, $u' = v$, $v' = u$, получим выполнение левой половины условия (36). Теперь лемма 4.2 дает требуемую оценку билипшицевости гомеоморфизма f. $\square$

Автор признателен академику М.М. Лаврентьеву, указавшему на важность рассмотрения частного случая прямоугольных гомеоморфизмов в этой и подобных ей задачах с геометрическими условиями.

Литература

1. Vuorinen M. *Conformal geometry and quasiconformal mappings.* – Lect. Notes Math., Springer-Verlag, Berlin e.o., 1988. – V. 1319.
2. Сычев А.В. *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.
3. Gehring F.W. *Rings and quasiconformal mappings in space* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – V. 103. – P. 353–393.
4. Gehring F., Väisälä J. *On the geometric definition for quasiconformal mappings* // Comment. math. helv. – 1961. – V. 36. – P. 19–32.
5. Hinkkanen A. *Rectangles and quasiconformal mappings* // Math. Z. – 1983. – V. 183. – P. 539–545.
6. Aseev V.V., Varisov A.K. *Geometric definition for quasiconformality and plane labyrinths* // Uzbek math. J. – 1996. – № 3. – P. 3–8.
7. Cazacu A. *On the Grötzsch and Rengel inequalities* // Lect. Notes Math. – 1979. – V. 747. – P. 10–23.
8. Cazacu A. *On the geometric definition of the quasiconformality* // Ann. Pol. Math. – 1981. – V. 39. – P. 31–36.
9. Жабборов Н.М. *Пример неквазиконформного отображения, удовлетворяющего модулярному условию куба* // Узбекск. матем. журн. – 1994. – № 1. – С. 22–29.
10. Жабборов Н.М. *Условие квадрата и квазиконформность* // Матем. анализ и дифференц. уравнения (межвуз. сб. науч. тр.). – Новосибирск, Новосибирский гос. ун-т. – 1991. – С. 67–72.
11. Aseev V.V. *Distortion of moduli of cubes and quasiconformality* // Siberian Adv. Math. – 1993. – V. 3. – № 4. – P. 1–7.
12. Tukia P., Väisälä J. *Quasisymmetric embeddings of metric spaces* // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A1 Math. – 1980. – V. 5. – P. 97–114.
13. Lehto O., Virtanen K. *Quasikonforme Abbildungen.* – Springer-Verlag, Berlin e.o., 1965. – 270 S.
14. *Нечеткие множества и теория возможностей. Последние достижения* / под ред. Р. Ягера. – М.: Радио и связь, 1986. – 408 с.
15. Aseev V.V., Vamanamurthy M., Vuorinen M. *Quasiadditive properties and bilipschitz conditions* // Aequations Math. – 1998. – V. 56. – P. 98–130.

Институт математики Сибирского отделения
Российской Академии наук

Поступила
02.04.2002