ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 3 (442)

УДК 517.956.32

О.М. ДЖОХАДЗЕ

ЗАДАЧА ТИПА ДАРБУ В ТРЕХГРАННОМ УГЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

1. Постановка задачи и некоторые обозначения

В пространстве независимых переменных $x \equiv (x_1, x_2, x_3) \in R^3 \equiv R \times R \times R$, $R \equiv (-\infty, \infty)$, рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка вида

$$u_{x_1 x_2 x_3} = F, \tag{1.1}$$

где F — заданная, а u — искомая действительные функции.

Уравнение (1.1) является уравнением гиперболического типа в евклидовом пространстве R^3, для которого плоскости $x_1 = \mathrm{const}$, $x_2 = \mathrm{const}$, $x_3 = \mathrm{const}$ являются характеристическими, а направления, определяемые ортами $e_1 \equiv (1,0,0)$, $e_2 \equiv (0,1,0)$, $e_3 \equiv (0,0,1)$ координатных осей, — бихарактеристическими.

Пусть $S_i^0 : p_i^0(x) \equiv \alpha_i^0 x_1 + \beta_i^0 x_2 + \gamma_i^0 x_3 = 0$, $i = 1,2,3$, — произвольно заданные плоскости в пространстве R^3, которые без ограничения общности будем считать проходящими через начало координат.

Предположим, что

$$\det(\nu_1^0, \nu_2^0, \nu_3^0) \neq 0, \tag{1.2}$$

где $\nu_i^0 \equiv (\alpha_i^0, \beta_i^0, \gamma_i^0)$, $i = 1,2,3$. Плоскостями S_i^0, $i = 1,2,3$, пространство R^3 разбивается на восемь трехгранных углов. Уравнение (1.1) будем рассматривать в одном из этих трехгранных углов D_0, который можно считать заданным в виде

$$D_0 \equiv \{x \in R^3 : p_i^0(x) > 0,\ i = 1,2,3\}.$$

Относительно области D_0 сделаем предположение: каждая из бихарактеристик уравнения (1.1) параллельна только одной грани трехгранного угла D_0. Без ограничения общности будем считать, что $e_i \parallel S_i^0$, $i = 1,2,3$. Это равносильно требованию

$$\alpha_1^0 = 0, \quad \beta_2^0 = 0, \quad \gamma_3^0 = 0.$$

Отсюда, в частности, следует

а) ребра $\Gamma_k^0 \equiv \{x \in R^3 : p_i^0(x) = 0,\ p_j^0(x) = 0,\ i,j = 1,2,3,\ i < j,\ k \neq i,j\}$, $k = 1,2,3$, трехгранного угла D_0 не имеют бихарактеристического направления, т. е. $\nu^k \nparallel e_i$, $k = 1,2,3$, где $\nu^k \equiv \nu_i^0 \times \nu_j^0$ $(i,j,k = 1,2,3,\ i<j,\ k \neq i,j)$ — векторное произведение векторов ν_i^0 и ν_j^0;

б) бихарактеристики, проходящие через ребра Γ_k^0, $k = 1,2,3$, не проходят внутрь области D_0.

Для удобства изучения граничных задач для уравнения (1.1) преобразуем область D_0 в область $D \equiv \{y \in R^3 : y_1 > 0,\ y_2 > 0,\ y_3 > 0\}$ пространства переменных y_1, y_2, y_3. С этой целью введем новые независимые переменные, определяемые равенствами

$$y_i = p_i^0(x), \quad i = 1,2,3. \tag{1.3}$$

Очевидно, в силу (1.2) линейное преобразование (1.3) является невырожденным и устанавливает взаимнооднозначное соответствие между областями D_0 и D.

В переменных y_1, y_2, y_3, оставляя прежние обозначения для u и F, уравнение (1.1) в области D перепишем в виде

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\mu_1\partial\mu_2\partial\mu_3} = F. \tag{1.4}$$

Здесь

$$\frac{\partial}{\partial\mu_1} \equiv \alpha_2^0\frac{\partial}{\partial y_2} + \alpha_3^0\frac{\partial}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial}{\partial\mu_2} \equiv \beta_1^0\frac{\partial}{\partial y_1} + \beta_3^0\frac{\partial}{\partial y_3}, \quad \frac{\partial}{\partial\mu_3} \equiv \gamma_1^0\frac{\partial}{\partial y_1} + \gamma_2^0\frac{\partial}{\partial y_2}.$$

В области D вместо уравнения (1.4) рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{\partial^3 u}{\partial l_1\partial l_2\partial l_3} = F. \tag{1.5}$$

Здесь за переменными y_1, y_2, y_3 оставляем прежние обозначения x_1, x_2, x_3; $\frac{\partial}{\partial l_i} \equiv \alpha_i\frac{\partial}{\partial x_1} + \beta_i\frac{\partial}{\partial x_2} + \gamma_i\frac{\partial}{\partial x_3}$ — производная по направлению $l_i \equiv (\alpha_i,\beta_i,\gamma_i)$, $\det(l_1,l_2,l_3) \neq 0$, $i = 1,2,3$, F — заданная, а u — искомая действительные функции. При этом будем считать, что бихарактеристики уравнения (1.5) и область D удовлетворяют условию, сформулированному выше для уравнения (1.1) в области D_0 ($l_i \parallel S_i$, $i = 1,2,3$), которое в данном случае принимает вид $\alpha_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$.

Пусть $P = P(x) \in \overline{D}$ — произвольная точка замкнутой области $\overline{D}$, а S_k, $k = 1,2,3$, — плоские грани угла D, т. е. $\partial D = \bigcup\limits_{k=1}^{3} S_k$, $S_k \equiv \{x \in R^3 : x_k = 0,\ (x_i,x_j) \in \overline{R}_+^2\}$, Γ_k, $k = 1,2,3$, — ребра угла D, т. е. $\Gamma_k \equiv \{x \in R^3 : x_k \in \overline{R}_+,\ x_i = x_j = 0\}$, $k \neq i,j$; $i < j$; $i,j,k = 1,2,3$, $R_+ \equiv (0,\infty)$, $\overline{R}_+^2 \equiv \overline{R}_+ \times \overline{R}_+$. Из точки P выпустим бихарактеристические лучи $L_i(P)$, соответствующие бихарактеристическим направлениям l_i, $i = 1,2,3$, уравнения (1.5) до пересечения с одной из граней S_i, $i = 1,2,3$, в точках p_i, $i = 1,2,3$. Без ограничения общности будем считать, что $P_3 \in S_1$, $P_2 \in S_3$, $P_1 \in S_2$.

Рассмотрим задачу типа Дарбу в следующей постановке: в области D найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1.5), удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\left(M_i\frac{\partial^2 u}{\partial l_1\partial l_2} + N_i\frac{\partial^2 u}{\partial l_1\partial l_3} + Q_i\frac{\partial^2 u}{\partial l_2\partial l_3}\right)\right|_{S_i} = f_i, \quad i = 1,2,3, \tag{1.6}$$

где M_i, N_i, Q_i, f_i, $i = 1,2,3$, — заданные действительные функции.

Регулярным решением уравнения (1.5) называется функция $u(x)$, непрерывная в D вместе со своими частными производными $\frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i\partial l_2^j\partial l_3^k}$, $i,j,k = 0,1$, и удовлетворяющая уравнению (1.5) в D.

Следует отметить, что граничная задача (1.5), (1.6) представляет собой естественное развитие известных классических постановок задач типа Гурса и Дарбу (напр., [1]–[4]) для линейных гиперболических уравнений второго и третьего порядка в случае двух независимых переменных на плоскости. Многомерные аналоги задач Гурса и Дарбу для уравнений гиперболического типа второго и третьего порядка в двугранном угле изучались в работах [2], [5]–[7].

Начально-краевым и характеристическим задачам для широкого класса гиперболических уравнений третьего и высокого порядка в многомерных областях с доминирующими производными посвящены, например, работы [8], [9].

Замечание 1.1. Отметим, что гиперболическая природа рассматриваемой задачи (1.5), (1.6) учтена в условиях (1.6) наличием в них доминированных производных второго порядка по сравнению с $\frac{\partial^3 u}{\partial l_1\partial l_2\partial l_3}$.

В областях D и R_+^2 введем в рассмотрение следующие функциональные пространства

$$\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}) \equiv \{v \in C(\overline{D}) : v\big|_\Gamma = 0, \qquad \sup_{x \in D_n} (\rho_1\rho_2\rho_3)^{-\alpha}|v(x)| < \infty, \ n = 1, 2, \dots\},$$

$$\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2) \equiv \{\varphi \in C(\overline{R}_+^2) : \varphi\big|_{\Gamma^*} = 0, \ \sup_{(\xi,\eta)\in\Omega_n} (\xi\eta\rho)^{-\alpha}|\varphi(\xi,\eta)| < \infty, \ n = 1, 2, \dots\},$$

где

$$\Gamma \equiv \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3, \quad \Gamma^* \equiv \Gamma_1^* \bigcup \Gamma_2^*, \quad \Gamma_1^* \equiv \{(\xi,\eta) \in \overline{R}_+^2 : \xi \in \overline{R}_+, \ \eta = 0\},$$

$$\Gamma_2^* \equiv \{(\xi,\eta) \in \overline{R}_+^2 : \eta \in \overline{R}_+, \ \xi = 0\}, \quad r \equiv |x| \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \rho \equiv \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$D_n \equiv \overline{D} \setminus \Gamma, \quad 0 < r \le n, \quad \Omega_n \equiv \overline{R}_+^2 \setminus \Gamma, \quad 0 < \rho \le n,$$

ρ_i — расстояние от точки $x \in \overline{D}$ до ребра Γ_i области D, $i = 1, 2, 3$, т.е. $\rho_1 \equiv \sqrt{x_2^2 + x_3^2}$, $\rho_2 = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}$, $\rho_3 \equiv \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, а параметр $\alpha \equiv \mathrm{const} \ge 0$.

Очевидно, относительно полунорм

$$\|v\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}_n)} = \sup_{x \in D_n} (\rho_1\rho_2\rho_3)^{-\alpha}|v(x)|, \quad \|\varphi\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_n)} = \sup_{(\xi,\eta\in\Omega_n} (\xi\eta\rho)^{-\alpha}|\varphi(\xi,\eta)|, \quad n = 1, 2, \dots$$

пространства $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$ и $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$ являются счетно нормированными пространствами Фреше.

Всюду в дальнейшем через c обозначена положительная постоянная, конкретное значение которой для исследований не имеет принципиального значения.

Легко видеть, что принадлежность $v \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$ и $\varphi \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$ равносильна выполнению неравенств

$$|v(x)| \le c(\rho_1\rho_2\rho_3)^\alpha, \quad x \in \overline{D}_n, \quad |\varphi(\xi,\eta)| \le c(\xi\eta\rho)^\alpha, \quad (\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.7}$$

Граничную задачу (1.5), (1.6) будем исследовать в пространстве Фреше

$$\overset{0}{C}{}_\alpha^{\vec{l}}(\overline{D}) \equiv \Big\{u : \frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i \partial l_2^j \partial l_3^k} \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}), \ \ i, j, k = 0, 1, \ \ i + j + k = 2, 3, \ \ \frac{\partial u}{\partial l_i}\Big|_{\Gamma_i} = 0,$$
$$i = 1, 2, 3, \ \ u(O) = 0\Big\}, \quad \vec{l} \equiv (l_1, l_2, l_3), \quad O \equiv (0, 0, 0),$$

относительно полунормы

$$\|u\|_{\overset{0}{C}{}_\alpha^{\vec{l}}(\overline{D}_n)} = \sum_{i+j+k=2}^{3} \left\| \frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial l_1^i \partial l_2^j \partial l_3^k} \right\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}_n)}, \quad n = 1, 2, \dots$$

При рассмотрении граничной задачи (1.5), (1.6) в классе $\overset{0}{C}{}_\alpha^{\vec{l}}(\overline{D})$ потребуем, чтобы $F \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{D})$, $f_i \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$, $i = 1, 2, 3$.

2. Эквивалентная редукция задачи (1.5), (1.6) к функциональному уравнению

В обозначениях $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1 \partial l_2} \equiv v_3$, $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1 \partial l_3} \equiv v_2$, $\frac{\partial^2 u}{\partial l_2 \partial l_3} \equiv v_1$ задача (1.5), (1.6) в области D эквивалентным образом перепишется в виде следующей граничной задачи для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно неизвестных функций v_1, v_2, v_3

$$\frac{\partial v_3}{\partial l_3} = F, \quad \frac{\partial v_2}{\partial l_2} = F, \quad \frac{\partial v_1}{\partial l_1} = F, \tag{2.1}$$

$$(M_i v_3 + N_i v_2 + Q_i v_1)\big|_{S_i} = f_i, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2.2}$$

Эквивалентность исходной задачи (1.5), (1.6) и задачи (2.1), (2.2) является очевидным следствием следующей леммы.

Лемма 2.1. *В замкнутой области $\overline{D}_0$, являющейся трехгранным углом из § 1, существует единственная функция $u \in \left\{\frac{\partial^{i+j+k}u}{\partial x_1^i \partial x_2^j \partial x_3^k} \in C(\overline{D}_0),\ i,j,k = 0,1\right\}$, удовлетворяющая переопределенной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка*

$$u_{x_1x_2} = v_3, \quad u_{x_1x_3} = v_2, \quad u_{x_2x_3} = v_1 \tag{2.3}$$

и условиям

$$u(O) = 0, \quad u_{x_1}\big|_{\Gamma_1^0}, \quad u_{x_2}\big|_{\Gamma_2^0} = 0, \quad u_{x_3}\big|_{\Gamma_3^0} = 0. \tag{2.4}$$

Здесь v_1, v_2, v_3 — заданные функции, для которых v_1, $\frac{\partial v_i}{\partial l_i} \in C(\overline{D}_0)$, $i = 1,2,3$; $\frac{\partial v_1}{\partial l_1}(x) = \frac{\partial v_2}{\partial l_2}(x) = \frac{\partial v_3}{\partial l_3}(x)$, $x \in \overline{D}_0$.

Доказательство. Пусть $P_0 = P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) \in \overline{D}_0$ — произвольная точка замкнутой области $\overline{D}_0$. Очевидно, в силу требования относительно области D_0 из § 1 плоскость $x_1 = x_1^0$ имеет единственную точку пересечения P_0^* с ребром Γ_1^0.

Поскольку $(u_{x_1}(x_1^0, x_2, x_3))_{x_2} = v_3(x_1^0, x_2, x_3)$, $(u_{x_1}(x_1^0, x_2, x_3))_{x_3} = v_2(x_1^0, x_2, x_3)$ и $u_{x_1}(P_0^*) = 0$, то функция $u_{x_1}(x_1^0, x_2, x_3)$ в точке $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ единственным образом определяется по формуле

$$u_{x_1}(x_1^0, x_2, x_3) = \int_{(x_2^*(x_1^0), x_3^*(x_1^0))}^{(x_2^0, x_3^0)} v_3(x_1^0, x_2, x_3)dx_2 + v_2(x_1^0, x_2, x_3)dx_3. \tag{2.5}$$

Здесь криволинейный интеграл берется вдоль любой простой гладкой кривой, соединяющей точки $(x_2^*(x_1^0), x_3^*(x_1^0))$ и (x_2^0, x_3^0) в плоскости $x_1 = x_1^0$ и целиком лежащей в $\overline{D}_0$. В силу произвольного выбора точки P_0 формула (2.5) дает представление функции $u_{x_1}(x)$ в замкнутой области $\overline{D}_0$ через заданные функции v_3 и v_2. Аналогичным образом даются формулы представления для функций $u_{x_2}(x)$ и $u_{x_3}(x)$ в $\overline{D}_0$ соответственно через заданные функции v_1, v_3 и v_1, v_2. Остается только заметить, что функция $v(x)$, определенная по формуле

$$\begin{aligned} u(x) = \int_{OP} u_{x_1}dx_1 + u_{x_2}dx_2 + u_{x_3}dx_3 = \int_{OP}\left\{\int_{P^*P^1} v_3(x_1,\eta,\zeta)d\eta + v_2(x_1,\eta,\zeta)d\zeta\right\}dx_1 + \\ + \left\{\int_{P^{**}P^2} v_3(\xi,x_2,\zeta)d\xi + v_1(\xi,x_2,\zeta)d\zeta\right\}dx_2 + \left\{\int_{P^{***}P^3} v_2(\xi,\eta,x_3)d\xi + v_1(\xi,\eta,x_3)d\eta\right\}dx_3, \end{aligned} \tag{2.6}$$

действительно определяет единственное решение задачи (2.3), (2.4). Здесь

$$P \equiv P(x_1,x_2,x_3), \quad P^1 \equiv P^1(x_2,x_3), \quad P^2 \equiv P(x_1,x_3), \quad P^3 \equiv P^3(x_1,x_2),$$
$$P^* \equiv P^*(x_2^*(x_1), x_3^*(x_1)), \quad P^{**} \equiv P^{**}(x_1^{**}(x_2), x_3^{**}(x_2)), \quad P^{***} \equiv P^{***}(x_1^{***}(x_3), x_2^{***}(x_3)). \quad \square$$

Замечание 2.1. Если вместо системы (2.3) рассмотреть систему

$$\frac{\partial^2 u}{\partial l_1 \partial l_2} = v_3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial l_1 \partial l_3} = v_2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial l_2 \partial l_3} = v_1 \tag{2.7}$$

в трехгранном угле $\overline{D} \subset R^3$, то аналогично требованию на области D_0 из § 1 нужно, чтобы $l_i \parallel S_i$, $i = 1,2,3$.

Следует заметить, что (2.7) переходит в систему (2.3) в переменных $(\xi,\eta,\zeta) \in R^3$ при помощи невырожденного преобразования переменных

$$x_1 = \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta, \quad x_2 = \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta, \quad x_3 = \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta$$

в предположении, что векторы l_1, l_2 и l_3 линейно независимы.

Из произвольной точки $P = P(x) \in \overline{D}$ выпустим бихарактеристические лучи $l_i(P)$, $i = 1,2,3$, уравнения (1.5) до пересечения с гранями в точках $P_3 \in S_1$, $P_2 \in S_3$, $P_1 \in S_2$. Полагая

$$v_3\big|_{x_1=0} \equiv \varphi_3(x_2,x_3), \quad v_2\big|_{x_3=0} \equiv \varphi_2(x_1,x_2), \quad v_1\big|_{x_2=0} \equiv \varphi_1(x_1,x_3), \quad (x_2,x_3),(x_1,x_2)(x_1,x_3) \in \overline{R}^2_+,$$

и интегрируя уравнения системы (2.1) вдоль соответствующих бихарактеристик, получим

$$\begin{aligned} &v_1(x) = \varphi_1(x_1, x_3 - \beta_1^{-1}\gamma_1 x_2) + F_1(x),\\ &v_2(x) = \varphi_2(x_1 - \alpha_2\gamma_2^{-1}x_3, x_2) + F_2(x), \quad x \in D,\\ &v_3(x) = \varphi_3(x_2 - \alpha_3^{-1}\beta_3 x_1, x_3) + F_3(x), \end{aligned} \tag{2.8}$$

где F_i, $i = 1,2,3,$ — известные функции класса $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$, а верхний индекс -1 здесь и ниже означает обратную величину.

Подставляя выражения для v_1, v_2 и v_3 из равенств в (2.8) в граничные условия (2.2), будем иметь

$$\begin{aligned} M_1(x_2,x_3)\varphi_3(x_2,x_3) + N_1(x_2,x_3)\varphi_2(-\alpha_2\gamma_2^{-1}x_3,x_2) &= f_4(x_2,x_3) \quad (x_2,x_3) \in \overline{R}^2_+,\\ M_2(x_1,x_3)\varphi_3(-\alpha_3^{-1}\beta_3 x_1,x_3) + Q_2(x_1,x_3)\varphi_1(x_1,x_3) &= f_5(x_1,x_3) \quad (x_1,x_3) \in \overline{R}^2_+,\\ N_3(x_1,x_2)\varphi_2(x_1,x_2)\varphi_2(x_1,x_2) + Q_3(x_1,x_2)\varphi_1(x_1,-\beta_1^{-1}\gamma_1 x_2) &= f_6(x_1,x_2) \quad (x_1,x_2) \in \overline{R}^2_+, \end{aligned}$$

где известные функции f_i, $i = 4,5,6$, принадлежат классу $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$.

В переменных ξ, η последняя система примет вид

$$\begin{aligned} &M_1(\xi,\eta)\varphi_3(\xi,\eta) + N_1(\xi,\eta)\varphi_2(-\alpha_2\gamma_2^{-1}\eta,\xi) = f_4(\xi,\eta),\\ &M_2(\xi,\eta)\varphi_3(-\alpha_3^{-1}\beta_3\xi,\eta) + Q_2(\xi,\eta)\varphi_1(\xi,\eta) = f_5(\xi,\eta),\\ &N_3(\xi,\eta)\varphi_2(\xi,\eta) + Q_3(\xi,\eta)\varphi_1(\xi,-\beta_1^{-1}\gamma_1\eta) = f_6(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \overline{R}^2_+. \end{aligned} \tag{2.9}$$

При выполнении условий

$$M_1(\xi,\eta) \neq 0, \quad Q_2(\xi,\eta) \neq 0, \quad N_3(\xi,\eta) \neq 0, \quad (\xi,\eta) \in \overline{R}^2_+ \tag{2.10}$$

последовательным исключением неизвестных величин из системы (2.9) получим относительно φ_2 функциональное уравнение

$$\varphi_2(\xi,\eta) - a(\xi,\eta)\varphi_2(\tau_2\eta,\tau_1\xi) = f(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \overline{R}^2_+, \tag{2.11}$$

где

$$\begin{aligned} a(\xi,\eta) \equiv -N_3^{-1}(\xi,\eta)Q_2^{-1}(\xi,-\beta_1^{-1}\gamma_1\eta)M_1^{-1}(-\alpha_3^{-1}\beta_3\xi,-\beta_1^{-1}\gamma_1\eta)Q_3(\xi,\eta) \times\\ \times M_2(\xi,-\beta_1^{-1}\gamma_1\eta)N_1(-\alpha_3^{-1}\beta_3\xi,-\beta_1^{-1}\gamma_1\eta), \quad \tau_2 \equiv \alpha_2\beta_1^{-1}\gamma_1\gamma_2^{-1}, \quad \tau_1 \equiv -\alpha_3^{-1}\beta_3, \end{aligned}$$

а известная функция f принадлежит классу $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$.

Замечание 2.2. Очевидно, при выполнении условий (2.10) задача (1.5), (1.6) в классе $\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_\alpha(\overline{D})$ эквивалентным образом редуцирована к уравнению (2.11) относительно неизвестной функции φ_2 класса $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$. Далее, если $u \in \overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_\alpha(\overline{D})$, то, очевидно, $\varphi_2 \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$. Обратно, если $\varphi_2 \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$, то из равенств (2.9), (2.8), (2.6) с учетом неравенств (1.7) легко показать, что $u \in \overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_\alpha(\overline{D})$.

3. Исследование функционального уравнения (2.11)

Пусть выполнены условия (2.10) и $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$, $0 < \tau < 1$. Положим

$$(K\varphi_2)(\xi,\eta) \equiv \varphi_2(\xi,\eta) - a(\xi,\eta)\varphi_2(T(\xi,\eta)), \quad T : (\xi,\eta) \to (\tau\eta,\tau\xi),$$
$$(\xi,\eta) \in \overline{R}^2_+), \quad \sigma \equiv a(O), \quad \alpha_0 \equiv -\frac{\log|\sigma|}{3\log\tau} \ (\sigma \neq 0).$$

Лемма 3.1. *Если $\alpha > \alpha_0$, то уравнение* (2.11) *однозначно разрешимо в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$, и для решения $\varphi_2 = K^{-1}f$ справедлива оценка*

$$|\varphi_2(\xi,\eta)| = |(K^{-1}f)(\xi,\eta)| \le c_*(\xi\eta\rho)^\alpha \|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)}, \tag{3.1}$$

где верхний индекс -1 здесь и ниже при операторах означает обратный оператор, $\overline{\Omega}_\rho \equiv \{(\xi_1,\eta_1) \in \overline{R}^2_+ : \rho(\xi_1,\eta_1) \le \rho\}$, $\rho \le n$, $n = 1,2,\ldots$, а положительная постоянная c_* не зависит от функции f.

Доказательство. Введем в рассмотрение операторы

$$(\Gamma\varphi_2)(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)\varphi_2(\tau\eta,\tau\xi), \quad (\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n, \quad K^{-1} = I + \sum_{j=1}^{\infty}\Gamma^j, \tag{3.2}$$

где I — тождественный оператор. Легко видеть, что оператор K^{-1} является формально обратным к оператору K. Поэтому достаточно доказать сходимость ряда Неймана $K^{-1} = I + \sum\limits_{j=1}^{\infty}\Gamma^j$ в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_n)$.

В силу определения оператора Γ из (3.2) имеем $(\Gamma\varphi_2)(\xi,\eta) = a(\xi,\eta)a(T(\xi,\eta))\cdots a(T^{j-1}(\xi,\eta))\varphi_2(T^j(\xi,\eta))$, $T^j \equiv T(T^{j-1})$, $j \ge 1$, $T^0 \equiv I$, $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n$. Условие $\alpha > \alpha_0$ равносильно неравенству $\tau^{3\alpha}|\sigma| < 1$. Поэтому в силу непрерывности функции a и равенства $a(O) = \sigma$ найдутся такие положительные числа ε ($\varepsilon < n$), δ и q, что при $0 \le \rho \le \varepsilon$ будут справедливы неравенства

$$|a(\xi,\eta)| \le |\sigma| + \delta, \quad \tau^{3\alpha}(|\sigma| + \delta) \equiv q < 1. \tag{3.3}$$

Очевидно, последовательности точек $\{T^j(\xi,\eta)\}_{j=0}^{\infty}$, $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n$ равномерно стремятся к точке $O(0,0)$ при $j \to \infty$ на множестве $\overline{\Omega}_n$. Следовательно, существует такое натуральное число j_0, что

$$\rho(T^j(\xi,\eta)) \le \varepsilon \quad \text{при} \quad (\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n, \ \ j \ge j_0. \tag{3.4}$$

В силу очевидного равенства $\rho(T^j(\xi,\eta)) = \tau^j\rho$ неравенство (3.4) принимает вид $\tau^j\rho \le \varepsilon$, так что в качестве j_0 можно брать, например, $j_0 = \left[\frac{\log\varepsilon\rho^{-1}}{\log\tau}\right] + 1$, где $[p]$ обозначает целую часть числа p.

Пусть $\max\limits_{(\xi,\eta)\in\overline{\Omega}_n} |a(\xi,\eta)| \equiv \beta$. В силу (3.3), (3.4) $f \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}^2_+)$ и при $j > j_0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}|(\Gamma^j f)(\xi,\eta)| &= |a(\xi,\eta)a(T(\xi,\eta))\cdots a(T^{j_0-1}(\xi,\eta))|\,|a(T^{j_0}(\xi,\eta))\cdots a(T^{j-1}(\xi,\eta))|\,|f(T^j(\xi,\eta))| \le \\ &\le \beta^{j_0}(|\sigma|+\delta)^{j-j_0}(\xi\eta\tau^{3j}\rho)^\alpha\|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)} \le \beta^{j_0}(|\sigma|+\delta)^{-j_0}[\tau^{3\alpha}(|\sigma|+\delta)]^j(\xi\eta\rho)^\alpha\|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)} = \\ &= c_0 q^j(\xi\eta\rho)^\alpha\|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)},\end{aligned} \tag{3.5}$$

где $c_0 \equiv \beta^{j_0}(|\sigma|+\delta)^{-j_0}$.

При $1 \le j \le j_0$ имеем

$$|(\Gamma^j f)(\xi,\eta)| \le \beta^j(\xi\eta\tau^{3j}\rho)^\alpha\|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)} \le \beta^j(\xi\eta\rho)^\alpha\|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)}. \tag{3.6}$$

Теперь из (3.5) и (3.6) окончательно находим

$$|\varphi_2(\xi,\eta)| = |(K^{-1}f)(\xi,\eta)| \le |f(\xi,\eta)| + \left|\sum_{j=1}^{j_0}(\Gamma^j f)(\xi,\eta)\right| +$$

$$+\left|\sum_{j=j_0+1}^{\infty}(\Gamma^j f)(\xi,\eta)\right| \le \left(1+\sum_{j=1}^{j_0}\beta^j + c_0\sum_{j=j_0+1}^{\infty} q_j\right)(\xi\eta\rho)^\alpha \|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)} =$$

$$= \left(1+\sum_{j=1}^{j_0}\beta^j + c_0\frac{q^{j_0+1}}{1-q}\right)(\xi\eta\rho)^\alpha \|f\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_\rho)},$$

где $c_* \equiv 1+\sum\limits_{j=1}^{j_0}\beta^j + c_0\frac{q^{j_0+1}}{1=q}$. Отсюда следует непрерывность оператора K^{-1} в пространстве $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_n)$ и справедливость оценки (3.1). $\square$

Замечание 3.1. Если $\sigma = 0$, то неравенство $t^{3\alpha}|\sigma| < 1$ выполняется при любых $\alpha \ge 0$ и, как видно из доказательства, лемма 3.1 справедлива в этом случае для всех $\alpha \ge 0$.

Следует заметить, что выше нами доказана однозначная разрешимость уравнения (2.11) на $\overline{\Omega}_n$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ Тогда однозначная разрешимость этого уравнения на всем $\overline{R}_+^2$ в классе $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$ получится, если справедлива

Лемма 3.2. *Если уравнение*

$$(K\varphi_2)(\xi,\eta) = f(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \overline{R}_+^2 \tag{3.7}$$

однозначно разрешимо для любого $n = 1, 2, \ldots$ *на* $\overline{\Omega}_n$, *то оно однозначно разрешимо на всем* $\overline{R}_+^2$.

Действительно, пусть $\varphi_{2,n}(\xi,\eta)$ — единственное решение уравнения (3.7) на $\overline{\Omega}_n$, существование которого доказано выше. В силу теоремы единственности имеем $\varphi_{2,n}(\xi,\eta) = \varphi_{2,m}(\xi,\eta)$, если $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n$ и $m > n$. Тогда, очевидно, $\varphi_2(\xi,H) = \varphi_{2,n}(\xi,\eta)$ при $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n$ является единственным решением уравнения (3.7), что и доказывает лемму 3.2.

Лемма 3.3. *Если* $\alpha < \alpha_0$, *то уравнение* (2.11) *разрешимо в пространстве* $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$, *причем соответствующее* (2.11) *однородное уравнение имеет в указанном пространстве бесконечное множество линейно независимых решений, т. е.* $\dim\operatorname{Ker} K = +\infty$.

Доказательство. Условие $\alpha < \alpha_0$ равносильно неравенству $\tau^{3\alpha}|\sigma| > 1$. Поэтому так же, как и при доказательстве леммы 3.1, найдутся такие положительные числа ε_1 $(\varepsilon_1 < n)$, δ_1 и q_1, что при $0 \le \rho \le \varepsilon_1$ будут справедливы неравенства

$$|a^{-1}(\xi,\eta)| \le (|\sigma| - \delta_1)^{-1}, \quad |\sigma| - \delta_1 > 0, \quad \tau^{3\alpha}(|\sigma| - \delta_1) \equiv q_1^{-1} > 1. \tag{3.8}$$

В силу определения пространства $\overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$ для элемента $g \in \overset{0}{C}_\alpha(\overline{R}_+^2)$ имеет место представление $g(\xi,\eta) = (\xi\eta\rho)^\alpha g^*(\xi,\eta)$, $(\xi,\eta) \in \overline{\Omega}_n$, где g^* — непрерывная ограниченная функция в Ω_n. Множество таких функций обозначим через $C^*(\Omega_n)$. Поэтому достаточно доказать лемму 3.3 для уравнения

$$\varphi_2^*(\xi,\eta) - a(\xi,\eta)\tau^{3\alpha}\varphi_2^*(T(\xi,\eta)) = f^*(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta) \in \overline{R}_+^2 \tag{3.9}$$

в классе $C^*(\Omega_n)$ при $f^* \in C^*(\Omega_n)$.

Легко видеть, что оператор $(\Lambda\varphi_2^*)(\xi,\eta) \equiv a(\xi,\eta)\tau^{3\alpha}\varphi_2^*(T(\xi,\eta))$ обратим, причем

$$(\Lambda^{-1}\varphi_2^*)(\xi,\eta) = a^{-1}(T^{-1}(\xi,\eta))\tau^{3\alpha}\varphi_2^*(T^{-1}(\xi,\eta))$$

при $0 \le \rho(T^{-1}(\xi,\eta) \le \varepsilon_1 \iff 0 \le \rho \le \tau\varepsilon_1$, $T^{-1} : (\xi,\eta) \to (\tau^{-1}\eta, \tau^{-1}\xi)$, $(\xi,\eta) \in \overline{R}_+^2$.

Уравнение (3.9) перепишем эквивалентным образом в виде

$$\varphi_2^*(\xi,\eta) - (\Lambda^{-1}\varphi_2^*)(\xi,\eta) = -(\Lambda^{-1}f^*)(\xi,\eta), \quad 0 \le \rho \le \tau\varepsilon_1. \tag{3.10}$$

Очевидно, для любого (ξ,η) из множества $0 < \rho < \tau\varepsilon_1$ существует единственное натуральное число $n_1 = n_1(\rho)$, удовлетворяющее неравенствам

$$\tau\varepsilon_1 < \rho(T^{-n_1}(\xi,\eta)) \le \varepsilon_1 \iff \tau\varepsilon_1 < \tau^{-n_1}\rho \le \varepsilon_1.$$

Легко проверить, что

$$n_1(\rho) = \left[\frac{\log \varepsilon_1^{-1}\rho}{\log \tau}\right].$$

Аналогично, при $\varepsilon_1 < \rho \le n$ существует единственное натуральное число $n_2(\rho) = \left[1 - \frac{\log\varepsilon_1^{-1}\rho}{\log\tau}\right]$, удовлетворяющее неравенствам

$$\tau\varepsilon_1 \le \rho(T^{n_2}(\xi,\eta)) \le \varepsilon_1 \iff \tau\varepsilon_1 \le \tau^{n_2}\rho < \varepsilon.$$

Легко проверить, что всякое решение уравнения (3.9) класса $C^*(\Omega_n)$ дается формулой

$$\varphi_2^*(\xi,\eta) = \begin{cases} \varphi^*(\xi,\eta), & \tau\varepsilon_1 \le \rho \le \varepsilon_1, \\ (\Lambda^{-n_1(\rho)}\varphi^*)(\xi,\eta) - \sum\limits_{j=1}^{n_1(\rho)} (\Lambda^{-j}f^*)(\xi,\eta), & 0 < \rho < \tau\varepsilon_1, \\ (\Lambda^{n_2(\rho)}\varphi^*)(\xi,\eta) + \sum\limits_{j=0}^{n_2(\rho)-1} (\Lambda^{j}f^*)(\xi,\eta), & \varepsilon_1 < \rho \le n, \end{cases} \tag{3.11}$$

где φ^* — произвольная функция класса $C^*(G)$, $G \equiv \{(\xi,\eta) \in R_+^2 : \tau\varepsilon_1 \le \rho \le \varepsilon_1\}$, удовлетворяющая условию $\varphi^*(\xi,\eta) - a(\xi,\eta)\tau^{3\alpha}\varphi^*(T(\xi,\eta)) = f^*(\xi,\eta)$ при $\rho = \varepsilon_1$.

Покажем, что функция φ_2^*, заданная формулой (3.11), принадлежит классу $C^*(\Omega_n)$ для любого $\varphi^* \in C^*(G)$, $\varphi^*(\xi,\eta) - a(\xi,\eta)\tau^{3\alpha}\varphi^*(T(\xi,\eta)) = f^*(\xi,\eta)$, при $\rho = \varepsilon_1$, если $f^* \in C^*(\Omega_n)$. Отсюда в силу произвольности функции φ^* будет следовать утверждение леммы 3.3 для уравнения (2.11).

В силу (3.8) при $0 < \rho < \tau\varepsilon_1$ справедливы оценки

$$|(\Lambda^{-n_1(\rho)}\varphi^*)(\xi,\eta)| = |a^{-1}(T^{-1}(\xi,\eta))a^{-1}(T^{-2}(\xi,\eta))\cdots a^{-1}(T^{-n_1(\rho)}(\xi,\eta))\tau^{-3\alpha n_1(\rho)} \times$$
$$\times \varphi^*(T^{-n_1(\rho)}(\xi,\eta))| \le \tau^{-3\alpha n_1(\rho)}(|\sigma| - \delta_1)^{-n_1(\rho)}\|\varphi^*\|_{C^*(G)} = q_1^{n_1(\rho)}\|\varphi^*\|_{C^*(G)} < \|\varphi^*\|_{C^*(G)}. \tag{3.12}$$

Аналогичным образом при $0 < \rho < \tau\varepsilon_1$ и $1 \le j \le n_1(\rho)$ имеем

$$|(\Lambda^{-j}f^*)(\xi,\eta)| \le (|\sigma| - \delta_1)^{-j}\tau^{-3\alpha j}\|f^*\|_{C^*(\Omega_n)} = [\tau^{3\alpha}(|\sigma| - \delta_1)]^{-j}\|f^*\|_{C^*(\Omega_n)} = q_1^j\|f^*\|_{C^*(\Omega_n)}.$$

Отсюда в силу (3.8) следует

$$\left|\sum_{j=1}^{n_1(\rho)} (\Lambda^{-j}f^*)(\xi,\eta)\right| \le \left(\sum_{j=1}^{n_1(\rho)} q_1^j\right)\|f^*\|_{C^*(\Omega_n)} \le \frac{q_1}{1-q_1}\|f^*\|_{C^*(\Omega_n)}. \tag{3.13}$$

В силу (3.12) и (3.13) заключаем, что функция φ_2^*, заданная формулой (3.11) и являющаяся решением уравнения (3.10), принадлежит классу $C^*(\Omega_n)$. $\square$

На основании лемм 3.1, 3.3 и замечания 2.2 справедлива

Теорема. *Пусть выполнены условия* (2.10) *и* $\tau_1 = \tau_2 \equiv \tau$, $0 < \tau < 1$. *Если* $\sigma = 0$, *то задача* (1.5), (1.6) *однозначно разрешима в классе* $\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_{\alpha}(\overline{D})$ *при всех* $\alpha \ge 0$. *Если же* $\sigma \ne 0$, *то при* $\alpha > \alpha_0$ *задача* (1.5), (1.6) *однозначно разрешима в классе* $\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_{\alpha}(\overline{D})$, *а при* $\alpha < \alpha_0$ *нормально разрешима по Хаусдорфу в классе* $\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_{\alpha}(\overline{D})$, *и ее индекс* $\varkappa = +\infty$, *в частности, соответствующая* (1.5), (1.6) *однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений.*

В силу неравенства (3.1) с учетом выражения функции f через функции f_i, $i = 4, 5, 6$, которые в свою очередь являются линейными комбинациями функций f_i, $i = 1, 2, 3$, и F, легко можно показать, что при $\alpha > \alpha_0$

$$\|\varphi_2\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_n)} \le c^* \left(\sum_{j=1}^{3} \|f_i\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_n)} + \|F\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}_n)} \right), \tag{3.14}$$

где c^* — положительная постоянная, не зависящая от функций f_i, $i = 1, 2, 3$, и F.

Далее, в силу равенств (2.9), (2.8) следует, что аналогичные (3.14) оценки справедливы и для функций φ_i, $i = 1, 3$, и v_i, $i = 1, 2, 3$. Наконец, в силу формулы (2.6) легко следует, что для регулярного решения задачи (1.5), (1.6) класса $\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_\alpha(\overline{D})$, $\alpha > \alpha_0$, справедлива оценка

$$\|u\|_{\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_\alpha(\overline{D}_n)} \le c^{**} \left(\sum_{i=1}^{3} \|f_i\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{\Omega}_n)} + \|F\|_{\overset{0}{C}_\alpha(\overline{D}_n)} \right), \tag{3.15}$$

где c^{**} — положительная постоянная, не зависящая от функций f_i, $i = 1, 2, 3$, и F.

Из оценки (3.15) непосредственно следует устойчивость регулярного решения задачи (1.5), (1.6) в пространстве $\overset{0}{C}{}^{\vec{l}}_\alpha(\overline{D})$, $\alpha > \alpha_0$.

Литература

1. Darboux G. *Lecons sur la théorie générale des surfaces, troisiéme partie.* – Paris: Gauthier-Villars, 1894. – 512 p.
2. Адамар Ж. *Задачи Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* – М.: Наука, 1978. – 351 с.
3. Гурса Э. *Курс математического анализа.* I. – М.-Л.: Гостехиздат, 1933. – Т. 3. – 276 с.
4. Джохадзе О.М. *О задаче Дарбу для уравнения третьего порядка гиперболического типа с кратными характеристиками* // Грузинск. матем. журн. – 1995. – Т. 2. – № 5. – С. 469–490.
5. Tolen J. *Probléme de Cauchy sur la deux hypersurfaces characteristique sćantes* // Compt. Rend Acad. Sci. – Paris, 1980. – V. 291. – № 1. – P. 49–52.
6. Харибегашвили С.С. *О характеристической задаче для волнового уравнения* // Тр. ин-та прикладной математики. – Тбилиси, 1992. – Т. 47. – С. 76–82.
7. Харибегашвили С.С. *О разрешимости пространственной задачи типа Дарбу для волнового уравнения* // Грузинск. матем. журн. – 1995. – Т. 1. – № 6. – С. 469–490.
8. Ахиев С.С. *Фундаментальные решения некоторых локальных и нелокальных краевых задач и их представления* // ДАН СССР. – 1983. – Т. 271. – № 2. – С. 265–269.
9. Di Vincenzo R., Villani A. *Sopra un problema ai limiti per unéquazione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico. Esistenza, unicita é rappresentazione della soluzione* // Matematiche. – 1977. – V. 32. – № 2. – P. 211–238.

Тбилисский математический институт им А.М. Размадзе АН Республика Грузия

Поступила 25.09.1995