ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 12 (523)

УДК 519.112

В.А. ЕМЕЛИЧЕВ, К.Г. КУЗЬМИН

МЕРА КВАЗИУСТОЙЧИВОСТИ В МЕТРИКЕ l_1 ВЕКТОРНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ ПРИНЦИПОМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

1. Введение

Традиционно под устойчивостью задач оптимизации (как скалярных, так и векторных) понимают непрерывную зависимость решений от параметров задачи. Наиболее общие подходы к исследованию устойчивости оптимизационных задач основаны на изучении свойств многозначных (точечно-множественных) отображений, задающих принцип оптимальности (функцию выбора) [1]–[4].

Для исследования устойчивости задач дискретной оптимизации недостаточно традиционных методов математического анализа. В большей степени это объясняется сложностью дискретных моделей, которые при незначительных изменениях в исходных данных часто ведут себя непредсказуемо [4], [5]. В то же время, отказ от использования общетопологической терминологии применительно к пространству изолированных точек значительно упрощает постановку проблемы устойчивости. Существуют различные типы устойчивости задач дискретной оптимизации (напр., [4]–[9]). В широком смысле под устойчивостью дискретной задачи понимают наличие такой окрестности исходных данных в пространстве параметров задачи, что по отношению к начальной всякая "возмущенная" задача с параметрами из этой окрестности обладает некоторым наперед заданным свойством инвариантности. Например, свойство полунепрерывности сверху (снизу) по Хаусдорфу оптимального отображения эквивалентно свойству непоявления новых (сохранения исходных) оптимальных решений задачи при "малых" возмущениях ее параметров. При этом возникают понятия устойчивости [4]–[8] и квазиустойчивости [6]–[8], [10], [11] задач дискретной оптимизации.

В данной статье путем параметризации принципа оптимальности (от паретовского до лексикографического) удалось получить единую формулу радиуса квазиустойчивости в метрике l_1 всевозможных типов n-критериальных траекторных линейных задач, возникающих при произвольном разбиении множества частных критериев на группы. При этом внутри каждой группы задается паретовский принцип оптимальности, а между группами — лексикографический. Как следствия полученной формулы приведены и некоторые результаты качественного характера.

Отметим, что ранее в [12]–[16] были найдены формулы радиусов устойчивости и квазиустойчивости в случае метрики l_∞ для других типов параметризации принципа оптимальности в векторных траекторных и теоретико-игровых задачах ("от Кондорсе до Парето", "от Парето до Слейтера", "от Парето до Нэша").

2. Основные определения и свойства

Рассмотрим класс векторных комбинаторных задач с обобщенным принципом оптимальности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы фундаментальных исследований Республики Беларусь "Математические структуры 29" (проект № 913/28).

Пусть на системе подмножеств (траекторий) $T \subseteq 2^E$, $|T| \geq 2$, для множества $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ задан векторный критерий

$$f(t, A) = (f_1(t, A_1), f_2(t, A_2), \ldots, f_n(t, A_n)) \to \min_{t \in T},$$

частными критериями которого являются функции вида

$$f_i(t, A_i) = \sum_{j \in N(t)} a_{ij}, \quad i \in N_n = \{1, 2, \ldots, n\},$$

где $N(t) = \{j \in N_m : e_j \in t\}$, A_i – i-я строка матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}$. Будем полагать, что $f_i(\emptyset, A_i) = 0$.

Пусть $s \in N_n$, $N_n = \bigcup\limits_{r \in N_s} I_r$ — разбиение множества N_n на s групп: $I_r \neq \emptyset$, $r \in N_s$; $p \neq q \Rightarrow I_p \cap I_q = \emptyset$. Не исключая общности, будем предполагать, что разбиение имеет вид

$$I_1 = \{1, 2, \ldots, l_1\}, I_2 = \{l_1 + 1, l_1 + 2, \ldots, l_2\}, \ldots, I_s = \{l_{s-1} + 1, l_{s-1} + 2, \ldots, n\}.$$

Каждому такому разбиению $(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ множества N_n в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$ поставим в соответствие бинарное отношение строгого предпочтения $\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ между различными векторами $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ и $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$, полагая

$$y \Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)\, y' \ \Leftrightarrow\ y_{I_k} \succ y'_{I_k},$$

где $k = \min\{i \in N_s : y_{I_i} \neq y'_{I_i}\}$, y_{I_i} и y'_{I_i} — проекции соответственно векторов y и y' на координатные оси пространства $\mathbf{R}^n$ с номерами из группы I_i, $\succ$ — отношение, порождающее в пространстве $\mathbf{R}^{|I_k|}$ принцип оптимальности по Парето

$$y_{I_k} \succ y'_{I_k} \ \Leftrightarrow\ y_{I_k} \neq y'_{I_k} \ \& \ y_{I_k} \geq y'_{I_k}.$$

Введенное бинарное отношение $\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ задает такой принцип упорядоченности сформированных групп критериев, в котором предыдущая группа существенно важнее последующих. В результате это отношение порождает множество $(I_1, I_2, \ldots, I_s)$-эффективных траекторий в соответствии с правилом

$$T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) = \{t \in T : T^n(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$T^n(t, A) = \{t' \in T : f(t, A) \Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s) f(t', A)\}.$$

Очевидно, множество $T^n(A, N_n)$ является множеством Парето, т. е. множеством эффективных траекторий

$$P^n(A) = \{t \in T : \pi^n(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\pi^n(t, A) = \{t' \in T : f(t, A) \succ f(t', A)\}.$$

Легко также видеть, что множество $T^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$ совпадает с множеством лексикографически оптимальных траекторий

$$L^n(A) = \{t \in T : \lambda^n(t, A) = \emptyset\},$$

где

$$\lambda^n(t, A) = \{t' \in T : f(t, A) \vdash f(t', A)\},$$

$\vdash$ — лексикографический порядок в критериальном пространстве $\mathbf{R}^n$, задаваемый формулой

$$y \vdash y' \ \Leftrightarrow\ y_k > y'_k,$$

где $k = \min\{i \in N_n : y_i \neq y'_i\}$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $y' = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$.

Отметим, что множество $L^n(A)$ есть результат решения определенной последовательности скалярных условно-экстремальных задач (напр., [18]–[20]).

Таким образом, здесь под параметризацией принципа оптимальности понимается введение характеристики бинарного отношения предпочтения траекторий, которая позволяет связать такие широко известные функции выбора, как паретовскую и лексикографическую.

Нетрудно показать, что бинарное отношение $\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ антирефлексивно, асимметрично, транзитивно а, следовательно, ациклично. Поэтому в силу конечности множества траекторий T множество $T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ не пусто при любой матрице A и при всяком разбиении $(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ множества N_n. Векторную задачу поиска множества $T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ будем обозначать через $Z^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$.

Ясно, что $T^1(A, N_1)$ — множество оптимальных траекторий скалярной линейной траекторной задачи $Z^1(A, N_1)$, где $A \in \mathbf{R}^m$, в схему которой вкладываются многие экстремальные комбинаторные задачи на графах, задачи булева программирования, ряд задач теории расписаний и др. (напр., [7], [9], [10], [17]).

Следующие утверждения вытекают непосредственно из приведенных суждений.

Свойство 1. *$T \supseteq P_1(A) \supseteq T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$, где*

$$P_1(A) = \{t \in T : \pi_1(t, A) = \emptyset\}, \quad \pi_1(t, A) = \{t' \in T : f_{I_1}(t, A) \succ f_{I_1}(t', A)\}.$$

Свойство 2. *Если $f(t, A)\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)f(t', A)$, то $f_{I_1}(t, A) \geq f_{I_1}(t', A)$.*

Свойство 3. *Если $f_{I_1}(t, A) \succ f_{I_1}(t', A)$, то $f(t, A)\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)f(t', A)$.*

Свойство 4. *Траектория t не принадлежит $T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ тогда и только тогда, когда существует такая траектория t', что $f(t, A)\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)f(t', A)$.*

Свойство 5. *Траектория t принадлежит $T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ тогда и только тогда, когда для всякой траектории t' справедливо соотношение $f(t, A)\overline{\Omega^n}(I_1, I_2, \ldots, I_s)f(t', A)$.*

Здесь и далее запись $y\overline{\Omega^n}(I_1, I_2, \ldots, I_s)y'$ означает, что отношение $\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)$ между векторами y и y' не выполняется. В частности, оно не выполняется, если $y = y'$.

Положим

$$S_1(A) = \{t \in P_1(A) : \nexists t' \in T \setminus \{t\} \quad (f_{I_1}(t, A) = f_{I_1}(t', A))\}.$$

Свойство 6. *$S_1(A) \subseteq T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$.*

Действительно, пусть, напротив, $t \in S_1(A)$ и $t \notin T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$. Тогда согласно свойству 4 существует такая траектория $t' \neq t$, что

$$f(t, A)\Omega^n(I_1, I_2, \ldots, I_s)f(t', A).$$

Поэтому в силу свойства 2 имеем

$$f_{I_1}(t, A) \geq f_{I_1}(t', A).$$

Отсюда, учитывая включение $t \in P_1(A)$, заключаем

$$f_{I_1}(t, A) = f_{I_1}(t', A),$$

т. е. $t \notin S_1(A)$, что противоречит предположению. $\square$

Непосредственно из определений множеств $P_1(A)$ и $S_1(A)$ вытекает

Свойство 7. *$\forall t \in S_1(A)$, $\forall t' \in T \setminus \{t\}$ $\exists i \in I_1$ $(f_i(t', A_i) > f_i(t, A_i))$.*

Для любого натурального числа q в пространстве $\mathbf{R}^q$ зададим норму l_1:

$$\|z\| = \sum_{i \in N_q} |z_i|, \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_q) \in \mathbf{R}^q.$$

Под нормой $\|A\|$ матрицы $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n \times m}$ будем понимать норму вектора $(a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn-1}, a_{mn}) \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ определим множество возмущающих матриц

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = \{B \in \mathbf{R}^{n \times m} : \|B\| < \varepsilon\}.$$

Как обычно [8], [10], [11], [14], [15], задачу $Z^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s)$ поиска множества $(I_1, I_2, \dots, I_s)$-эффективных траекторий $T^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s)$ назовем квазиустойчивой, если существует такое число $\varepsilon > 0$, что для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ справедливо включение

$$T^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s) \subseteq T^n(A + B, I_1, I_2, \dots, I_s).$$

Таким образом, квазиустойчивость задачи $Z^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s)$ является свойством сохранения всех $(I_1, I_2, \dots, I_s)$-эффективных траекторий задачи при "малых" возмущениях параметров матрицы A, т. е. является дискретным аналогом свойства полунепрерывности снизу по Хаусдорфу многозначного отображения, которое параметрам задачи (матрице A) ставит в соответствие множества $T^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s)$.

Следуя [8], [10], [14], [15], [21], радиусом квазиустойчивости задачи $Z^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s)$ назовем число

$$\rho^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s) = \begin{cases} \sup K^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s), & \text{если } K^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s) \neq \emptyset; \\ 0, & \text{если } K^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s) = \emptyset, \end{cases}$$

где

$$K^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s) = \{\varepsilon > 0 : \forall B \in \mathcal{B}(\varepsilon)\ (T^n(A, I_1, I_2, \dots, I_s) \subseteq T^n(A + B, I_1, I_2, \dots, I_s))\}.$$

3. Леммы

Положим

$$h^n(t, t', A) = \sum_{i \in I_1} [f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)]^+,$$

где $[\theta]^+ = \max\{0, \theta\}$.

Лемма 1. *Если $h^n(t, t', A) \geq \varphi > 0$, то для любой возмущающей матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ справедливо соотношение*

$$f(t, A + B)\overline{\Omega^n}(I_1, I_2, \dots, I_s) f(t', A + B).$$

Доказательство. Пусть, напротив, существует такая матрица $B^* = [b^*_{ij}] \in \mathcal{B}(\varphi)$, что

$$f(t, A + B^*)\Omega^n(I_1, I_2, \dots, I_s) f(t', A + B^*).$$

Тогда согласно свойству 2 для любого индекса $i \in I_1$ верно неравенство $f_i(t, A_i + B^*_i) \geq f_i(t', A_i + B^*_i)$, т. е. в силу линейности функций $f_i(t, A_i)$ — неравенство

$$f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i) \leq \|B^*_i\|.$$

Это значит, что

$$[f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)]^+ \leq \|B^*_i\|, \quad i \in I_1,$$

и поэтому ввиду $B^* \in \mathcal{B}(\varphi)$ получаем соотношения

$$h^n(t, t', A) = \sum_{i \in I_1} [f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)]^+ \leq \sum_{i \in I_1} \|B^*_i\| \leq \|B^*\| < \varphi,$$

что противоречит условию леммы 1. $\square$

Лемма 2. *Если $t, t' \in T$, $t \in T^n(I_1, I_2, \dots, I_s)$, $t' \neq t$, то для любого числа $\varepsilon > h^n(t, t', A)$ существует такая матрица $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, что*

$$f(t, A + B^*)\Omega^n(I_1, I_2, \dots, I_s) f(t', A + B^*). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть положительное число α таково,что

$$\varepsilon > \alpha > h^n(t, t', A).$$

Тогда, учитывая определение величины $h^n(t, t', A)$, легко указать числа α_i, $i \in I_1$, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_i > [f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)]^+, \quad \sum_{i \in I_1} \alpha_i = \alpha. \tag{2}$$

Элементы необходимой матрицы $B^* = [b^*_{ij}] \in \mathcal{B}(\varepsilon)$ зададим следующим образом. Если $t \backslash t' \neq \emptyset$, то, выбрав произвольный индекс $p \in N(t \setminus t')$, полагаем

$$b^*_{ij} = \begin{cases} \alpha_i, & \text{если } i \in I_1,\ j = p; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $t \setminus t' = \emptyset$, то, зафиксировав индекс $p \in N(t' \setminus t)$ (ввиду $t' \setminus t \neq \emptyset$), считаем

$$b^*_{ij} = \begin{cases} -\alpha_i, & \text{если } i \in I_1,\ j = p; \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Легко видеть, что в обоих случаях справедливы равенства

$$\|B^*\| = \alpha, \quad f_i(t', B^*_i) - f_i(t, B^*_i) = -\alpha_i, \quad i \in I_1.$$

Поэтому с учетом (2) имеем

$$f_i(t', A_i + B^*_i) - f_i(t, A_i + B^*_i) = f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i) - \alpha_i \leq$$
$$\leq [f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)]^+ - \alpha_i < 0, \quad i \in I_1,$$

т. е. $f_{I_1}(t, A + B^*) \succ f_{I_1}(t', A + B^*)$. Следовательно, благодаря свойству 3 получаем требуемое соотношение (1). $\square$

4. Теорема

Теорема. *При любом разбиении $(I_1, I_2, \ldots, I_s)$, $s \in N_n$, $n \in \mathbf{N}$, множества N_n радиус квазиустойчивости $\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ задачи $Z^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ имеет вид*

$$\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) = \min_{t \in T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)} \ \min_{t' \in T \setminus \{t\}} h^n(t, t', A). \tag{3}$$

Доказательство. В силу определения величины $h^n(t, t', A)$ и непустоты множеств $T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ и $T \setminus \{t\}$ правая часть формулы (3), которую для краткости в дальнейшем будем обозначать через φ, корректно определена и неотрицательна.

Сначала докажем неравенство

$$\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) \geq \varphi. \tag{4}$$

Будем считать, что $\varphi > 0$ (в противном случае неравенство (4) очевидно). В соответствии с определением числа φ для любых траекторий $t \in T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ и $t' \neq t$ получаем

$$h^n(t, t', A) \geq \varphi > 0.$$

Поэтому на основании леммы 1 справедливо утверждение

$$\forall B \in \mathcal{B}(\varphi),\ \forall t \in T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s),\ \forall t' \in T \quad (f(t, A + B)\overline{\Omega^n}(I_1, I_2, \ldots, I_s) f(t', A + B)),$$

т. е. согласно свойству 5 траектория t является $(I_1, I_2, \ldots, I_s)$-эффективной в любой задаче $Z^n(A + B, I_1, I_2, \ldots, I_s)$, где $B \in \mathcal{B}(\varphi)$. Это значит, что для любой матрицы $B \in \mathcal{B}(\varphi)$ справедливо включение

$$T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) \subseteq T^n(A + B, I_1, I_2, \ldots, I_s).$$

Следовательно, верно неравенство (4).

Остается показать, что

$$\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) \le \varphi, \tag{5}$$

где, как уже отмечалось, $\varphi \ge 0$.

Пусть $\varepsilon > \varphi$ и траектории $t \in T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ и $t' \ne t$ таковы, что $h^n(t, t', A) = \varphi$. Тогда согласно лемме 2 существует такая матрица $B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon)$, что выполняется соотношение (1). Отсюда следует, что траектория t не является $(I_1, I_2, \ldots, I_s)$-оптимальной в задаче $Z^n(A + B^*, I_1, I_2, \ldots, I_s)$. Итак, имеет место формула

$$\forall \varepsilon > \varphi \ \exists B^* \in \mathcal{B}(\varepsilon) \ \ (T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) \not\subseteq T^n(A + B^*, I_1, I_2, \ldots, I_s)),$$

свидетельствующая о справедливости неравенства (5), которое вместе с неравенством (4) и дает формулу (3). □

5. Следствия

Следствие 1 ([22]). Для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A, N_n)$, $n \ge 1$, поиска множества Парето $P^n(A)$ справедлива формула

$$\rho^n(A, N_n) = \min_{t \in P^n(A)} \min_{t' \in T \setminus \{t\}} \sum_{i \in N_n} [f_i(t', A_i) - f_i(t, A_i)]^+.$$

Заметим, что аналогичная формула в случае метрики l_∞ была ранее получена в [10].

Следствие 2. Для радиуса квазиустойчивости задачи $Z^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$, $n \ge 1$, поиска множества лексикографически оптимальных траекторий $L^n(A)$ верна формула

$$\rho^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}) = \min_{t \in L^n(A)} \ \min_{t' \in T \setminus \{t\}} [f_1(t', A_1) - f_1(t, A_1)]^+.$$

Поскольку задача $Z^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда $\rho^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) > 0$, то из теоремы вытекает также

Следствие 3. При любом разбиении $(I_1, I_2, ..., I_s)$ множества N_n для задачи $Z^n(A, I_1, I_2, ..., I_s)$, $n \ge 1$, следующие утверждения эквивалентны:

(i) задача $Z^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$ квазиустойчива,
(ii) $\forall t \in T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$, $\forall t' \in T \setminus \{t\}$ $\exists i \in I_1$ $\ (f_i(t', A_i) > f_i(t, A_i))$,
(iii) $T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) = S_1(A)$.

Доказательство. Эквивалентность утверждений (i) и (ii) вытекает из теоремы.

Импликацию (ii) ⇒ (iii) докажем методом от противного. Пусть справедливо утверждение (ii), однако равенство (iii) не выполняется.

Из свойств 1 и 6 имеем

$$S_1(A) \subseteq T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) \subseteq P_1(A).$$

Тогда (ввиду предположения $S_1(A) \ne T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s)$) найдется такая траектория $t \in T^n(A, I_1, I_2, \ldots, I_s) \subseteq P_1(A)$, что $t \notin S_1(A)$. Отсюда следует существование траектории $t' \in P_1(A)$, для которой выполняются соотношения

$$t' \ne t, \quad f_{I_1}(t, A) = f_{I_1}(t', A),$$

что противоречит утверждению (ii).

Импликация (iii) ⇒ (ii) очевидна в силу свойства 7. □

Из следствия 3 легко выводим следующий известный результат (напр., [10], [21]).

Следствие 4. Задача $Z^n(A, N_n)$, $n \ge 1$, поиска множества Парето $P^n(A)$ квазиустойчива тогда и только тогда, когда множества $P^n(A)$ и $S^n(A)$ совпадают.

Здесь $S^n(A)$ — множество Смейла [23], т. е. множество строго эффективных траекторий

$$S^n(A) = \{t \in T : \forall t' \in T \ (f(t, A) \geq f(t', A) \Rightarrow t = t')\}$$

или иначе

$$t \in S^n(A) \ \Leftrightarrow \ \forall t' \in T \setminus \{t\} \ \exists i \in N_n \ \ (f_i(t, A_i) < f_i(t', A_i)).$$

Из следствия 3 получаем также

Следствие 5 ([24]). Для того чтобы задача $Z^n(A, \{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\})$, $n \geq 1$, поиска множества лексикографически оптимальных траекторий $L^n(A)$ была квазиустойчивой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$|L^n(A)| = |\mathrm{Arg\,min}\{f_1(t, A_1) : \ t \in T\}| = 1.$$

Замечание. В силу эквивалентности любых двух норм в конечномерном линейном пространстве все приведенные здесь качественные результаты (следствия 3–5) справедливы не только для нормы l_1, но и для других норм в пространстве $\mathbf{R}^{n \times m}$.

Литература

1. Белоусов Е.Г., Андронов В.Г. *Разрешимость и устойчивость задач полиномиального программирования.* – М.: Изд-во МГУ, 1993. – 172 с.
2. Дубов Ю.А., Травкин С.И., Якимец В.Н. *Многокритериальные модели формирования и выбора вариантов систем.* – М.: Наука, 1986. – 296 с.
3. Молодцов Д.А. *Устойчивость принципов оптимальности.* – М.: Наука, 1987. – 280 с.
4. Сергиенко И.В., Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т. *Исследование устойчивости и параметрический анализ дискретных оптимизационных задач.* – Киев: Наук. думка, 1995. – 169 с.
5. Козерацкая Л.Н., Лебедева Т.Т., Сергиенко И.В. *Исследование устойчивости задач дискретной оптимизации* // Кибернетика и системный анализ. – 1993. – № 3. – С. 78–93.
6. Лебедева Т.Т., Сергиенко Т.И. *Сравнительный анализ различных типов устойчивости по ограничениям векторной задачи целочисленной оптимизации* // Кибернетика и системный анализ. – 2004. – № 1. – С. 63–70.
7. Леонтьев В.К. *Устойчивость в линейных дискретных задачах* // Проблемы кибернетики. – 1979. – Вып. 35. – С. 169–184.
8. Emelichev V.A., Girlich E., Nikulin Yu.V., Podkopaev D.P. *Stability and regularization of vector problems of integer linear programming* // Optimization. – 2002. – V. 51. – № 4. – P. 645–676.
9. Sotskov Yu.N., Leontev V.K., Gordeev E.N. *Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization* // Discrete Appl. Math. – 1995. – V. 58. – № 2. – P. 169–190.
10. Емеличев В.А., Кравцов М.К., Подкопаев Д.П. *О квазиустойчивости траекторных задач векторной оптимизации* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 63. – Вып. 1. – С. 21–27.
11. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М. *Об одном типе устойчивости векторной комбинаторной задачи с частными критериями вида* Σ-MINMAX *и* Σ-MINMIN // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 12. – С. 17–27.
12. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. *Конечные коалиционные игры: параметризация принципа оптимальности ("от Парето до Нэша") и устойчивость обобщенно-эффективных ситуаций* // Докл. НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46. – № 6. – С. 36–38.
13. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. *Параметризация принципа оптимальности ("от Парето до Слейтера") и устойчивость многокритериальных траекторных задач* // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2003. – Т. 10. – № 2. – С. 3–18.
14. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А. *О квазиустойчивости векторной траекторной задачи с параметрическим принципом оптимальности* // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 1. – С. 25–30.

15. Бухтояров С.Е., Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *Вопросы устойчивости векторных дискретных задач с параметрическим принципом оптимальности* // Кибернетика и системный анализ. – 2003. – № 4. – С. 155–166.
16. Емеличев В.А., Степанишина Ю.В. *Многокритериальные комбинаторные линейные задачи: параметризация принципа оптимальности и устойчивость эффективных решений* // Дискретная математика. – 2001. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 43–51.
17. Емеличев В.А., Кузьмин К.Г., Леонович А.М. *Устойчивость в векторных комбинаторных задачах оптимизации* // Автоматика и телемеханика. – 2004. – № 2. – С. 79–92.
18. Еремин И.И. *О задачах последовательного программирования* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. 14. – № 1. – С. 53–63.
19. Сергиенко И.В. *Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации.* – Киев: Наук. думка, 1998. – 472 с.
20. Червак Ю.Ю. *Оптимізація. Непокращуваний вибір.* – Ужгород: Ужгородський націон. університет, 2002. – 312 с.
21. Емеличев В.А., Кравцов М.К. *Об устойчивости в траекторных задачах векторной оптимизации* // Кибернетика и системный анализ. – 1995. – № 4. – С. 137–143.
22. Емеличев В.А., Кузьмин К. Г. *Устойчивость эффективного решения векторной комбинаторной задачи в метрике* l_1 // Докл. НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47. – № 5. – С. 25–28.
23. Smale S. *Global analysis and economics, V. Pareto theory with constraints* // J. Math. Econom. – 1974. – V. 1. – № 3. – P. 213–221.
24. Емеличев В.А., Бердышева Р.А. *Об устойчивости и квазиустойчивости траекторной задачи последовательной оптимизации* // Докл. НАН Беларуси. – 1999. – Т. 43. – № 3. – С. 41–44.

Белорусский государственный университет

Поступила 09.02.2005