ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1999 МАТЕМАТИКА № 12 (451)

УДК 519.8

Э.Х. ГИМАДИ, А.И. СЕРДЮКОВ

АКСИАЛЬНЫЕ ТРЕХИНДЕКСНЫЕ ЗАДАЧИ О НАЗНАЧЕНИИ И КОММИВОЯЖЕРА: БЫСТРЫЕ ПРИБЛИЖЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ

1. Введение

Трехиндексная аксиальная задача о назначении (3-АЗН) [1]–[3] формулируется следующим образом: минимизировать линейную форму

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i),\sigma\pi(i)} \tag{1}$$

на множестве подстановок π, σ из симметрической группы S_n порядка n, где c_{ijk} — заданные вещественные числа, $1 \leq i, j, k \leq n$.

Наряду с этой хорошо известной задачей о назначении рассматривается и следующее новое обобщение классической задачи коммивояжера.

Трехиндексная аксиальная задача коммивояжера (3-АЗК) представляет собой минимизацию (1) с дополнительным условием

$$\pi, \sigma, \sigma\pi \in P_n, \tag{2}$$

где P_n — множество всех циклических подстановок (т. е. состоящих из одного цикла) из S_n.

Из теоретических результатов [4]–[6] следует, что обе задачи NP-трудны, причем 3-АЗК MAX SNP-трудна. Это обстоятельство стимулировало авторов к построению для этих задач приближенных полиномиальных алгоритмов на случайных входах.

Быстрые приближенные алгоритмы и вероятностные распределения, на которых эти алгоритмы являются асимптотически оптимальными, представляют большой интерес в дискретной оптимизации ([7]–[14]).

Обозначим через f_A и f^* приближенное (полученное посредством алгоритма A) и оптимальное значения целевой функции задачи на некотором входе. Напомним, что в случае конкретных исходных данных (входа задачи) принято говорить об индивидуальной задаче. Под массовой задачей (или просто задачей) понимается определенное множество индивидуальных задач.

Следуя [8], будем говорить, что алгоритм A *имеет оценки* (ε_A, δ_A) на классе входов рассматриваемой задачи, если выполнено неравенство

$$\Pr\{f_A > (1+\varepsilon_A)f^*\} \leq \delta_A\ ,$$

где ε_A есть оценка относительной погрешности решения, получаемого алгоритмом A, δ_A — вероятность несрабатывания алгоритма A (т. е. величину δ_A можно трактовать как долю случаев, когда алгоритм не гарантирует погрешность в пределах ε_A).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 99-01-00601 и 97-01-00890).

Представляется интересным поведение оценок ε_A и δ_A при увеличении размерности задачи.

Алгоритм A называется *асимптотически оптимальным* на классе рассматриваемых задач, если существуют оценки ε_A и δ_A, стремящиеся к нулю с ростом размерности. Заметим, что асимптотически оптимальный подход оказался плодотворным для задачи коммивояжера на минимум и на максимум [7]–[13]. В данной работе сначала описывается приближенный сублинейный алгоритм $A(\phi_n)$ для решения 3-АЗН, проводится его вероятностный анализ и даются условия его асимптотической оптимальности.

В противоположность к 3-АЗН для 3-АЗК имеются входы, на которых решение не существует. В связи с этим в статье представлен критерий разрешимости 3-АЗК: задача разрешима тогда и только тогда, когда n нечетно. Далее для приближенного решения 3-АЗК приводится алгоритм $\widetilde{A}$, имеющий линейную (относительно длины входа) трудоемкость. В заключение устанавливаются условия асимптотической оптимальности алгоритма $\widetilde{A}$.

Вероятностный анализ приведенных алгоритмов проводится при следующих предположениях. Пусть элементы матрицы (c_{ijk}) — независимые случайные величины, выбираемые из отрезка $[a_n, b_n]$, где $a_n > 0$, с одинаковой функцией распределения. Далее используется функция распределения $F_\xi(x) = Pr\{\xi < x\}$ нормализованной случайной переменной

$$\xi = (c_{ijk} - a_n)/(b_n - a_n), \quad 0 \le \xi \le 1.$$

Через M_n обозначим множество всех определенных выше матриц (c_{ijk}).

2. Асимптотически оптимальный подход к 3-АЗН

Обозначим через ϕ_n любую целочисленно значащую функцию, $1 \le \phi_n \le n$.

Опишем алгоритм $A(\phi_n)$ для отыскания приближенного решения 3-АЗН. Он состоит из семи пунктов.

Алгоритм $A(\phi_n)$.

1. Берем произвольную подстановку $\pi \in S_n$. Пусть (d_{jk}) — $n \times n$-матрица, содержащая элементы исходной матрицы (c_{ijk}), где индекс $j = \pi(i)$ такой, что
$$d_{jk} = c_{\pi^{-1}(j)jk} \ \text{ для любых } \ 1 \le j, k \le n.$$
Положим $f = 0$; $j = 1$ и $K = \{1, 2, \dots, \phi_n\}$.
2. Выберем номер $\sigma(j)$ минимального элемента из множества $\operatorname{Arg\,min}\{d_{jk} \mid k \in K\}$.
3. Полагаем $f := f + d_{j\sigma(j)}$; $K := K \setminus \{\sigma(j)\}$; $k := j + \phi_n$.
4. Если $k \le n$, то $K := K \cup \{k\}$.
5. $j := j + 1$.
6. Повторяем п. 2, пока $j < n$. В противном случае идем к п. 7.
7. Результатом работы алгоритма $A(\phi_n)$ является значение f целевой функции $f_{A(\phi_n)}$.

Описание алгоритма $A(\phi_n)$ закончено. Из описания алгоритма непосредственно следует

Предложение. *Алгоритм $A(\phi_n)$ находит допустимое приближенное решение* 3-АЗН *за время $O(n\phi_n)$.*

Определим функцию

$$Q(n,k) = (n-k)\int_0^1 (1 - F_\xi(x))^k dx + \int_{\gamma(k)}^1 \frac{dx}{F_\xi(x)} + \gamma(k)k,$$

где $\gamma(k)$ — корень уравнения

$$F_\xi(x) = 1/k, \quad 0 \le x \le 1.$$

Лемма 1. *Пусть* $y_j = (d_{j\sigma(j)} - a_n)/(b_n - a_n)$, *где* $d_{j\sigma(j)}$ — *элемент матрицы* (d_{jk}), *выбранный алгоритмом* $A(\phi_n)$ *на шаге* j, $1 \le j \le n$. *Тогда для математического ожидания случайной величины* $y = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j$ *справедливо неравенство*

$$Ey \le Q(n, \phi_n).$$

Доказательство. Для всякого $j = 1, \ldots, n - \phi_n$ имеем

$$Ey_j = Ey_1 = \int_0^1 x dF_{y_1}(x) = xF_{y_1}(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F_{y_1}(x)dx =$$
$$= \int_0^1 \Pr\{y_1 \ge x\}dx = \int_0^1 \Pr{}^{\phi_n}\{\xi \ge x\}dx = \int_0^1 (1 - F_\xi(x))^{\phi_n} dx,$$

а для любого j такого, что $n - \phi_n < j \le n$, имеет место

$$Ey_j = \int_0^1 (1 - F_\xi(x))^{n-j+1} dx.$$

Суммируя Ey_j по $j = n - \phi_n + 1, \ldots, n$, получим

$$\sum_{j=n-\phi_n+1}^{n} Ey_j = \sum_{j=n-\phi_n+1}^{n} \int_0^1 (1 - F_\xi(x))^{n-j+1} dx =$$
$$= \int_0^{\gamma(\phi_n)} \sum_{k=1}^{\phi_n} (1 - F_\xi(x))^k dx + \int_{\gamma(\phi_n)}^1 \sum_{k=1}^{\phi_n} (1 - F_\xi(x))^k dx = \phi_n \gamma(\phi_n) + \int_{\gamma(\phi_n)}^1 \frac{dx}{F_\xi(x)}.$$

Заметим, что параметр $\gamma(\phi_n)$ выбирается с учетом минимизации верхней границы

$$\phi_n \gamma(\phi_n) + \int_{\gamma(\phi_n)}^1 \frac{dx}{F_\xi(x)} = \min_{0 \le \gamma \le 1} \left(\phi_n \gamma + \int_\gamma^1 \frac{dx}{F_\xi(x)} \right).$$

Наконец, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} Ey_j \le (n - \phi_n) \int_0^1 (1 - F_\xi(x))^{\phi_n} dx + \phi_n \gamma(\phi_n) + \int_{\gamma(\phi_n)}^1 \frac{dx}{F_\xi(x)} = Q(n, \phi_n). \quad \square$$

Теорема 1. *Если*

$$\frac{b_n}{a_n} = o\left(\frac{n}{Q(n, \phi_n)} \right) \quad \text{и} \quad Q(n, \phi_n) \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то алгоритм $A(\phi_n)$ *находит асимптотически оптимальное решение* 3-АЗН *на классе матриц* M_n.

Доказательство. Покажем, что алгоритм $A(\phi_n)$ имеет следующие оценки относительной погрешности

$$\varepsilon_{A(\phi_n)} = \frac{h(b_n - a_n)}{na_n} Q(n, \phi_n) \tag{3}$$

и вероятности несрабатывания

$$\delta_{A(\phi_n)} = \frac{1}{(h-1)^2 Q(n, \phi_n)}, \tag{4}$$

где $h = \text{const} > 0$.

Действительно, с учетом соотношений $f_A = na_n + (b_n - a_n)y$, $\operatorname{Var} y \le Ey$, а также неравенства Чебышева имеем

$$\Pr\{f_{A(\phi_n)} > (1+\varepsilon_{A(\phi_n)})f^*\} \le \Pr\{f_{A(\phi_n)} > (1+\varepsilon_{A(\phi_n)})na_n\} \le$$
$$\le \Pr\{y > hQ(n,\phi_n)\} \le \Pr\{|y - Ey| > (h-1)Q(n,\phi_n)\} \le$$
$$\le \frac{\operatorname{Var} y}{(h-1)^2 Q(n,\phi_n)^2} \le \frac{1}{(h-1)^2 Q(n,\phi_n)} = \delta_{A(\phi_n)}.$$

Из вида функции $Q(n,\phi_n)$ и оценок (3), (4) следует, что в условиях доказываемой теоремы алгоритм $A(\phi_n)$ асимптотически оптимален. $\square$

Приведем некоторые следствия в случае функции распределения вида

$$F_\xi(x) \ge x, \quad 0 \le x \le 1. \tag{5}$$

Очевидно, (5) содержит выпуклые распределения и тем более равномерное распределение.

Легко проверяется

Лемма 2. *В условиях* (5) *выполнено*

$$Q(n,\phi_n) \le \frac{n-\phi_n}{\phi_n} + \ln\phi_n + \phi_n\gamma(\phi_n).$$

Принимая во внимание предложение, теорему 1 и лемму 2, имеем следующие утверждения.

Следствие 1. Пусть $F_\xi(x) \ge x$ при $0 \le x \le 1$. Если $b_n/a_n = o(n/\ln n)$, то алгоритм $A(n)$ является асимптотически оптимальным для 3-АЗН на классе матриц M_n при времени работы $O(n^2)$.

Следствие 2. Пусть $F_\xi(x) \ge x$ при $0 \le x \le 1$. Если $b_n/a_n = o(\ln n)$, то алгоритм $A(\ln n)$ является асимптотически оптимальным для 3-АЗН на классе матриц M_n при времени работы $O(n \ln n)$.

3. Асимптотически оптимальный подход к 3-АЗК

Заметим, что не на всяком входе 3-АЗК может иметь решение. Действительно, справедлива

Лемма 3. 3-АЗК *разрешима тогда и только тогда, когда n нечетно.*

Доказательство. Разрешимость 3-АЗК эквивалентна существованию двух подстановок π, σ, которые удовлетворяют (2).

Пусть n четно, а π и σ удовлетворяют (2). Представим π в виде произведения $n-1$ транспозиций. Заметим, что при умножении любой подстановки на транспозицию (как справа, так и слева) меняется четность числа циклов в полученной подстановке по сравнению с исходной. Поэтому произведение σ на $n-1$ транспозиций содержит четное число циклов (т. к. число $n-1$ нечетно) и, следовательно, не принадлежит множеству P_n. Пришли к противоречию. Необходимость доказана.

Легко убедиться, что в случае нечетного n подстановки $\pi(i) = (i+1) \bmod (n)$ и $\sigma(i) = (i+1) \bmod (n)$ удовлетворяют (2). Достаточность доказана. $\square$

Обозначим через $|s|$ число циклов в подстановке $s \in S_n$.

Определение. Подстановку $s \in S_n$ назовем типичной, если $|s| \le 2\ln n$.

Для случайной подстановки $s \in S_n$ из ([9], с.40) имеем неравенство

$$\Pr\{|\sigma| > 2\ln n\} \le \left(\frac{e}{n}\right)^{0.38}.$$

Следовательно, произвольно выбранная подстановка $s \in S_n$ почти всегда (с вероятностью, стремящейся к 1 при $n \to \infty$) является типичной.

Замечание. Очевидно, произведение типичной подстановки $s \in S_n$ на произвольно выбранную подстановку $\tau \in P_n$ почти всегда является типичной.

Теорема 2. *Пусть $\pi \in P_n$, n нечетно и $\sigma, \sigma\pi \in S_n$ — типичные подстановки. Кроме того, пусть $c_{ijk} \in [a_n, b_n]$ и $a_n > 0$, $1 \le i, j, k \le n$. Тогда найдутся подстановки σ', π', удовлетворяющие (2), и константа h (не зависящая от n) такие, что*

$$\sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi'(i),\sigma'\pi'(i)} \le \sum_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i),\sigma\pi(i)} + hb_n \ln n \tag{6}$$

и σ', π' могут быть получены за время $O(n^2 \ln n)$.

Доказательство. Обозначим $p = |\sigma\pi|$. В рассматриваемом случае $p \le 2\ln n$. Пусть $(i_1, j_1), \ldots, (i_{p-1}, j_{p-1})$ — последовательность транспозиций такая, что

$$\pi(i_1, j_1) \cdots (i_{p-1}, j_{p-1}) = \widetilde{\pi}, \quad |\sigma\widetilde{\pi}| = 1. \tag{7}$$

Очевидно, подстановка $|\widetilde{\pi}|$ типичная, а подстановка $\sigma\widetilde{\pi}$ строится за время $O(n)$. Кроме того, $|\widetilde{\pi}| + |\sigma|$ четно, поскольку $|\sigma\widetilde{\pi}| = 1$ и n нечетно.

Для завершения доказательства теоремы понадобится

Лемма 4. *Пусть $\langle \sigma, \widetilde{\pi} \rangle = \max\{|\sigma|, |\widetilde{\pi}|\} > 1$. Тогда найдется транспозиция $(i, j) \in S_n$ такая, что*

$$\langle \sigma(i,j), (i,j)\widetilde{\pi} \rangle = \langle \sigma, \widetilde{\pi} \rangle - 1 \tag{8}$$

и (i, j) может быть найдена за время $O(n^2)$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $|\sigma| > 1$. Выберем произвольный цикл $C = (i_1, i_2, \ldots, i_q) \in \sigma$.

Пусть $|\widetilde{\pi}| > 1$. Для любых $i \in C$ и $j \notin C$ выполняется равенство $|\sigma(i,j)| = |\sigma| - 1$. Если при этом для некоторой такой пары i, j выполняется равенство $|(i,j)\widetilde{\pi}| = |\widetilde{\pi}| - 1$, то лемма 4 доказана. В противном случае имеем циклическую подстановку $\widetilde{\pi} \in P_n$ и $|\sigma| \ge 3$ в силу четности $|\widetilde{\pi}| + |\sigma|$. В этом случае, взяв произвольные $i \in C$ и $j \notin C$, будем иметь $|(i,j)\widetilde{\pi}| = |\widetilde{\pi}| + 1 = 2 \le |\sigma(i,j)| = |\sigma| - 1$. При этом выполняется (8).

Наконец, заметим, что искомая согласно лемме транспозиция находится за время $O(n^2)$. $\square$

Продолжим доказательство теоремы 2. Заметим, что произведение $\sigma(i,j)$ на $(i,j)\widetilde{\pi}$ равно $\sigma\widetilde{\pi}$. Следовательно, $\sigma(i,j)(i,j)\widetilde{\pi} \in P_n$.

Используя лемму 4 не более $2\ln n$ раз, получим подстановки $\pi', \sigma' \in P_n$. Таким образом, с учетом последнего замечания подстановки π', σ' удовлетворяют (2). Для получения подстановок π', σ' из исходных подстановок π, σ достаточно произвести $O(\ln n)$ умножений на соответствующие транспозиции. Тем самым установлено неравенство (6). Кроме того, с учетом леммы 4 получаем, что π' и σ' строятся за время $O(n^2 \ln n)$. $\square$

Перейдем к описанию алгоритма $\widetilde{A}$ для нахождения приближенного решения 3-АЗК на классе матриц M_n.

Алгоритм $\widetilde{A}$.

1. Выбираем произвольную подстановку $\pi \in P_n$.

2. Формируем $n \times n$-матрицу (d_{jk}), состоящую из элементов исходной матрицы (c_{ijk}) с $i = \pi^{-1}(j)$:
$$d_{jk} = c_{\pi^{-1}(j)jk}, \quad 1 \le j,k \le n.$$
3. Используя рандомизированную версию алгоритма решения задачи о назначении ([9], с. 36), находим ее оптимальное решение $\sigma(j)$ на входной матрице (d_{jk}), которое к тому же почти всегда является типичным.
4. Имеем приближенное решение 3-АЗН со значением целевой функции $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,\pi(i),\sigma\pi(i)}$. В условиях теоремы 1 и следствия 1 такое решение является асимптотически оптимальным.
5. Согласно замечанию из типичности подстановки σ почти всегда следует типичность подстановки $\sigma\pi$. В случае, когда подстановки σ и $\sigma\pi$ принадлежат P_n, имеем соответствующее приближенное решение 3-АЗК: $\pi' = \pi$, $\sigma' = \sigma$.
6. Выберем подстановку $\widetilde{\pi}$ согласно (7).
7. В соответствии с конструктивным доказательством теоремы 2 строим подстановки π', σ', $\sigma'\pi'$, принадлежащие P_n.

Описание алгоритма $\widetilde{A}$ закончено.

Окончательно получаем приближенное решение 3-АЗК со значением целевой функции $\sum\limits_{i=1}^{n} c_{i,\pi'(i),\sigma'\pi'(i)}$. Заметим, что пп. 1–7 алгоритма $\widetilde{A}$ могут быть выполнены за время $O(n^3)$, поскольку это время требуется для решения задачи о назначении [15].

С учетом леммы 1 из [9], теорем 1 и 2, а также леммы 3 сформулируем достаточное условие асимптотической оптимальности алгоритма $\widetilde{A}$.

Теорема 3. *Пусть $F_\xi(x) \ge x$, $0 \le x \le 1$. Если $b_n/a_n = o(n/\ln n)$, тогда при нечетных n алгоритм $\widetilde{A}$ находит асимптотически оптимальное решение* 3-АЗК *на классе матриц M_n за время $O(n^3)$.*

Литература

1. Емеличев В.А., Ковалев М.М., Кравцов М.М. *Многогранники, графы, оптимизация* – М.: Наука, 1981. – 342 с.
2. Balas E., Saltzman M.J. *Facets of the three-index assignment polytope* // Discrete Appl. Math. – 1989. – V. 23. – № 3. – P. 201–229.
3. Balas E., Saltzman M.J. *An algorithm for the three-index assignment problem* // Oper. Res. – 1991. – V. 39. - № 1. – P. 150–161.
4. Garey M.R., Johnson D.S. *Computers and intractability.* – San Francisco: W.H. Freeman and Company, 1979.
5. Papadimitriu C.H., Yannakakis M. *Optimization, approximation, and complexity classes* // J. Comput. System Sci. – 1991. – V. 43. – P. 425–440.
6. Sahni S., Gonzales T.P. *P-complete approximation problem* // J. Association for Computing Machinery. – 1976. – V. 23. – № 3. – P. 555–565.
7. Гимади Э.Х. *О некоторых математических моделях и методах планирования крупномасштабных проектов* // Тр. ин-та матем. Сиб. отд. – Новосибирск, 1988. – Т. 10. – С. 89–115.
8. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. *Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации* // Пробл. кибернетики. – М.: Наука, 1975. – Вып. 31. – С. 35–42.
9. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Сердюков А.И. *Алгоритм для приближенного решения задачи коммивояжера и его вероятностный анализ* // Сиб. журн. исследов. операций. – 1994. – № 2. – С. 8–17.

10. Перепелица В.А., Гимади Э.Х. *К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами* // Дискретн. анализ. – Новосибирск, 1969. – Вып. 15. – С. 57–65.
11. Angluin D., Valiant L.G. *Fast probabilistic algorithms for Hamiltonian circuits and matchings* // J. Comput. System Sci. – 1979. – V. 18. – P. 155–193.
12. Posa L. *Hamiltonian circuits in random graphs* // Discrete Math. – 1976. – V. 14. – P. 359–364.
13. Slominski L. *Probabilistic analysis of combinatorial algorithms*: *a bibliography with selected annotations* // Computing. – 1982. – V. 28. – P. 257–267.
14. *The traveling salesman problem. A guided tour of combinatorial optimization* / Ed. by Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinnoy Kan A.H.G. and Shmoys D.B. – Chichester: Wiley, 1985.
15. Диниц Е.А., Кронрод М.А. *Один алгоритм решения задачи о назначении* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 189. – № 1. – С. 23–25.

Новосибирский государственный университет

Поступила
21.09.1999