ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2002 МАТЕМАТИКА № 6 (481)

УДК 517.956

А.К. РАТЫНИ

ОБ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ С ОПЕРАТОРОМ СУПЕРПОЗИЦИИ В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ. II

3. Некоторые геометрические вопросы

Эта статья является продолжением [1], где задача Бицадзе–Самарского

$$\mathcal{L}u \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u = f(x) \quad (x \in D), \tag{1}$$

$$Bu \equiv u(x) - u(\sigma x) = \psi(x) \quad (x \in S) \tag{2}$$

рассматривалась в предположении, что множество $\sigma S \cap S \equiv \omega$ непусто и $\sigma\omega \subset \omega$. Здесь же изучается разрешимость (1), (2) без указанных ограничений на σ. В такой ситуации, как оказалось, теория задачи существенно зависит от того, порождает ли отображение σ на S "поглощающее множество"

$$\Omega \equiv \{x \in S : \sigma^i x \in S,\ i = 1, 2, \dots\}.$$

В этом разделе приведен ряд важных для дальнейших построений свойств (С, для краткости) Ω и связанных с Ω множеств: $\omega_0 \equiv \{x \in S : \sigma x \in S\}$, $\omega_i \equiv \{x \in S : \sigma x \in \omega_{i-1}\}$, $i = 1, 2, \dots$; $\Omega_\omega \equiv \{x \in S : \rho(x, \Omega) < \varepsilon\}$. Здесь $\sigma^i x = \sigma(\sigma^{i-1}x)$, $\sigma^0 x = x$, $\rho(x, \Omega)$ — расстояние от x до Ω. Всюду предполагается, что выполнено

Условие (B_0): σ — однозначное, непрерывное отображение $\overline{D}$ в $\overline{D}$.

С 1. *Множества* ω_i *компактны в* R^n, $i = 0, 1, 2, \dots$

Доказательство. Ограниченность ω_i следует из ограниченности S. Обозначим $\omega_0' = \{x \in \overline{D} : \sigma x \in S\}$, $\omega_i' = \{x \in \overline{D} : \sigma x \in \omega_{i-1}\}$, $i = 1, 2, \dots$ Множество ω_0' замкнуто как прообраз при непрерывном отображении замкнутого множества $S \subset R^n$ ([2], гл. II, § 3, с. 53); далее по индукции доказывается замкнутость ω_i' при $i = 1, 2, \dots$ Но очевидно, что $\omega_i = \omega_i' \cap S$, а потому ω_i замкнуты.

С 2. *Верны включения* $\omega_i \subset \omega_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$

Доказательство. Предположим вначале, что $\omega_i \neq \emptyset$ для всех i. Из определения ω_1 и ω_0 следует в силу включения $\omega_0 \subset S$, что $\omega_1 \subset \omega_0$. Допустим, что включение $\omega_m \subset \omega_{m-1}$ установлено при некотором натуральном m. Выберем произвольно $x' \in \omega_{m+1}$, т. е. $x' \in S$ и $\sigma x' \in \omega_m$. Тогда по допущению $\sigma x' \in \omega_{m-1}$, так что $x' \in \omega_m$ и $\omega_{m+1} \subset \omega_m$. Случай, когда $\omega_j \neq \emptyset$ при некотором $j \geq 0$, тривиален.

С 3. *Множество* ω_m *пусто при некотором* $m \geq 1$ *тогда и только тогда, когда* $\omega_{m-1} \cap \omega = \emptyset$.

Доказательство. Из определения ω_m следует, что $\sigma\omega_m \subset \omega_{m-1} \subset S$. Так как $\omega_m \subset S$, то $\sigma\omega_m \subset \sigma S$, а потому $\sigma\omega_m \subset S \cap \sigma S = \omega$ и $\sigma\omega_m \subset \omega_{m-1} \cap \omega$. Из этого включения вытекает, что если $\omega_{m-1} \cap \omega = \emptyset$, то $\omega_m = \emptyset$. Допустим, что $\omega_m = \emptyset$, а $\omega_{m-1} \cap \omega \neq \emptyset$ и $x' \in \omega_{m-1} \cap \omega$. Так как $x' \in \omega$, то $x' \in \sigma S$ и существует $y' \in S : x' = \sigma y'$. Но $x' = \sigma y' \in \omega_{m-1}$, так что $y' \in \omega_m$, а это противоречит допущению $\omega_m = \emptyset$.

С 4. *Множество Ω компактно в R^n и $\sigma\Omega \subset \Omega$.*

Доказательство. Ограниченность Ω очевидна. Покажем, что

$$\Omega = \widehat{\Omega}, \quad \text{где} \quad \widehat{\Omega} \equiv \bigcap_{i=0}^{\infty} \omega_i. \tag{3}$$

Отсюда и из С 1 будет следовать замкнутость Ω. Предположим, что $\Omega \neq \emptyset$ и $x' \in \Omega$. Фиксируем произвольное целое число $i \geq 0$ и покажем, что $x' \in \omega_i$. Поскольку $\sigma^i x' \in \Omega \subset S$ и (по определению Ω) $\sigma(\sigma^i x') \in \Omega \subset S$, то $\sigma^i x' \in \omega_0$. Если $i = 0$, то требуемое показано. Допустим, что $i \geq 1$ и уже установлена при некотором целом $m \in [0, i)$ справедливость включения $\sigma^{i-m} x' \in \omega_m$. Так как $\sigma^{i-m-1} x' \in S$ и $\sigma(\sigma^{i-m-1} x') \in \omega_m$, то $\sigma^{i-m-1} x' \in \omega_{m+1}$. Таким образом, за конечное число шагов установим, что $\sigma^0 x' = x' \in \omega_i$. Из сказанного следует $x' \in \Omega$ и $\Omega \subset \widehat{\Omega}$. Кроме того, показано, что при $\omega_i \neq \emptyset$ для всех i $\Omega \neq \emptyset$.

Предположим, что $\omega_i \neq \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots$ Тогда $\widehat{\Omega} \neq \emptyset$, что вытекает из С 1, С 2 и из теоремы Кантора о вложенных компактах. Пусть $x'' \in \widehat{\Omega}$, т. е. $x'' \in \omega_i$, $i = 0, 1, \ldots$ Из определения ω_i следует, что (при $i \geq 1$) $\sigma x'' \in \omega_{i-1} \subset S, \ldots, \sigma^m x'' \in \omega_{i-m} \subset S$ для любого целого числа $m \in [0, i]$. Таким образом, $\sigma^m x'' \in S$ при $m = 1, 2, \ldots$, а потому $x'' \in \Omega$ и $\widehat{\Omega} \subset \Omega$. Итак, если $\omega_i \neq \emptyset$ для всех i, то равенство (3) верно. Верно оно и тогда, когда $\omega_j = \emptyset$ при некотором $j \geq 0$, т. к. в этом случае, очевидно, $\widehat{\Omega} = \emptyset$ и по сказанному выше $\Omega = \emptyset$. Справедливость включения $\sigma\Omega \subset \Omega$ легко следует из определения Ω.

С 5. *Множество Ω пусто тогда и только тогда, когда $\omega_j = \emptyset$ при некотором $j \geq 0$.*

С 6. *Если $\Omega \neq S$, то $\omega_0 \neq S$.*

Свойства 5, 6 вытекают из доказательства С 4 и из определений ω_0, Ω (см. также [2], гл. II, § 7, с. 70).

С 7. *Пусть $\Omega \neq \emptyset$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число $m \geq 0$, что $\omega_m \subset \Omega_\varepsilon$.*

Доказательство легко провести, рассуждая от противного и используя построения, аналогичные примененным для доказательства теоремы Кантора в [3] (гл. I, § 9, с. 49).

Отметим еще несколько свойств ω_i и Ω, которые позволят указать место результатов [1] в общей картине.

С 8. *Если $\Omega \neq \emptyset$, то $\Omega \cap \omega \neq \emptyset$ и $\sigma\Omega \subset \Omega \cap \omega$.*

Доказательство. Из определения ω_i следует $\sigma\omega_i \subset \omega_{i-1} \subset S$, $i = 1, 2, \ldots$ Кроме того, $\sigma\omega_i \subset \sigma S$, следовательно, $\sigma\omega_i \subset S \cap \sigma S = \omega$ и $\sigma\omega_i \subset \omega_{i-1} \cap \omega$. Так как $\Omega \neq \emptyset$, то (С 5) $\omega_i \neq \emptyset$ для всех i и $\omega_{i-1} \cap \omega \neq \emptyset$, $i = 1, 2, \ldots$, в силу последнего включения. Поскольку (С 2) $\omega_i \cap \omega \subset \omega_{i-1} \cap \omega$, $i = 1, 2, \ldots$, то с учетом теоремы Кантора и (3) имеем $\emptyset \neq \bigcap\limits_{i=0}^{\infty} (\omega_i \cap \omega) = \Big(\bigcap\limits_{i=0}^{\infty} \omega_i\Big) \cap \omega = \Omega \cap \omega$. Далее, из С 4 и из определения Ω следует $\sigma\Omega \subset \Omega \subset S$, откуда $\sigma\Omega \subset \sigma S$, так что $\sigma\Omega \subset S \cap \sigma S = \omega$ и $\sigma\Omega \subset \Omega \cap \omega$.

С 9. *Пусть $e \subset S$ и $\sigma e \subset e$. Тогда $e \subset \Omega$.*

Доказательство. Если $e = \emptyset$, то справедливость С 9 очевидна. Пусть $e \neq \emptyset$ и $x' \in e$. Так как $\sigma x' \in \sigma e \subset S$, то $x' \in \omega_0$ и, значит, $e \subset \omega_0$. Пусть установлена принадлежность $e \subset \omega_m$ при некотором $m \geq 0$. Тогда $\sigma x' \in e \subset \omega_m$, следовательно, $x' \in \omega_{m+1}$ и $e \subset \omega_{m+1}$. Итак, $e \subset \omega_i$ при всех $i = 0, 1, \ldots$, а потому (см. (3)) $e \subset \Omega$.

С 10. *Верно равенство $\omega_0 = \{x \in S : \sigma x \in \omega\}$.*

Доказательство. Обозначим множество в правой части этого равенства через $\widehat{\omega}_0$. Ясно, что $\omega_0 \supset \widehat{\omega}_0$. Пусть $\omega_0 \neq \emptyset$ и $x' \in \omega_0$. Тогда $x' \in S$, $\sigma x' \in S$ и $\sigma x' \in \sigma S$, так что $\sigma x' \in \omega$. Следовательно, $x' \in \widehat{\omega}_0$, $\omega_0 \subset \widehat{\omega}_0$ и $\omega_0 = \widehat{\omega}_0$. Нетрудно видеть, что $\omega_0 = \emptyset$ тогда и только тогда, когда $\widehat{\omega}_0 = \emptyset$.

С 11. *Если $\sigma\omega \subset \omega$, то $\omega \subset \Omega = \omega_i$, $i = 0, 1, \ldots$*

Доказательство. Включение $\omega \subset \Omega$ следует из С 9. Ясно, что если $\omega = \emptyset$, то $\omega_i = \emptyset$, $i = 0, 1, \ldots$, и в силу (3) $\Omega = \emptyset$. Предположим, что $\omega \neq \emptyset$; тогда, очевидно, $\omega_0 \neq \emptyset$. Выберем произвольно $x' \in \omega_0$, так что $x' \in S$ и $\sigma x' \in \omega$ (С 10). Отсюда и из условия $\sigma\omega \subset \omega$ следует, что $\sigma^i x' \in \omega \subset S$, $i = 2, 3, \ldots$, а значит, $x' \in \Omega$ и $\omega_0 \subset \Omega$. Из этого включения и С 2 выводим включение $\omega_i \subset \Omega$, а из (3) — $\Omega \subset \omega_i$, так что $\Omega = \omega_i$, $i = 0, 1, \ldots$

4. Формулировка теорем о разрешимости задачи

В этой части статьи продолжена нумерация теорем и вспомогательных предложений, начатая в [1]. Там же читатель найдет определения применяемых ниже пространств и содержание условий (L) — условий однозначной разрешимости в $C_{2+\alpha}(D)$ задачи Дирихле

$$\mathcal{L}z = g(x) \ \ (x \in D), \quad Iz = \varphi(x) \ \ (x \in S). \tag{4}$$

Приведем еще несколько понятий и обозначений, используемых в дальнейшем.

Оператор, действующий в паре вещественных функциональных пространств, назовем положительным, если он любую неотрицательную функцию переводит в неотрицательную.

Запись $\{g, \varphi\} \neq 0$, сделанная для функций $g(x) \in C(D)$, $\varphi(x) \in C(S)$, будет означать, что хотя бы одна из этих функций не равна тождественно нулю на соответствующем множестве.

Под элементом пространства С.Л. Соболева $W_p^2(D)$ с $p > n/2$ понимается далее не класс эквивалентных функций, а представитель этого класса, принадлежащий $C(\overline{D})$.

Ответы на вопросы о существовании и "количестве" классических решений задачи (1), (2) зависят, в частности, от того, будет ли пустым множество Ω. В случае $\Omega = \emptyset$ достаточно полную картину дают теоремы 3, 4. Заметим, что соответствующие результаты известны для случая $\omega = \emptyset$ (о чем говорилось в [1]). Но, как нетрудно видеть, $\Omega = \emptyset$, если $\omega = \emptyset$, а обратное неверно.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (L), (B_0), $c(x) \not\equiv 0$ и $\Omega = \emptyset$. Тогда для любых $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in C(S)$ задача (1), (2) имеет единственное решение $u_1(x) \in C_{2+\alpha}(D)$. При этом линейные операторы G_1 и Γ_1, определяемые равенством $u_1 \equiv G_1 f + \Gamma_1 \psi$, действуют непрерывно в соответствующих парах пространств. Кроме того, $u_1 > 0$ в $\overline{D} \setminus \omega_0$, если $f \leq 0$ в D, $\psi \geq 0$ на S, $\{f, \psi\} \neq 0$.*

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы 3, $a_{ij} \in C(\overline{D})$ $(i, j = \overline{1, n})$ и $p > n/2$. Тогда существует такое линейное расширение $\widetilde{G}_1$ оператора G_1 с $C_\alpha(D)$ на $L_p(D)$, что $\widetilde{G}_1$ — вполне непрерывный оператор из $L_p(D)$ в $C(\overline{D})$; для $f \in L_p(D)$ функция $\widetilde{u}_1(x) \equiv (\widehat{G}_1 f)(x)$ представима в виде $\widetilde{u}_1 = u_1' + u_1''$, где $u_1' \in W_p^2(D)$, $u_1'' \in C_{2+\alpha}(D)$; $\mathcal{L}\widetilde{u}_1 = f$ для почти всех $x \in D$, $B\widetilde{u}_1 = 0$ для всех $x \in S$.*

В случае $\Omega \neq \emptyset$ разрешимость (1), (2) тесно связана с разрешимостью функционального уравнения

$$\eta(x) - \eta(\sigma x) = \psi(x), \quad x \in \Omega. \tag{5}$$

А именно, при некоторых предположениях задача (1), (2) имеет

Свойство (F): для любых фиксированных $f \in C_\alpha(D)$ и $\psi \in C^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ множество решений из $C_{2+\alpha}^{\mu\gamma}(D, \Omega)$ задачи (1), (2) эквивалентно множеству решений из $C^\mu(\Omega)$ уравнения (5).

Наиболее общую форму упомянутых предположений содержит

Лемма. *Пусть $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \neq S$ и*

(а) *задача (4) при $g \equiv 0$ и любой $\varphi \in C^\mu(S)$ имеет решение в $C_{2+\alpha}^{\mu\gamma}(D, \Omega)$;*

(б) *задача (1), (2) при любых $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ имеет в $\overset{0}{C}{}_{2+\alpha}^{\mu\gamma}(D, \Omega)$ единственное решение.*

Тогда задача (1), (2) обладает свойством (F).

Доказательство леммы повторяет рассуждения п. 4 раздела 2 из [1] с заменой ω на Ω.

Требование (а) леммы выполнено, если выполнены условия (L) и

Условие $(B\Omega)$: σ — однозначное непрерывное отображение $\overline{D}$ в $\overline{D}$; $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \neq S$; существуют числа $d_0 > 0$ и $\gamma \in (0, 2]$ такие, что

$$|\sigma x - \sigma\xi| \leq d_0|x - \xi|^\gamma \quad \text{при} \ \ x \in S \setminus \Omega, \ \ \xi \in \Omega;$$
$$|\sigma x - \sigma\xi| \leq d_0|x - \xi| \quad \text{при} \ \ x \in \Omega, \qquad \xi \in \Omega.$$

Доказывается это утверждение точно так же, как предложение 2 в [1], надо лишь заменить там ω на Ω.

Достаточные условия выполнения требования (б) леммы приведены в теореме 5, среди них

Условие $(V\Omega)$: $\Omega \neq \emptyset$, $\Omega \neq S$; существуют положительные числа a, ν, δ, d_1, d_2 и функция $v(x)$ такие, что $a < 1$, $v \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$,

$$d_1\rho^\nu(x, \Omega) \leq v(x) \leq d_2\rho^\nu(x, \Omega) \ \ \text{при} \ \ x \in S; \tag{6}$$
$$v(\sigma x) \leq v(x) \ \ \text{при} \ \ x \in S \setminus \Omega_\delta, \quad v(\sigma x) \leq av(x) \ \ \text{при} \ \ x \in \Omega_\delta; \tag{7}$$

$v(x) > 0$, $(\mathcal{L}v)(x) \leq -1$ при $x \in D$.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия (L), $(B\Omega)$, $(V\Omega)$, причем $\nu \geq \mu\gamma/2$. Тогда для любых $f \in C_\alpha(D)$, $\psi \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ задача* (1), (2) *имеет в $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D, \Omega)$ единственное решение $u_2(x)$. Линейные операторы G_2 и Γ_2, определяемые равенством $u_2 \equiv G_2 f + \Gamma_2\psi$, действуют непрерывно в соответствующих парах пространств. Кроме того, $u_2 > 0$ в $\overline{D} \setminus \omega_0$, если $f \leq 0$ в D, $\psi \geq 0$ на S, $\{f, \psi\} \neq 0$.*

Из этой теоремы и сказанного выше об условиях выполнения требования (а) леммы следует

Теорема 6. *При выполнении предположений теоремы* 5 *задача* (1), (2) *обладает свойством* (F).

Замечание 3. Если выполнены условия (L) и $(B\Omega)$, то для разрешимости задачи (1), (2) в пространстве $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D, \Omega)$ условие $(V\Omega)$ необходимо.

Действительно, пусть $\widetilde{v}(x)$ — принадлежащее этому пространству решение (1), (2) с $f(x) \equiv -1$, $\psi(x) \equiv \rho^{\mu\gamma/2}(x, \Omega)$ (ясно, что $\psi \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$, $\psi(x) > 0$ на $S \setminus \Omega$). Нетрудно показать, используя сильный принцип максимума, что $\widetilde{v}(x) > 0$ в D. Из последнего неравенства и определения $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(D, \Omega)$ следует $0 \leq \widetilde{v}(\sigma x) \leq d_3\rho^{\mu\gamma/2}(x, \Omega)$, $x \in S$, где $d_3 = \text{const} > 0$. Отсюда и граничного равенства $\widetilde{v}(x) - \widetilde{v}(\sigma x) = \rho^{\mu\gamma/2}(x, \Omega)$ легко выводим для $\widetilde{v}$ оценки типа (6) и неравенство более сильное, чем система (7): $\widetilde{v}(\sigma x) \leq \widetilde{a}\widetilde{v}(x)$, $x \in S$, где $\widetilde{a} = d_3/(1 + d_3)$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 5, $a_{ij} \in C(\overline{D})$ $(i, j = \overline{1, n})$ *и $p > n$. Тогда существует такое линейное расширение $\widetilde{G}_2$ оператора G_2 с $C_\alpha(D)$ на $L_p(D)$, что $\widetilde{G}_2$ — вполне непрерывный оператор из $L_p(D)$ в $C(\overline{D})$; для $f \in L_p(D)$ функция $\widetilde{u}_2(x) \equiv (\widetilde{G}_2 f)(x)$ представима в виде $\widetilde{u}_2 = u_2' + u_2''$, где $u_2' \in W_p^2(D) \cap \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(D, \Omega)$, $u_2'' \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D, \Omega)$; $\mathcal{L}\widetilde{u}_2 = f$ для почти всех $x \in D$, $B\widetilde{u}_2 = \psi$ для всех $x \in S$.*

Здесь $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(D, \Omega)$ — подпространство $C(\overline{D})$, состоящее из функций $z(x)$, для которых $Iz, Az \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$.

Замечание 4. Неравенство $c(x) \leq 0$ (входящее в (L)) можно при $a_{ij} \in C(\overline{D})$ заменить в условиях теоремы 6 на требования единственности решения из $C_{2+\alpha}(D)$ задачи (4) и единственности решения из $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D, \Omega)$ задачи (1), (2).

Это вытекает из леммы, предложения 3 (ниже), фредгольмовости задачи (4) и теоремы 7.

Замечание 5. Несложно показать, используя С 8, что теоремы 5, 6, 7 справедливы и в том случае, если в их условиях и утверждениях и в (5) заменить Ω на $\Omega \cap \omega$. Из сказанного и С 11 следует, что теоремы 1, 2 — следствия теорем 5, 6.

5. Доказательства теорем 3, 4

Проводимые построения опираются на свойства множеств ω_i и следующие известные факты теории задачи Дирихле (см. [4], гл. II, § 7, с. 74; гл. III, § 8, с. 113).

Предложение 3. *Пусть выполнены условия* (L). *Тогда задача* (4) *имеет единственное решение* $z_0(x) \in C_{2+\alpha}(D)$ *для любых* $g \in C_\alpha(D)$, $\varphi \in C(S)$. *При этом линейные операторы* G_0 *и* Γ_0, *определяемые равенством* $z_0 \equiv G_0 g + \Gamma_0 \varphi$, *действуют непрерывно в соответствующих парах пространств. Кроме того,* $-G_0$ *и* Γ_0 *— положительные операторы, точнее,* $z_0 > 0$ *в* D, *если* $g \leq 0$ *в* D, $\varphi \geq 0$ *на* S, $\{g, \varphi\} \neq 0$.

1. Установим вначале, что задача (1) ,(2) не может иметь в классе $C^2(D) \cap C(\overline{D})$ (а значит, и в $C_{2+\alpha}(D)$) более одного решения. Действительно, пусть функция $U(x)$ из этого класса удовлетворяет равенствам $\mathcal{L}\mathcal{U} = 0$ в D, $BU = 0$ на S. Допустим $U(x) \not\equiv 0$. Тогда, не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $\max\limits_{x \in \overline{D}} U(x) = U(x') > 0$. Согласно сильному принципу максимума ($U(x) \not\equiv U(x')$, т. к. $c(x) \not\equiv 0$) $x' \in S$ и

$$U(x) < U(x'), \quad x \in D. \tag{8}$$

Поскольку $\Omega = \emptyset$, то существует натуральное число $m : \sigma^i x' \in S$ при $i = \overline{0, m-1}$, а $\sigma^m x' \in D$. Отсюда в силу (8) следует $U(\sigma^m x') < U(x')$. Из краевого условия $U(x) - U(\sigma x) = 0$ $(x \in S)$ выводим $U(\sigma^m x') = U(\sigma^{m-1} x') = \cdots = U(x')$. Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверно.

2. Определим последовательности функций $w_i(x) \equiv (\Gamma_0 \varphi_i)(x)$, $x \in D$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, где

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \quad \varphi_i(x) \equiv w_{i-1}(\sigma x) = (A w_{i-1})(x), \quad x \in S, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Ясно, что

$$\varphi_i(x) = ((A\Gamma_0)^i \varphi_0)(x), \quad x \in S, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{9}$$

Из предложения 3 следует $w_i \in C_{2+\alpha}(D)$; $\varphi_i \in C(S)$; $\varphi_i(x) > 0$ при $x \in S$;

$$w_i(x) < 1 \;\text{ при }\; x \in D, \quad i = 0, 1, \ldots \tag{10}$$

(При $c \leq 0$, $c \not\equiv 0$ неравенство (10) легко получить, если применить последнее утверждение предложения 3 к функции $(1 - w_i)$.)

Из условия $\Omega = \emptyset$ следует в силу С 2 и С 5 существование такого целого числа $k \geq 0$, что $\omega_{k-1} \neq \emptyset$, а $\omega_k = \emptyset$; полагаем здесь и далее $\omega_{-1} \equiv S$. Несложно установить, что

$$\varphi_k(x) = 1 \;\text{ при }\; x \in \omega_{k-1}, \quad \varphi_k(x) < 1 \;\text{ при }\; x \in S \setminus \omega_{k-1}. \tag{11}$$

Далее имеем для $x \in S$

$$\varphi_{k+1}(x) \leq \max_{x \in S} w_k(\sigma x) = \max_{x \in \sigma S} w_k(x) = w_k(x''), \;\text{ где }\; x'' \in \sigma S.$$

Если $x'' \in \sigma S \cap D$, то $w_k(x'') < 1$ в силу (10). Если $x'' \in \sigma S \cap S = \omega$ (это возможно только при $k \geq 1$), то $x'' \notin \omega_{k-1}$ (иначе $x'' \in \omega \cap \omega_{k-1}$ и $\omega_k \neq \emptyset$ по С 3), а потому $w_k(x'') = \varphi_k(x'') < 1$ в силу (11). Таким образом, $\varphi_{k+1}(x) < 1$, $x \in S$. Из последнего неравенства и (9) следует, что $((A\Gamma_0)^{k+1} \varphi_0)(x) \leq b < 1$, $x \in S$, где число b, очевидно, определяется оператором $\mathcal{L}$, областью D и отображением σ. Ясно, что действующий в $C(S)$ оператор $A\Gamma_0$ является непрерывным и положительным (см. предложение 3 и условие (B_0)). Поэтому, если $\varphi \in C(S)$, $\|\varphi\|_{C(S)} \leq 1$, то $|((A\Gamma_0)^{k+1} \varphi)(x)| \leq ((A\Gamma_0)^{k+1} \varphi_0)(x) \leq b$ на S и, таким образом, $\|(A\Gamma_0)^{k+1}\|_{C(S) \to C(S)} \leq b$. Отсюда следует ([5], гл. V, § 4, с. 211–212), что оператор $(E - A\Gamma_0)$ имеет в $C(S)$ непрерывный и положительный обратный (E — тождественный оператор). Поэтому (см. предложение 3) операторы

$$\Gamma_1 \equiv \Gamma_0(E - A\Gamma_0)^{-1}, \quad G_1 \equiv (E + \Gamma_1 A)G_0 \tag{12}$$

действуют непрерывно: Γ_1 — из $C(S)$ в $C_{2+\alpha}(D)$, G_1 — из $C_\alpha(D)$ в $C_{2+\alpha}(D)$; кроме того, $-G_1$ и Γ_1 положительны. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $u_1 \equiv G_1 f + \Gamma_1\psi$ — решение (1), (2).

3. Пусть $f \le 0$ в D, $\psi \ge 0$ на S, $\{f, \psi\} \ne 0$. Отсюда, используя факт положительности $-G_1$, Γ_1 и предложение 3, легко выводим, что $u_1(x) > 0$ в D. При $x \in S \setminus \omega_0$ точка $\sigma x \in D$ и потому $u_1(x) = u_1(\sigma x) + \psi(x) > 0$. Теорема 3 доказана.

4. Из результатов [6] (гл. III, § 9, с. 222–224, § 11, с. 233) следует, что в условиях теоремы 4 существует линейное расширение $\widetilde{G}_0$ оператора G_0 с $C_\alpha(D)$ на $L_p(D)$. При этом $\widetilde{G}_0$ действует непрерывно из $L_p(D)$ в $W_p^2(D)$ и, следовательно, $\widetilde{G}_0$ — вполне непрерывный оператор из $L_p(D)$ в $C(\overline{D})$. Учитывая (12), можем заключить, что искомым линейным расширением G_1 будет $\widetilde{G}_1 \equiv (E + \Gamma_1 A)\widetilde{G}_0$; $u_1' \equiv \widetilde{G}_0 f$, $u_1'' \equiv \Gamma_1 A \widetilde{G}_0 f$. Теорема 4 доказана.

6. Доказательства теорем 5, 7

1. Начнем с доказательства единственности решения задачи (1), (2) в $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}_{2+\alpha}(D, \Omega)$. Пусть $U(x)$ — элемент этого пространства и $\mathcal{L}u = 0$ в D, $BU = 0$ на S. Убедиться в том, что $U(x) = 0$ в $\overline{D}$ можно, повторив с двумя изменениями рассуждения п. 1 предыдущего раздела. Первое: вывод о том, что $U(x) \not\equiv \mathrm{const}$ следует из допущения $U(x') > 0$ и равенства $U(x) = 0$ на Ω. Второе: согласно только что сказанному, $x' \notin \Omega$, а потому существует натуральное число m со свойствами, указанными в упомянутых рассуждениях.

2. Доказательство существования решения задачи начнем со следующего важного замечания. При выполнении условий теоремы 5 можно, не нарушая общности рассуждений, считать, что $\nu = \mu\gamma/2$ (пояснения см. в доказательстве теоремы 1). В этом случае, как нетрудно проверить с помощью (6), эквивалентной норме $\varkappa_{\mu\gamma}$ будет в $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ норма $\varkappa^v$, определяемая равенством

$$\varkappa^v(\varphi) \equiv \sup_{x \in S \setminus \Omega} (|\varphi(x)|/v(x)).$$

Далее доказательство проводится так же, как доказательство теоремы 1 в [7] (конечно, с заменой ω на Ω) во всем, кроме одного существенного момента. А именно, факт обратимости оператора $B\Gamma_0 = E - A\Gamma_0$ в $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ здесь приходится устанавливать с помощью иных, чем в [7], построений (напомним, что в [7] доказано непрерывное действие $A\Gamma_0$ в $C^v(S)$, а значит, в $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$) в силу эквивалентности $\varkappa^v$ и $\varkappa_{\mu\gamma}$. Перейдем к построениям, подчеркнув еще раз, что в этом разделе через Γ_0 обозначается сужение с $C(S)$ на $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ соответствующего разрешающего оператора задачи Дирихле.

3. Рассмотрим последовательность функций $\{v_i(x)\}$, удовлетворяющих равенствам

$$(\mathcal{L}v_i)(x) = -\frac{1}{i+1}, \quad x \in D, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

$$v_0(x) = v(x), \quad v_i(x) = v_{i-1}(\sigma x), \quad x \in S, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{14}$$

Из предложения 3 и свойств v, σ следует, что такие функции существуют и $v_i \in C_{2+\alpha}(D)$, $v_i(x) > 0$ для $x \in D$.

Предложение 4. *При любом натуральном i выполнены неравенства*

$$v_i(\sigma x) < v(x), \quad x \in S \setminus \omega_{i-1}; \tag{15}$$

$$v_i(\sigma x) \le v(\sigma x), \quad x \in S. \tag{16}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{L}v_0 = -1$, $\mathcal{L}v \le -1$ в D, $v_0 = v$ на S, то по предложению 3

$$v_0(x) \le v(x), \quad x \in \overline{D}. \tag{17}$$

Из (17) и (7) следует $v_0(\sigma x) \le v(\sigma x) \le v(x)$ на S, а потому с учетом (14)

$$v_0(\sigma x) \le v_0(x), \quad x \in S. \tag{18}$$

Поскольку (см. (13)) $\mathcal{L}v_1 > \mathcal{L}v_0$ в D, $v_1(x) = v_0(\sigma x) \le v_0(x)$ на S (см. (14), (18)), то (предложение 3)

$$v_1(x) \le v_0(x), \quad x \in \overline{D}; \tag{19}$$

$$v_1(x) < v_0(x), \quad x \in D. \tag{20}$$

Из (19), (14) получаем

$$v_1(\sigma x) \le v_0(\sigma x) = v_1(x), \quad x \in S, \tag{21}$$

а из (20), (14) и из определения ω_0 —

$$v_1(\sigma x) < v_0(\sigma x) = v_1(x), \quad x \in S \setminus \omega_0. \tag{22}$$

Покажем по индукции, что при любом натуральном i верны неравенства

$$v_i(x) \le v_{i-1}(x), \quad x \in \overline{D}; \tag{23}$$

$$v_i(\sigma x) \le v_i(x), \quad x \in S; \tag{24}$$

$$v_i(\sigma x) < v_i(x), \quad x \in S \setminus \omega_{i-1}. \tag{25}$$

Предположим, что они установлены для $i = j$ (для $i = 1$ это сделано, см. (19), (21), (22)). Докажем их справедливость при $i = j + 1$.

Так как $\mathcal{L}v_{j+1} > \mathcal{L}v_j$ в D (см. (13)), $v_{j+1}(x) = v_j(\sigma x) \le v_j(x)$ на S (см. (14) с $i = j + 1$, (24) с $i = j$), то

$$v_{j+1}(x) \le v_j(x), \quad x \in \overline{D}, \tag{26}$$

$$v_{j+1}(x) < v_j(x), \quad x \in D. \tag{27}$$

Из (26), (14) следует $v_{j+1}(\sigma x) \le v_j(\sigma x) = v_{j+1}(x)$ на S. Итак, (23) и (24) при $i = j+1$ доказаны. В силу (14), (25) и индуктивного предположения имеем $v_{j+1}(x) = v_j(\sigma x) < v_j(x)$ для $x \in S \setminus \omega_{j-1}$. Отсюда (т. к. $\sigma x \in S \setminus \omega_{j-1}$ для $x \in \omega_0 \setminus \omega_j$)

$$v_{j+1}(\sigma x) < v_j(\sigma x), \quad x \in \omega_0 \setminus \omega_j. \tag{28}$$

Из (27) следует $v_{j+1}(\sigma x) < v_j(\sigma x)$ при $x \in S \setminus \omega_0$, что вместе с (28) приводит к неравенству $v_{j+1}(\sigma x) < v_j(\sigma x)$, $x \in S \setminus \omega_j$. Таким образом, с учетом (14) можем утверждать, что (25) верно при $i = j + 1$. Теперь (15) легко выводим из (25), (23) и первого равенства в (14), а (16) — из (23) и (17).

Завершим доказательство предложения 4 следующим замечанием. Из требования $\Omega \ne S$ вытекает (см. С 6, С 2), что неравенства (15) и (25) устанавливаются на непустом множестве $S \setminus \omega_{i-1}$.

4. Пусть функция $\Psi(x) \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ и $\varkappa^v(\Psi) \le 1$, так что

$$|\Psi(x)| \le v(x), \quad x \in S. \tag{29}$$

Определим на S последовательность функций

$$\Psi_i(s) \equiv ((A\Gamma_0)^i \Psi)(x), \quad i = 1, 2, \dots \tag{30}$$

Из сказанного в конце п. 2 этого раздела об $A\Gamma_0$ следует, что все $\Psi_i \in \overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$.

Предложение 5. *Для любого натурального i верно неравенство*

$$|\Psi_i(x)| \le v_{i-1}(\sigma x), \quad x \in S. \tag{31}$$

Доказательство. Из (13) и (14) вытекает

$$v_i(x) = -\frac{1}{i+1}(G_0 I)(x) + (\Gamma_0 \Phi_i)(x), \quad x \in \overline{D}, \ \ i = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\Phi_0(x) = v(x), \ \ \Phi_i(x) = v_{i-1}(\sigma x) = (Av_{i-1})(x), \ \ x \in S, \ \ i = 1, 2, \dots$$

Отсюда, учитывая положительность операторов $-G_0$, Γ_0 и A, несложно вывести

$$\Phi_i(x) \ge ((A\Gamma_0)^i \Phi_0)(x), \ \ x \in S, \ \ i = 1, 2, \dots \tag{32}$$

Из (29), (30), (32) и равенства $\Phi_0(x) = v(x)$, $x \in S$, следуют (в силу положительности $(A\Gamma_0)^i$) неравенства $|\Psi_i(x)| \le \Phi_i(x)$, $x \in S$, равносильные (31).

5. Обозначим $\Omega^h \equiv \{x \in S : v(x) < h\}$, где число $h \in (0, d_1\delta^\nu)$.

Предложение 6. *Верно включение $\Omega^h \subset \Omega_\delta$. Кроме того, существует такое целое число $k_0 \ge 0$, что $\omega_i \subset \Omega^h$ при всех $i \ge k_0$.*

Доказательство. Выберем число $\delta_0 \in (0, (h/d_2)^{1/\nu})$. Легко показать, используя (6), что $\Omega_{\delta_0} \subset \Omega^h \subset \Omega_\delta$. Для завершения доказательства предложения 6 осталось сослаться на С 7 и С 2, согласно которым существует такое k_0, что $\omega_i \subset \Omega_{\delta_0}$ при $i \ge k_0$.

Положим $k = k_0 + 2$. Из предложений 5 и 4 следует

$$|\Psi_k(x)| \le v_{k-1}(\sigma x) < v(x), \qquad x \in S \setminus \omega_{k-2}, \tag{33}$$

$$|\Psi_k(x)| \le v_{k-1}(\sigma x) \le v(\sigma x), \quad x \in S. \tag{34}$$

Из непрерывности $v(x)$ на S следует замкнутость множества $S \setminus \Omega^h$. Очевидна непрерывность на этом множестве функции $v_{k-1}(\sigma x)/v(x)$. Согласно предложению 6 $\omega_{k-2} \subset \Omega^h$, так что $S \setminus \Omega^h \subset S \setminus \omega_{k-2}$. Из сказанного в силу (33) вытекает

$$\max_{x \in S \setminus \Omega^h} \frac{|\Psi_k(x)|}{v(x)} \le \max_{x \in S \setminus \Omega^h} \frac{v_{k-1}(\sigma x)}{v(x)} = a_1 < 1, \tag{35}$$

где число a_1 зависит от $v(x)$, $\mathcal{L}$, D, σ.

Из (34), (7) и включения $\Omega^h \subset \Omega_\delta$ (предложение 6) получим $|\Psi_k(x)| \le v(\sigma x) \le av(x)$, $x \in \Omega^h$, откуда $\sup\limits_{x \in \Omega^h \setminus \Omega} \frac{|\Psi_k(x)|}{v(x)} \le a$. Из последнего неравенства и из (35), (30) следует $\varkappa^v((A\Gamma_0)^k \Psi) \le a_0$, где $a_0 = \max(a, a_1) < 1$. Это означает с учетом сказанного в п. 2, что оператор $(E - A\Gamma_0)$ имеет в $\overset{0}{C}{}^{\mu\gamma}(S, \Omega)$ непрерывный и положительный обратный.

Завершается доказательство теоремы 5 так же, как доказательство теоремы 1 в [7].

6. Доказательство теоремы 7 повторяет без существенных изменений доказательство теоремы 4 из [8]. Там надо лишь заменить ω на Ω и снова учесть эквивалентность норм $\varkappa_{\mu\gamma}$ и $\varkappa^v$.

Литература

1. Ратыни А.К. *Об эллиптической краевой задаче с оператором суперпозиции в граничном условии.* I // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 4. – С. 36–40.
2. Шварц Л. *Анализ.* Т. 1. – М.: Мир, 1972. – 824 с.
3. Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Краткий курс функционального анализа.* – М.: Высш. школа, 1982. – 272 с.
4. Фридман А. *Уравнения с частными производными параболического типа.* – М.: Мир, 1968. – 427 с.
5. Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1977. – 744 с.
6. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа.* – М.: Наука, 1973. – 576 с.
7. Ратыни А.К. *О классической разрешимости одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка.* I // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 11. – С. 59–66.
8. Ратыни А.К. *О классической разрешимости одной нелокальной краевой задачи для эллиптического уравнения второго порядка.* II // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 1. – С. 51–59.

Ивановский государственный
химико-технологический университет

Поступила
26.09.2001