ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 517.977.56

В.А. ТЕРЛЕЦКИЙ

ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА В УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМАХ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вариационный принцип максимума впервые был получен как самостоятельный результат В.А. Срочко [1] для гиперболических систем канонического вида и Гурса–Дарбу. Простота и фактическая эквивалентность этих систем объясняется одинаковым строением семейств их характеристик: каждая характеристика одного из семейств ортогональна любой характеристике другого семейства. Позднее вариационный принцип максимума удалось распространить на более общие гиперболические системы [2], в которых фигурируют криволинейные характеристики произвольного конечного числа семейств. Однако в работах [2]–[4] существенно использовалась изначальная запись гиперболической системы в инвариантах Римана, что позволяло достаточно легко провести сужение дифференциального оператора на характеристики и получить необходимые оценки для приращения траектории через параметры вариаций управления. Дальнейшие же попытки обобщения данного результата на системы многомерных гиперболических уравнений выявили потребность в принципиально другой технике, т. к. в общем случае многомерные гиперболические системы не приводятся к инвариантному виду в обычном понимании этого термина.

В предлагаемой работе, как и ранее [2]–[4], получен вариационный принцип максимума для одномерных гиперболических систем, но записанных в общей неинвариантной форме. Обоснованием такой "промежуточности" цели могут служить, например, следующие обстоятельства. Во-первых, предварительное исследование одномерных систем общего вида позволяет сравнительно легко заготовить и апробировать многие конструкции, понятия, утверждения, которые при переносе на многомерные системы меняются незначительно, по крайней мере, с формальной точки зрения. Во-вторых, в большинстве приложений системы имеют неинвариантную форму записи. Приведение их к инвариантному виду требует пересчета путем линейной замены переменных системы дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий, целевого функционала. Понятно, что гораздо удобнее пользоваться условием оптимальности, сформулированным в терминах исходной постановки задачи. Наконец, в-третьих, немаловажным моментом является возможность проверки нового результата путем сравнения с уже имеющимся.

1. Постановка задачи оптимального управления

В плоскости независимых переменных (s,t) рассмотрим прямоугольник $\mathrm{P} = S\times T$, $S=[s_0,s_1]$, $T=[t_0,t_1]$. Пусть Ω, G, G_0, G_1, $\mathcal{D}_0$, $\mathcal{D}_1$ — соответственно его полная, боковая, левая, правая, верхняя и нижняя границы, $\Omega = G\cup\mathcal{D}_0\cup\mathcal{D}_1$, $G=G_0\cup G_1$. Внутри прямоугольника P зафиксируем вертикальный отрезок $\overline{G}=\{(s,t) : s=\overline{s},\ t\in T\}$, выбрав $\overline{s}\in(s_0,s_1)$.

Управляемый процесс $\{u;x\}$ с r-мерным управлением $u=u(s,t)$ и n-мерным состоянием $x=x(s,t)$ подчиним системе полулинейных гиперболических уравнений

$$x_t + A(s,t)x_s = f(x,u,s,t) \tag{1.1}$$

с начальными условиями на нижней грани $\mathcal{D}_0$

$$x(s,t_0)=x^0(s),\quad s\in S, \tag{1.2}$$

и смешанными условиями на боковой границе

$$B^{-}(s,t)x(s,t) = q(s,t), \quad (s,t) \in G. \tag{1.3}$$

Здесь матрица $B^{-}(s,t)$ конструируется по специальному правилу, которое рассматривается в следующем параграфе, с помощью матрицы $A(s,t)$ и единичного вектора внешней нормали к границе Ω прямоугольника P так, чтобы граничные условия (1.3) были корректны по отношению к линейному дифференциальному оператору системы (1.1).

Множество допустимых управлений выберем как совокупность измеримых в P вектор-функций, удовлетворяющих почти всюду в нем ограничению

$$u(s,t) \in U \tag{1.4}$$

с заданным компактным множеством $U \subset E^r$.

Поставим задачу о поиске допустимого управления, минимизирующего на решениях системы (1.1) с начально-краевыми условиями (1.2), (1.3) функционал

$$J(u) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{D}_0} \varphi(B^{+}x, s, t) d\omega + \int_T g(A(\overline{s},t)x(\overline{s},t),t)dt + \int\int_{\mathrm{P}} \Phi(x,u,s,t) ds\, dt. \tag{1.5}$$

Функции $\varphi(x,s,t)$, $g(x,t)$ и $\Phi(x,u,s,t)$, $f(x,u,s,t)$ задаются соответственно на множествах $E^n \times S \times T$, $E^n \times T$ и $E^n \times E^r \times S \times T$, а $n \times n$-матрица $B^{+}(s,t)$ строится в следующем параграфе совместно с матрицей $B^{-}(s,t)$.

Относительно параметров задачи (1.1)–(1.5) будем считать выполненными следующие предположения:

1) $A(s,t)$ — гладкая симметричная матрица с знакопостоянными и различными всюду в P собственными функциями;
2) $f(x,u,s,t)$, $\varphi(x,s,t)$, $g(x,t)$, $\Phi(x,u,s,t)$ непрерывны по совокупности своих аргументов всюду в области определения вместе с частными производными по x;
3) вектор-функции $\varphi_x(x,s,t)$, $g_x(x,t)$, $\Phi_x(x,u,s,t)$ и матричная функция $f_x(x,u,s,t)$ удовлетворяют условию Липшица по x;
4) $x^0(s)$ и $g(s,t)$ интегрируемы с квадратом по Лебегу в областях S и G соответственно.

Понятно, что задача оптимального управления (1.1)–(1.5) не до конца формализована, т. к., во-первых, пока не сказано, в каком смысле понимается решение x системы (1.1) в условиях разрывного управления u, а во-вторых, не конкретизирован способ построения матриц $B^{-}(s,t)$ и $B^{+}(s,t)$, участвующих в формировании граничных условий (1.3) и терминальной части функционала (1.5). Эти вопросы рассматриваются в следующем параграфе.

2. Допустимый процесс

Введем понятие обобщенного решения, следуя работам [5], [6], в которых доказано его существование и единственность для многомерных гиперболических систем вида (1.1). Пусть (ν_0, ν) — внешний вектор единичной нормали к Ω, E — единичная $n \times n$-матрица. Определим в точках $(s,t) \in \Omega$ матричную функцию

$$B(s,t) = \nu_0 E + \nu A(s,t).$$

Очевидно, что матрица $B(s,t)$ есть всякий раз либо $\pm E$, либо $\pm A(s,t)$ в зависимости от принадлежности точки (s,t) конкретной грани прямоугольника P. Как известно, для симметричных матриц всегда можно построить ортогональную матрицу перехода $\mathcal{L}(s,t)$ к ее собственной матрице, причем $\mathcal{L}(s,t)^T \cdot \mathcal{L}(s,t) = E$ (здесь и далее ^{T} — знак транспонирования). Пусть $Z(s,t)$ — собственная матрица матрицы $B(s,t)$. Линейное преобразование

$$B(s,t) = \mathcal{L}^T(s,t) Z(s,t) \mathcal{L}(s,t), \quad (s,t) \in \Omega,$$

будем считать известным. Обозначим через $Z^-(s,t)$ и $Z^+(s,t)$ матрицы, полученные из матрицы $Z(s,t)$ заменой на нулевые соответственно всех ее положительных и отрицательных диагональных элементов. Тогда матрицы B^+ и B^- определяются по правилу

$$B^-(s,t) = \mathcal{L}^T(s,t)Z^-(s,t)\mathcal{L}(s,t), \quad B^+(s,t) = \mathcal{L}^T(s,t)Z^+(s,t)\mathcal{L}(s,t).$$

Обозначим через D дифференциальный оператор системы (1.1) и введем

Определение обобщенного решения. Функцию $x \in L_2^n(\mathrm{P})$, имеющую след $\overline{x} \in L_2^n(\Omega)$, назовем обобщенным решением системы (1.1) со смешанными условиями (1.2), (1.3), если существует такая последовательность гладких в Р функций $y^k \in C_1^n(\mathrm{P})$, что

$$\|y^k - x\|_{L_2^n(\mathrm{P})} + \|Dy^k - f\|_{L_2^n(\mathrm{P})} + \|y^k - \overline{x}\|_{L_2^n(\Omega)} \longrightarrow 0, \quad k \to \infty. \tag{2.1}$$

Заметим, что для обобщенного решения справедливо тождество

$$\langle y, f\rangle_{L_2^n(\mathrm{P})} + \langle D^*y, x\rangle_{L_2^n(\mathrm{P})} = \langle y, B\overline{x}\rangle_{L_2^n(\Omega)}, \tag{2.2}$$

в котором y — произвольная гладкая функция, D^* — дифференциальный оператор, формально сопряженный к D, т. е.

$$D^*x = x_t + [A(s,t)x]_s.$$

Действительно, пусть последовательность гладких функций y^k аппроксимирует обобщенное решение x. Воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\langle y, Dy^k\rangle_{L_2^n(\mathrm{P})} + \langle D^*y, y^k\rangle_{L_2^n(\mathrm{P})} = \langle y, By^k\rangle_{L_2^n(\Omega)}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Перейдя к пределу при $k \to \infty$ с учетом (2.1), получим (2.2).

Как уже отмечалось, в работах [5], [6] доказано существование и единственность обобщенного решения для многомерного варианта линейной по x системы (1.1) со смешанными условиями (1.2), (1.3). При использовании этого результата и предположения о непрерывности по x правой части системы (1.1) по Липшицу, в [7], [8] доказана теорема существования и единственности обобщенного решения и для полулинейной системы (1.1).

Таким образом, каждому допустимому управлению u соответствует единственное обобщенное решение x задачи (1.1)–(1.3). Пару $\{u; x\}$, в которой u — допустимое управление, а x — соответствующее ему обобщенное решение, будем называть допустимым процессом.

3. Характеристики системы и ее интегральный эквивалент

Введем характеристики системы (1.1), намеренно используя подход, общепринятый для многомерных гиперболических систем. Пусть в Р уравнением $\chi(s,t) = c$, $\chi \in C_1(\mathrm{P})$, $c \in E^1$, задана кривая $\mathcal{X}_c$. Дополнительно предположим, что градиент $\nabla\chi$ не вырожден всюду в Р, т. е. $\chi_t(s,t)^2 + \chi_s(s,t)^2 \neq 0$, $(s,t) \in \mathrm{P}$. Говорят, что кривая $\mathcal{X}_c$ является характеристикой системы (1.1), если

$$\det|\chi_t(s,t)E + \chi_s(s,t)A(s,t)| = 0. \tag{3.1}$$

Ясно, что условие (3.1) эквивалентно требованию

$$\chi_t(s,t) + \lambda_i(s,t)\chi_s(s,t) = 0, \tag{3.2}$$

где $\lambda_i(s,t)$ — i-е собственное значение матрицы A в точке (s,t), $i = 1, 2, \ldots, n$. Таким образом, каждому собственному значению λ_i соответствует характеристическое семейство $\mathcal{X}^{(i)}$ с характеристиками $\mathcal{X}_c^{(i)}$, причем $(s,t) \in \mathcal{X}_c^{(i)}$ тогда и только тогда, когда $\chi_i(s,t) = c$ и $\chi_i(s,t)$ — решение уравнения (3.2).

Уравнение (3.2) определяет функцию $\chi(s,t)$ и, следовательно, характеристики $\mathcal{X}_c$ системы (1.1) неединственным образом. Устраним этот недостаток следующим способом. Потребуем, чтобы функция $\chi_i(s,t)$ обращалась в нуль в точке $(\xi,\tau) \in \mathrm{P}$, и покажем, что такая функция

$\chi_i(s,t;\xi,\tau)$ строится однозначно. Для этого возьмем решение $s=s_i(\xi,\tau;t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dt}=\lambda_i(s,t),$$

обладающее свойством: $\xi=s_i(\xi,\tau;t)$ при $\tau=t$. Можно доказать [2], что функция $\chi_i(s,t;\xi,\tau)=s_i(s,t;\tau)-\xi$ удовлетворяет уравнению (3.2), и равенство $\chi_i(s,t;\xi,\tau)=c$ определяет характеристику $\mathcal{X}_c^{(i)}$, имеющую явный вид $s=s_i(\xi+c,\tau;t)$.

С геометрической точки зрения параметр c означает величину сдвига по s характеристики $\mathcal{X}_c^{(i)}$ относительно характеристики $\mathcal{X}_0^{(i)}$ в момент $t=\tau$. В другие моменты времени $t\neq\tau$ расстояние между этими характеристиками задается выражением $|s_i(\xi+c,\tau;t)-s_i(\xi,\tau;t)|$, вычислить которое явно, вообще говоря, невозможно. Тем не менее, справедлива [2] асимптотическая оценка

$$s_i(\xi+\varepsilon,\tau;t)-s_i(\xi,\tau;t)=s_{i_\xi}(\xi,\tau;t)\varepsilon+o(\varepsilon) \tag{3.3}$$

с коэффициентом при малом параметре ε, удовлетворяющим неравенствам

$$0<\exp[(t_1-t_0)\lambda_s^{\min}]\le s_{i_\xi}(\xi,\tau;t)\le\exp[(t_1-t_0)\lambda_s^{\max}], \tag{3.4}$$

$$\lambda_s^{\min}=\min_{i=1,2,\dots,n}\min_{(s,t)\in\mathrm{P}}\left(\frac{\partial\lambda_i(s,t)}{\partial s}\right),\quad \lambda_s^{\max}=\max_{i=1,2,\dots,n}\max_{(s,t)\in\mathrm{P}}\left(\frac{\partial\lambda_i(s,t)}{\partial s}\right).$$

С помощью характеристической функции и параметров $\xi\in(s_0,s_1)$, $\tau,t\in T,\varepsilon>0$, $i\in\{1,2,\dots,n\}$ зададим полоску

$$\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau;\bar t\,)=\{(s,t)\in\mathrm{P}:0\le\chi_i(s,t;\xi,\tau)\le\varepsilon,\ t\le\bar t\}$$

и введем обозначения: $\partial\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau;\bar t\,)$, $\overline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau;\bar t\,)$, $\underline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau;\bar t\,)$ — общая, верхняя и нижняя границы области $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau;\bar t\,)$ соответственно; $(s_i'(\xi,\tau),t_i'(\xi,\tau))$ — начальная точка характеристики $\mathcal{X}_0^{(i)}$. Далее, там, где это не вызывает разночтений, параметры ξ, τ, $\bar t$ для краткости опускаются. Отметим, что в отличие от верхней границы $\overline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}$, которую здесь будем считать отрезком, параллельным оси OS и соединяющим в момент $t=\bar t$ характеристики $\mathcal{X}_0^{(i)}$ и $\mathcal{X}_\varepsilon^{(i)}$, нижняя граница $\underline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}$ может залегать не только на $\mathcal{D}_0$, но и на G_0 и G_1.

Пусть $\widehat\nu=\widehat\nu(s,t)$, $\widehat\nu=(\nu_0,\nu)$ — вектор единичной внешней нормали в точках контура $\partial\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$ полоски $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$. Сформируем матрицу

$$\mathcal{B}(s,t)=\nu_0(s,t)E+\nu(s,t)A(s,t)$$

и через $\mathcal{L}(s,t)$ будем, как и ранее, обозначать линейное ортонормированное преобразование, приводящее матрицу $A(s,t)$ к диагональной матрице $\Lambda(s,t)$, т е.

$$\mathcal{L}^T(s,t)\cdot\mathcal{L}(s,t)=E,\quad \mathcal{L}(s,t)A(s,t)\cdot\mathcal{L}^T(s,t)=\Lambda(s,t).$$

Заметим, что на боковых границах полоски $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$ вектор $\widehat\nu$ коллинеарен $\nabla\chi_i$ и, значит (см. (3.2)), матрица $\mathcal{B}(s,t)$ здесь вырождена, причем, как нетрудно проверить, ее аннулирующим вектором служит i-й столбец матрицы $\mathcal{L}^T$, т. е.

$$\mathcal{B}(s,t)\ell^{(i)}(s,t)=0,\quad (s,t)\in\partial\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}\setminus(\underline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}\cup\overline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}). \tag{3.5}$$

Домножим теперь систему (1.1) слева на вектор $\ell^{(i)}$ и, считая x обобщенным решением задачи (1.1)–(1.3), проинтегрируем полученное равенство по полоске $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$. На основании тождества (2.2) будем иметь

$$\langle\ell^{(i)},\mathcal{B}x\rangle_{L_2^n(\partial\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)})}=\langle\ell^{(i)},f\rangle_{L_2^n(\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)})}+\langle D^*\ell^{(i)},x\rangle_{L_2^n(\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)})}.$$

Отсюда и из (3.5) следует равенство

$$\langle\ell^{(i)},x\rangle_{L_2^n(\overline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)})}=-\langle\ell^{(i)},\mathcal{B}x\rangle_{L_2^n(\underline{\partial\mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)})}+\langle\ell^{(i)},f\rangle_{L_2^n(\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)})}+\langle D^*\ell^{(i)},x\rangle_{L_2^n(\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)})}. \tag{3.6}$$

Введем функцию $r_i = r_i(s,t)$, определив ее дифференциальным равенством

$$r_{i_t} + \lambda_i(s,t) r_{i_s} = \langle \ell^{(i)}, f(x,u,s,t)\rangle_{E^n} + \langle D\ell^{(i)}, x\rangle_{E^n}, \quad (s,t) \in \mathrm{P}, \tag{3.7}$$

и начальным условием

$$r_i(s,t) = \langle \ell^{(i)}(s,t), x(s,t)\rangle_{E^n}, \quad (s,t) \in \Omega \setminus \mathcal{D}_1. \tag{3.8}$$

Понятно, что функция r_i есть i-й инвариант Римана системы (1.1). Действительно, проинтегрируем равенство (3.7) по полоске $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$ с учетом условий (3.8) (как это сейчас будет установлено, их "избыточность" имеет лишь формальный характер) и вычтем результат из тождества (3.6). Получим равенство

$$\int_{\partial \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\bar{t})} (r_i - \langle \ell^{(i)}, x\rangle_{E^n}) ds = \int_{t_i'}^{\bar{t}} \int_{\partial \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\tau)} \lambda_s (r_i - \langle \ell^{(i)}, x\rangle_{E^n}) ds\, d\tau,$$

из которого следует, что $r_i = \langle \ell^{(i)}, x\rangle_{E^n}$ почти всюду в P. Следовательно, для вектор-функции $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ справедливы соотношения

$$x(s,t) = \mathcal{L}^T(s,t) r(s,t), \quad r(s,t) = \mathcal{L}(s,t) x(s,t). \tag{3.9}$$

Обозначим для краткости правые части равенств (3.7) новыми функциями $R_i = R_i(r,u,s,t)$, $i = 1,2,\ldots,n$. После интегрирования (3.7) вдоль соответствующей характеристики $\eta = s_i(s,t;\alpha)$, $\alpha \in [t_i'(s,t), t]$ и учета для инвариантов смешанных условий $(\nu\Lambda)^- r = \mathcal{L}q$ на $G_0 \cup G_1$, $r = \mathcal{L}x^0$ на $\mathcal{D}_0$ будем иметь

$$\begin{gathered} r_i(s,t) = r_i(s_i', t_i') + \int_{t_i'}^{t} R_i(r,u,\eta,\alpha) d\alpha, \\ r_i(s_i', t_i') = \begin{cases} -\langle \ell^i, q\rangle |\lambda_i|^{-1}, & (s_i', t_i') \in G_0 \cup G_1; \\ \langle \ell^i(s_i', t_0), x^0(s_i')\rangle, & (s_i', t_i') \in \mathcal{D}_0. \end{cases} \end{gathered} \tag{3.10}$$

Сделанные предположения на параметры системы (1.1) позволяют оценить скорость роста правых частей в (3.7) неравенством

$$|R_i(r,u,s,t)| \le \mathrm{const} \cdot \|r\|_{E^n} + \|f(0,u,s,t)\|_{E^n}, \ \ r \in E^n, \ \ u \in U, \ \ (s,t) \in \mathrm{P}.$$

Отсюда и из (3.10) можно получить оценки

$$\begin{aligned} |r_i(s,t)| \le M\Bigg(\|q'(s_i', t_i')\| &+ \int_{t_i'}^{t} \|f(0,u,\eta,\alpha)\| \Big|_{\eta = s_i(s,t;\alpha)} d\alpha + \\ &+ \int_{\partial \triangle(s,t) \cap \Omega} \|q'(s,t)\| d\omega + \int\int_{\triangle(s,t)} \|f(0,u,\eta,\alpha)\| d\eta\, d\alpha. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь $q'(s_i', t_i') = q(s_i', t_i')$, если $(s_i', t_i') \in G_0 \cup G_1$, $q'(s_i', t_i') = x^0(s_i')$, если $(s_i', t_i') \in \mathcal{D}_0$, $\triangle(s,t)$ — область зависимости решения для точки (s,t), $\triangle(s,t) = \{(\xi,\tau) \in \mathrm{P} : \min\limits_{k=1,2,\ldots,n} s_k(s,t;\tau) \le \xi \le \max\limits_{k=1,2,\ldots,n} s_k(s,t;\tau)\}$, $\partial\triangle(s,t)$ — граница области $\triangle(s,t)$.

Подробное доказательство оценок (3.11) не приводится, с одной стороны, ввиду его громоздкости, а, с другой, — по причине простоты идеи, заключающейся в свойстве сжатия интегральных рекурсивных отображений.

Замечание. Далее существенно будут использоваться возможность сужения дифференциального оператора системы (1.1) на ее характеристики (равенство (3.7)) и знание структуры зависимости решения задачи (1.1)–(1.3) от начальных данных и неоднородности системы (1.1) (оценка (3.11)). Подчеркнем, что получить результаты (3.7) и (3.11) можно, действуя по классической для исследований одномерных гиперболических систем схеме. А именно, ввести линейную невырожденную замену переменных (3.9), построить инвариантную систему уравнений и сделать последнюю основным объектом изучения ввиду ее существенно большего удобства по сравнению с исходной системой (1.1). Однако, как уже отмечалось во введении, такой путь не имеет перспективы при исследованиях многомерных систем. Напротив, описанный способ и в многомерном случае позволяет провести специальное сужение дифференциального оператора, подобное (3.7), и установить оценку типа (3.11).

Отметим также, что оценка (3.11) в отличие от аналогичной оценки в [3] является более тонкой (фактически она не улучшаема), обобщает оценку из [4], изначально привязанную к конкретному виду вариации управления, а также может применяться не только для распределенных в P, но и для сосредоточенных на границе Ω управлений. Последним свойством обладают различные усредненные оценки (часто их называют энергетическими неравенствами), которые используются для доказательства теорем существования и единственности решений гиперболических систем. Но, во-первых, такие оценки принципиально не позволяют установить связь между силой вариации управления и величиной приращения траектории именно в точках области P, что, как правило, необходимо в теории и методах оптимального управления, а, во-вторых, они являются очевидным следствием из (3.11).

4. Поточечный принцип максимума

Используя методику, подробно изложенную в работах [3], [4], [7], [8], можно показать, что для двух произвольных допустимых процессов $\{u; x\}$ и $\{\widetilde{u} = u + \triangle u;\ \widetilde{x} = x + \triangle x\}$ справедлива формула приращения целевого функционала

$$\triangle J(u) = J(\widetilde{u}) - J(u) = -\int\int_{\mathrm{P}} \triangle_{\widetilde{u}} H(\psi, x, u, s, t)\, ds\, dt + \eta(u, \widetilde{u}). \tag{4.1}$$

Здесь $H(\psi, x, u, s, t) = \langle \psi, f \rangle_{E^n} - \Phi(x, u, s, t)$ — функция Понтрягина, $\triangle_{\widetilde{u}} H = H(\psi, x, \widetilde{u}, s, t) - H(\psi, x, u, s, t)$ — частное приращение, $\eta = \eta(u, \widetilde{u})$ — остаточный член формулы приращения, имеющий вид

$$\eta = \int_{\Omega \setminus \mathcal{D}_0} O_\varphi(\|B^+ \triangle x\|^2_{E^n})\, d\omega + \int_T O_g(\|A(\overline{s}, t)\Delta x(\overline{s}, t)\|^2_{E^n})\, dt -$$
$$- \int\int_P [\langle \Delta_{\widetilde{u}} H_x, \Delta x \rangle_{E^n} + O_H(\|\Delta x\|^2_{E^n})]\, ds\, dt, \tag{4.2}$$

где O_φ, O_g, O_H — остаточные члены разложения в ряд Тейлора до линейного слагаемого частных приращений по x функций φ, g и H соответственно; $\psi = \psi(s, t)$ — обобщенное решение сопряженной задачи

$$\begin{gathered}
D^* \psi = -H_x(\psi, x, u, s, t), \quad (s, t) \in \mathrm{P}; \\
\psi(s, t_1) = -\varphi_x(x(s, t_1), s, t_1), \quad s \in S; \\
B^+(s, t)[\psi(s, t) + \varphi_x(B^+ x, s, t) = 0, \quad (s, t) \in G; \\
A(\overline{s}, t)[\psi(\overline{s} + 0, t) - \psi(\overline{s} - 0, t) + g_x(A(\overline{s}, t) x(\overline{s}, t), t)] = 0, \quad t \in T.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Сопряженная задача (4.3) является линейным вариантом задачи (1.1)–(1.3) и отличается от последней лишь "обратным" временем и скачком на отрезке $s = \overline{s}$, где функция ψ терпит разрыв первого рода. Поэтому свойства ее обобщенного решения (в частности, оценка роста типа (3.1)) идентичны свойствам обобщенного решения задачи (1.1)–(1.3). Нетрудно увидеть, что приращение Δx удовлетворяет задаче

$$\begin{gathered}
D \triangle x = f(\widetilde{x}, \widetilde{u}, s, t) - f(x, \widetilde{u}, s, t) + \triangle_{\widetilde{u}} f(x, u, s, t), \quad (s, t) \in \mathrm{P}; \\
\triangle x(s, t_0) = 0, \quad s \in S, \quad B^-(s, t) \triangle x(s, t) = 0, \quad (s, t) \in \Omega \setminus \mathcal{D}_0,
\end{gathered} \tag{4.4}$$

а поэтому на вариации управления

$$\Delta u(s,t) = \begin{cases} v - u(s,t), & (s,t) \in \mathrm{P}_\varepsilon(\xi,\tau;\delta); \\ 0, & (s,t) \in P \setminus \mathrm{P}_\varepsilon(\xi,\tau;\delta), \end{cases} \tag{4.5}$$

в которой $\mathrm{P}_\varepsilon(\xi,\tau;\delta) = (\xi-\delta, \xi+\delta) \times (\tau-\varepsilon, \tau) \cap \mathrm{P}$ — область "игольчатого" варьирования, $v \in U$, $(\xi,\tau) \in \mathrm{P}$, $\delta > 0$ — произвольные фиксированные параметры, оно в силу оценки (3.11) имеет почти всюду в P порядок ε. Остаток (4.2) в этом случае, очевидно, имеет порядок ε^2, а главной частью формулы приращения (4.1) с порядком ε выступает первое слагаемое. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Пусть u — оптимальное управление в задаче* (1.1)–(1.5)*, а x, ψ — соответствующие ему решения исходной* (1.1)–(1.3) *и сопряженной* (4.3) *смешанных задач. Тогда почти всюду в* P *выполняется условие максимума*

$$H(\psi,x,u,s,t) = \max_{v\in U} H(\psi,x,v,s,t). \tag{4.6}$$

Далее условие (4.6), как и ранее [4], будем называть поточечным принципом максимума.

5. Вариационный принцип максимума

Вариация (4.5) обеспечивает равномерную малость порядка ε приращения $\triangle x$ во всей области P, т.к. характеристики всех семейств системы (1.1) "прошивают" область варьирования $\mathrm{P}_\varepsilon(\xi,\tau;\delta)$ за время ε. Картина принципиально меняется, если вариацию управления распределить вдоль какой-нибудь характеристики. Действительно, как сразу же следует из оценки (3.11), вариация

$$\triangle u(s,t) = \begin{cases} v(t) - u(s,t), & (s,t) \in \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau), \quad v(t) \in U; \\ 0, & (s,t) \in \mathrm{P} \setminus \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau), \end{cases} \tag{5.1}$$

в характеристической полоске

$$\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau) = \{(s,t) \in \mathrm{P} : 0 \le \chi_i(s,t;\xi,\tau) \le \varepsilon\} \tag{5.2}$$

вызывает приращение $\triangle x$, определяемое задачей (4.4), которому соответствует инвариантное приращение $\triangle r$ со следующими характеристиками компонент:

$$\begin{aligned} &\triangle r_j(s,t) \sim \varepsilon, \quad (s,t) \in \mathrm{P}, \quad j = 1,2,\dots,n, \quad j \ne i, \\ &\triangle r_i(s,t) \sim \varepsilon, \quad (s,t) \in \mathrm{P} \setminus \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau), \\ &\triangle r_i(s,t) \sim \varepsilon^0, \ \ (s,t) \in \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau). \end{aligned}$$

Таким образом, $\triangle r_i$, а следовательно (см. (3.9)), и вся вектор-функция $\triangle x$ внутри полоски $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau)$ не зависят от ε (обозначение "$\sim \varepsilon^0$" используется именно в этом смысле). В то же время мера полосок $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}(\xi,\tau)$ и $\mathrm{P}_\varepsilon(\xi,\tau;\delta)$ имеет одинаковый порядок ε, и, как нетрудно убедиться (технические детали подробно изложены в ([4], с. 69–75)), ту же степень малости на вариации (5.1) сохраняет приращение функционала, которое представимо в виде

$$\begin{aligned} \triangle J(u) = \int_{\partial \mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}} \triangle_{\widetilde{x}} \varphi(B^+x,s,t)d\omega + \int_{t'}^{t''} \triangle_{\widetilde{x}} g(A(\overline{s},t)x,t)dt + \\ + \int\int_{\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}} [\langle \psi, D\triangle x\rangle_{E^n} - \triangle_{\widetilde{x}v} H(\psi,x,u,s,t)]ds\,dt + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Здесь $[t',t'']$ — временной интервал, в течение которого отрезок $\overline{G}$ находится на полоске $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$ ($t' = t''$, если отрезок $\overline{G}$ не пересекает характеристику $\mathcal{X}_0^{(i)}$). Заметим (см. третий параграф), что приращение $\triangle x$ внутри полоски $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$ в главной своей части направлено вдоль вектора $\ell^{(i)}$, а именно, $\triangle x = \ell^{(i)}\triangle r_i + O(\varepsilon)$. Тогда, положив по определению, что $\overline{x} = x + \ell^{(i)}\triangle r_i$, $(s,t) \in \mathcal{X}_0^{(i)}$, приращения по $\widetilde{x}$ в (5.3) можно заменить на приращения по $\overline{x}$ с сохранением точности остатка приращения (5.3). После проведения интегрирования по частям (см. (2.2)) скалярного произведения $\langle \psi, D\triangle x\rangle_{E^n}$ в полоске $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$, аппроксимации интегралов по $\mathrm{P}_\varepsilon^{(i)}$ интегралами по характеристике $\mathcal{X}_0^{(i)}$, а интегралов по отрезкам $\overline{\partial \mathrm{P}}_\varepsilon^{(i)}$ и $[t', t'']$ — соответствующими значениями подинтегральных функций в точках на характеристике $\mathcal{X}_0^{(i)}$, получим

$$\triangle J(u) = \varepsilon\Big\{[\triangle_{\overline{x}}\varphi(B^+x, s_i'', t_i'') + \langle \psi(s_i'', t_i''), \ell^{(i)}(s_i'', t_i'')\rangle_{E^n}\triangle r_i(s_i'', t_i'')]s_{i_\xi}(\xi, \tau, t_i'')\mu(s_i'', t_i'') + \\ + \triangle_{\overline{x}}g(A(\overline{s}, \overline{t}\,)x(\overline{s}, \overline{t}\,), \overline{t}\,)s_{i_\xi}(\xi, \tau, \overline{t}\,)\mu(\overline{s}, \overline{t}\,) - \int_{t_i'}^{t_i''}[\triangle_{\widetilde{x}v}H(\psi, x, u, s, t) - \\ - \langle H_x(\psi, x, u, s, t), \ell^{(i)}(s,t)\rangle_{E^n}\triangle r_i(s,t)]\Big|_{s=s_i(\xi,\tau;t)}s_{i_\xi}(\xi, \tau; t)dt\Big\} + O(\varepsilon^2). \quad (5.4)$$

Здесь $(s_i'', t_i'') \in \Omega\backslash\mathcal{D}_0$ — конечная точка характеристики $\mathcal{X}_0^{(i)}$, $(\overline{s}, \overline{t})$ — точка пересечения отрезка $\overline{G}$ и характеристики $\mathcal{X}_0^{(i)}$, множитель $\mu(s,t)$ вычисляется ([4], с. 73) по формуле $\mu(s,t) = 1$, если $(s,t) \in \mathcal{D}_1$, $\mu(s,t) = |\lambda_i(s,t)|^{-1}$, если $(s,t) \in G$ или $(s,t) = (\overline{s}, \overline{t}\,)$.

Для произвольного допустимого процесса $\{u; x\}$ и соответствующего ему сопряженного решения ψ сформулируем следующую вспомогательную задачу оптимального управления.

Требуется на решениях $y = y(t)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{y} = [\langle \ell^{(i)}, f(x + \ell^{(i)}y, v, s, t) - f(x, u, s, t)\rangle_{E^n} + \langle D\ell^{(i)}, \ell^{(i)}y\rangle_{E^n}]\big|_{s=s_i(\xi,\tau;t)} \quad (5.5)$$

с начальным условием

$$y(t_i') = 0, \quad (5.6)$$

при допустимых управлениях

$$v(t) \in U, \quad t \in [t_i', t_i''], \quad (5.7)$$

максимизировать функционал

$$I(u) = -[\varphi(B^+(x + \ell^{(i)}y), s_i'', t_i'') + \langle \psi(s_i'', t_i''), \ell^{(i)}(s_i'', t_i'')\rangle_{E^n}y(t_i'')]s_{i_\xi}(\xi, \tau, t_i'')\mu(s_i'', t_i'') - \\ - g(A(\overline{s}, \overline{t}\,)(x(\overline{s}, \overline{t}\,) + \ell^{(i)}y(\overline{t}\,)), \overline{t}\,)s_{i_\xi}(\xi, \tau, \overline{t})\mu(\overline{s}, \overline{t}) + \int_{t_i'}^{t_i''}[H(\psi, x + \ell^{(i)}y, v, s, t) - \\ - \langle H_x(\psi, x, u, s, t), \ell^{(i)}(s,t)\rangle_{E^n}y)]\Big|_{s=s_i(\xi,\tau;t)}s_{i_\xi}(\xi, \tau; t)dt. \quad (5.8)$$

Теперь необходимое условие оптимальности можно изложить в компактном виде.

Теорема 2 (вариационный принцип максимума). *Пусть u — оптимальное управление в задаче* (1.1)–(1.5), *а x и ψ — соответствующие ему решения задач* (1.1)–(1.3) *и* (4.3). *Тогда сужение $v(t) = u(s_i(\xi, \tau; t), t)$ управления u на произвольную характеристику $(s_i(\xi, \tau; t), t)$ системы* (1.1) *доставляет максимум функционалу* (5.8) *на решениях уравнения* (5.5) *с начальным условием* (5.6) *при допустимых управлениях* (5.7).

Доказательство теоремы легко следует из формулы приращения (5.4) и дословно совпадает с соответствующим доказательством в ([4], с. 75).

По схеме [4] можно доказать также, что из вариационного принципа максимума следует поточечный принцип максимума (4.6), а обратное утверждение отвергается контрпримерами. Значит, вариационный принцип максимума является более сильным необходимым условием, чем поточечный принцип максимума.

В заключение отметим, что для сравнения вариационного принципа максимума, полученного в настоящей статье, с вариационным принципом максимума из [4] достаточно поступить следующим образом. Вместо произвольной симметричной матрицы A в систему (1.1) следует подставить диагональную матрицу Λ. Очевидно, что в этом случае линейное преобразование (3.9) становится тривиальным ($\mathcal{L} = E$), а сама система (1.1) — инвариантной. Эти обстоятельства позволяют легко трансформировать основной результат настоящей статьи в результат из [4]. Понятно, что обратная процедура вряд ли может быть реализована формальным образом и уж во всяком случае не проще, чем прямое доказательство, проведенное здесь.

Литература

1. Срочко В.А. *Принцип максимума для одного класса систем с распределенными параметрами* // Вопр. устойчив. и оптим. динам. систем. – Иркутск, 1983. – С. 170–182.
2. Терлецкий В.А. *Необходимые условия оптимальности и численные методы оптимизации в системах полулинейных гиперболических уравнений*: Автореф. дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Л., 1983. – 17 с.
3. Васильев О.В., Терлецкий В.А., Болдонов А.В. *К исследованию некоторых задач оптимального управления, возникающих в обратной проблеме цунами* // Методы числ. анализа и оптимизации. – Новосибирск, 1987. – С. 3–33.
4. Васильев О.В., Срочко В.А., Терлецкий В.А. *Методы оптимизации и их приложения.* Ч. 2. *Оптимальное управление.* – Новосибирск: Наука, 1990. – 151 с.
5. Friedrichs K.O. *Symmetric positive linear differential equations* // Comm. Pure Appl. Math. – 1958. – V. 11. – P. 333–418.
6. Lax P.D., Phillips R.S. *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators* // Comm. Pure Appl. Math. – 1960. – V.13. – № 3. – P. 427–455.
7. Васильев О.В., Терлецкий В.А. *Итерационные процессы решения задач оптимального управления в системах с сосредоточенными и распределенными параметрами, основанные на принципе максимума Л.С. Понтрягина* // Оптимизация: Модели. Методы. Решения. – Новосибирск, 1992. – С. 35–54.
8. Vasiliev O.V., Terletsky V.A., Arguchintsev A.V. *Iterative processes in optimization of semilinear hyperbolic system* // 11-th IFAC World Congress. – Tallinn, 1990. – V. 6. – P. 216–220.

Иркутский государственный университет

Поступила 01.09.1999