Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 77–85 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0086*

А.Г. ЧШИЕВ

ОБ УСЛОВИЯХ ЗАМКНУТОСТИ И УСЛОВИЯХ ЗАМЫКАЕМОСТИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. Рассматриваются генераторы полугрупп операторов. Предметом исследования являются свойства замкнутости и замыкаемости (в классе операторов) некоторых генераторов. Получены необходимые условия и достаточные условия, чтобы генераторы были замкнутыми операторами или замыкаемыми в классе операторов.

Ключевые слова: полугруппа операторов, линейное отношение, инфинитезимальный оператор, генератор полугруппы.

УДК: 517.983

Abstract. We consider generators of operator semigroups and study the closedness and closability properties (in a class of operators) of some of them. We obtain necessary conditions and sufficient conditions for generators to be closed operators or closeable in the class of operators.

Keywords: operator semigroups, linear relation, infinitesimal operator, generator of operator semigroups.

1. Введение

Пусть X — комплексное банахово пространство и $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра эндоморфизмов (линейных ограниченных операторов) банахова пространства X.

Определение 1.1. Под *полугруппой операторов* будем понимать сильно непрерывную операторозначную функцию $T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X$, для которой $T(t + s) = T(t)T(s)$ при всех $t, s > 0$.

Согласно ([1], с. 316) дадим

Определение 1.2. *Инфинитезимальным оператором* полугруппы T называется линейный оператор $A_0 : D(A_0) \subset X \to X$ вида

$$A_0x_0 = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x_0 - x_0}{t}, \quad x_0 \in D(A_0) = \left\{x \in X : \text{ существует } \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}\right\}.$$

В данной работе не налагается традиционных ограничений на полугруппу операторов T, а именно: не требуется сильной непрерывности в нуле функции $T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X$, кроме этого, на ядро $\operatorname{Ker} T = \{x \in X : T(t)x = 0 \text{ при всех } t > 0\}$ полугруппы T не налагается требование $\operatorname{Ker} T = \{0\}$. Для столь общих полугрупп в статье ([2], с. 179) было введено понятие *генератора* полугруппы операторов. В данной работе исследуются условия замкнутости и

Поступила 05.05.2010

условия не замыкаемости (в классе операторов) некоторых генераторов полугруппы рассматриваемого класса. Последнее означает, что замыкание оператора является линейным отношением, но не является оператором.

2. Основные понятия и сведения из теории линейных отношений и полугрупп операторов

Всюду далее через X обозначено комплексное банахово пространство и через $\operatorname{End} X$ — банахова алгебра эндоморфизмов банахова пространства X. Дадим ряд определений ([3], с. 3–5) из теории линейных отношений.

Определение 2.1. Любое линейное подпространство $\mathcal{A}$ из декартова произведения $X \times X$ называется *линейным отношением* на банаховом пространстве X. Линейное отношение называется *замкнутым*, если $\mathcal{A}$ — замкнутое линейное подпространство из $X \times X$.

Множество всех линейных отношений на X обозначим через $LR(X)$. Всюду далее под термином "отношение" понимается линейное отношение. При отождествлении линейного оператора с его графиком, т. е. множеством $\{(x, Ax), x \in D(A)\} \subset X \times X$, линейный оператор можно рассматривать как линейное отношение. Таким образом, имеет место включение $\operatorname{End} X \subset LR(X)$.

Определение 2.2. *Областью определения* отношения $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется подпространство $D(\mathcal{A}) = \{x \in X : \text{существует } y \in X \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$. Через $\mathcal{A}x$, $x \in D(\mathcal{A})$, обозначим множество $\{y \in X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$. *Ядро отношения* $\mathcal{A}$, т. е. множество $\{x \in D(\mathcal{A}) : (x, 0) \in \mathcal{A}\}$, обозначим $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, а его *область значений* $\{y \in X : \text{существует } x \in D(\mathcal{A}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A}\}$ обозначим через $\operatorname{Im} \mathcal{A}$.

Определение 2.3. *Суммой* двух отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ назовем линейное подпространство из $X \times X$ вида $\mathcal{A} + \mathcal{B} = \{(x, y) \in X \times X : x \in D(\mathcal{A}) \cap D(\mathcal{B}),\ y = \mathcal{A}x + \mathcal{B}x\}$, где под $\mathcal{A}x + \mathcal{B}x$ понимается алгебраическая сумма двух подмножеств $\mathcal{A}x$, $\mathcal{B}x$.

Определение 2.4. *Произведением* линейных отношений $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in LR(X)$ называется линейное отношение из $X \times X$ вида $\mathcal{B}\mathcal{A} = \{(x, z) \in X \times X : \text{существует } y \in D(\mathcal{B}) \text{ такой, что } (x, y) \in \mathcal{A},\ (y, z) \in \mathcal{B}\}$.

Определение 2.5. *Обратным* к линейному отношению $\mathcal{A} \subset X \times X$ называется линейное отношение $\mathcal{A}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in \mathcal{A}\}$.

Определение 2.6. Отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$ называется *инъективным*, если $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{0\}$, и *сюръективным*, если $\operatorname{Im} \mathcal{A} = X$. Замкнутое линейное отношение $\mathcal{A}$ называется *непрерывно обратимым*, если $\mathcal{A}$ одновременно инъективно и сюрьективно, и тогда $\mathcal{A}^{-1} \in \operatorname{End} X$.

Определение 2.7. *Резольвентным множеством* замкнутого линейного отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\rho(\mathcal{A})$ всех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $(\mathcal{A} - \lambda I)^{-1} \in \operatorname{End} X$. *Спектром* замкнутого линейного отношения $\mathcal{A}$ называется множество $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$. Отображение $R(\cdot, \mathcal{A}) : \rho(\mathcal{A}) \to \operatorname{End} X$, $R(\lambda, \mathcal{A}) = (\mathcal{A} - \lambda I)^{-1}$, $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$, называется *резольвентой* замкнутого линейного отношения $\mathcal{A}$.

Определение 2.8 ([2], с. 178)**.** Будем говорить, что оператор $B \in \operatorname{End} X$ *перестановочен* с отношением $\mathcal{A} \in LR(X)$, если $(Bx, By) \in \mathcal{A}$ для всех $(x, y) \in \mathcal{A}$.

Всюду далее через T обозначена полугруппа $T : (0, \infty) \to \operatorname{End} X$.

Определение 2.9 ([2], с. 179)**.** Полугруппа T называется *вырожденной*, если $\operatorname{Ker} T$ — ненулевое подпространство в X. В противном случае полугруппа T называется *невырожденной*.

Согласно ([2], с. 178–179) введем следующие подпространства из X:
$\operatorname{Ker} T = \{x \in X : T(t)x = 0,\, t > 0\}$ — ядро полугруппы T,
$\operatorname{Im} T = \bigcup\limits_{t>0} \operatorname{Im} T(t)$ — образ полугруппы T,
$\operatorname{fix} T = \{x \in X : T(t)x = x,\, t > 0\}$ — множество неподвижных точек полугруппы T,
$X_c(T) = \{x \in X : \lim\limits_{t\to 0+} T(t)x = x\}$,
$X_1(T) = \Big\{x \in X : \int\limits_0^1 \|T(t)x\| dt < \infty\Big\}$,
$\widetilde{X}_1(T) = \Big\{x \in X_1(T) : \lim\limits_{\eta\to 0+} \frac{1}{\eta} \int\limits_0^\eta T(t)x\, dt = x\Big\}$.
Следуя терминологии из ([2], с. 179), введем ряд понятий.

Определение 2.10. *Строгим инфинитезимальным оператором* полугруппы T называется линейный оператор $\mathbb{A}_0 : D(\mathbb{A}_0) \subset X \to X$, где $D(\mathbb{A}_0) = \{x \in D(A_0) : A_0 x \in X_c(T)\}$, задаваемый равенством $\mathbb{A}_0 x = A_0 x$, $x \in D(\mathbb{A}_0)$.

Таким образом, $\mathbb{A}_0 \subset A_0$.

Определение 2.11. *Старшим генератором* полугруппы T называется отношение $\mathbb{A}$ из $LR(X)$, состоящее из пар $(x, y) \in X \times X$ со свойствами
1) $x \in \overline{\operatorname{Im} T}$;
2) верно равенство

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)y\, d\tau, \quad 0 < s \le t < \infty.$$

Определение 2.12. *Генератором* полугруппы T называется любое отношение $\mathcal{A} \in LR(X)$, удовлетворяющее условиям
1) $\mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A} \subset \mathbb{A}$;
2) операторы $T(t)$ для каждого $t > 0$ перестановочны с отношением $\mathcal{A}$.

Множество всех генераторов полугруппы T обозначим через $\operatorname{Gen}(T)$. Таким образом, $\mathbb{A}_0, A_0, \mathbb{A} \in \operatorname{Gen}(T)$ ([2], с. 179).
В статье используются леммы 2.1, 2.2 ([2], с. 181–182) и леммы 2.3, 2.4 ([1], с. 322).

Лемма 2.1. *Для полугруппы T имеют место утверждения*
1. $\overline{\operatorname{Im}(A_0 - \lambda I)} \subset \overline{\operatorname{Im} T}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,
2. $\overline{D(A_0^n)} = \overline{D(\mathbb{A}^n)} = \overline{\operatorname{Im} T} = \overline{X_c(T)} = \overline{\widetilde{X}_1(T)}$, $n \in \mathbb{N}$,
3. $\operatorname{Ker} T \cap X_c(T) = \{0\}$,
4. $\operatorname{Ker} T \cap D(A_0) = \{0\}$,
5. $\operatorname{Ker} T \cap \widetilde{X}_1(T) = \{0\}$,
6. $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \operatorname{fix} T \subset \operatorname{Ker} \mathbb{A}$, *где* $\mathcal{A} \in \operatorname{Gen}(T)$, $\mathbb{A}_0 \subset \mathcal{A}$ *и* $D(\mathcal{A}) \subset \widetilde{X}_1$.

Лемма 2.2. *Пусть* $\operatorname{Ker} T \cap \overline{ImT} \neq \{0\}$. *Тогда* $\rho(\mathbb{A}) = \emptyset$.

Лемма 2.3. *Пусть* $x \in D(A_0)$ *и* $A_0 x \in X_1(T)$. *Тогда* $T(t)x - x = \int\limits_0^t T(\tau) A_0 x\, d\tau$, $t > 0$.

Лемма 2.4. *Пусть* $x \in D(A_0)$. *Тогда* $T(s) A_0 x = A_0 T(s) x = T'(s) x$, $s > 0$.

Замечание 2.1. В отличие от полугрупп класса C_0 ([1], с. 335), инфинитезимальные операторы полугрупп рассматриваемого класса могут быть замкнутыми, незамкнутыми и незамыкаемыми в классе операторов.

Согласно ([1], с. 357) дадим

Определение 2.13. Пусть инфинитезимальный оператор A_0 замыкаем. Тогда его замыкание называется *инфинитезимальным производящим оператором* или *инфинитезимальным генератором* полугруппы T.

3. Условия замыкаемости и условия замкнутости некоторых генераторов

В нижеследующих утверждениях изложены основные результаты данной работы, а именно: необходимые (теорема 3.1) и достаточные условия (теорема 3.2), чтобы инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы T был не замыкаем в классе операторов, а также необходимые (в случае, когда $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset X_1(T)$) условия (теорема 3.3) и достаточные условия (теорема 3.4), чтобы инфинитезимальный оператор A_0 полугруппы T был закмнутым. Всюду далее через A_0 обозначен инфинитезимальный оператор полугруппы T.

Теорема 3.1. *Пусть инфинитезимальный оператор A_0 не замыкаем в классе операторов. Тогда $\overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$.*

Доказательство. Если A_0 не замыкаем в классе операторов, то $\overline{A_0} \in LR(X)$, где $\overline{A_0}$ есть замыкание графика оператора A_0. Значит, существует $y_0 \neq 0$ такой, что пара $(0, y_0) \in \overline{A_0}$. Следовательно, существует последовательность $\{(x_n, A_0 x_n),\ n \in \mathbb{N}\}$, сходящаяся к $(0, y_0)$ при $n \to \infty$. Это значит, что $x_n \to 0$, а $A_0 x_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Отсюда $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} A_0}$. Покажем, что $y_0 \in \operatorname{Ker} T$. По лемме 2.4 для $x_n \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, и любого $s > 0$ верны равенства $T(s)A_0 x_n = A_0 T(s) x_n = T'(s) x_n$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} T(s)A_0 x_n = T(s) y_0$. Интегрируя последнее равенство по промежутку $[s, t]$, $0 < s \leq t < \infty$, получим

$$\int_s^t T(\tau) y_0 \, d\tau = \int_s^t \lim_{n\to\infty} T(\tau) A_0 x_n \, d\tau = \lim_{n\to\infty} \int_s^t T(\tau) A_0 x_n \, d\tau =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_s^t T'(\tau) x_n \, d\tau = \lim_{n\to\infty} (T(t) x_n - T(s) x_n).$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty} T(t) x_n = 0$, $t > 0$, то в силу единственности предела у сходящейся последовательности имеем

$$\int_s^t T(\tau) y_0 \, d\tau = 0, \quad 0 < s \leq t < \infty.$$

Значит, $y_0 \in \operatorname{Ker} T$. Итак, $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. □

Теорема 3.2. *Пусть $\operatorname{Im} A_0 \subset X_1(T)$ и $\overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. Тогда инфинитезимальный оператор A_0 не замыкаем в классе операторов.*

Доказательство. Пусть $\overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. Значит, существует $y_0 \neq 0$ такой, что $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} A_0}$ и $y_0 \in \operatorname{Ker} T$. Поэтому найдется последовательность $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $y_n \in \operatorname{Im} A_0$, $n \in \mathbb{N}$, и $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Следовательно, существует последовательность $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $x_n \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\{A_0 x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится к y_0 при $n \to \infty$. Так как $x_n \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, и $\operatorname{Im} A_0 \subset X_1(T)$, то по лемме 2.3

$$\int_0^t T(\tau) A_0 x_n \, d\tau = T(t) x_n - x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t > 0.$$

В пределе получим

$$\lim_{n\to\infty} (T(t) x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(\tau) A_0 x_n \, d\tau = \int_0^t T(\tau) y_0 \, d\tau = 0,$$

так как $y_0 \in \operatorname{Ker} T \cap \overline{\operatorname{Im} A_0} \subset \operatorname{Ker} T \subset X_1(T)$. Поэтому

$$0 = \lim_{n\to\infty} (T(t) x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} T(t) x_n - \lim_{n\to\infty} x_n = T(t) z_0 - z_0,$$

т. е. последовательность $\{x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к некоторому z_0, причем $z_0 \in \operatorname{fix} T$. Отсюда заключаем, что последовательность $\{x_n - z_0,\, n \in \mathbb{N}\}$ сходится к нулю при $n \to \infty$. Согласно лемме 2.1 $\operatorname{fix} T = \operatorname{Ker} A_0$, значит,

$$A_0(x_n - z_0) = A_0 x_n - A_0 z_0 = A_0 x_n \to y_0, \quad n \to \infty.$$

Итак, имеем последовательность $\{(x_n - z_0,\, A_0(x_n - z_0)),\, n \in \mathbb{N}\}$, где $x_n - z_0 \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, сходящуюся к паре $(0, y_0)$, т. е. $(0, y_0) \in \overline{A_0}$. Иными словами, $\overline{A_0} \in LR(X)$, т. е. оператор A_0 не замыкаем. □

Следствие 3.1. Пусть $\overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T = \{0\}$. Тогда оператор A_0 замыкаем.

Следствие 3.2. Следующие утверждения эквивалентны:
1) строгий инфинитезимальный оператор $\mathbb{A}_0$ не замыкаем в классе операторов,
2) $\overline{\operatorname{Im} \mathbb{A}_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$.

Доказательство. Из определения генератора $\mathbb{A}_0$ вытекает $\operatorname{Im} \mathbb{A}_0 \subset X_c(T)$. Поэтому $\operatorname{Im} \mathbb{A}_0 \subset X_1(T)$. Применение теорем 3.1 и 3.2 завершает доказательство. □

Замечание 3.1. Из доказательства теорем 3.1 и 3.2 следует, что данный критерий имеет место для генератора $A_1 \in \operatorname{Gen}(T)$, имеющего вид $A_1 x = A_0 x$, $x \in D(A_1)$, где $D(A_1) = \{x \in D(A_0) : A_0 x \in X_1(T)\}$, а значит, и для любого генератора $A \in \operatorname{Gen}(T)$, удовлетворяющего условию $A \subset A_1$.

Следствие 3.3. Пусть Y есть одно из следующих подпространств:

$$\overline{\operatorname{Im} T}, \quad \overline{D(A_0)}, \quad \overline{D(\mathbb{A})}, \quad \overline{X_c(T)}, \quad \overline{\widetilde{X}_1(T)},$$

и пусть для оператора A выполняются условия: $A \in \operatorname{Gen}(T)$ и $A \subset A_0$. Если оператор A не замыкаем, то $Y \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$.

Следствие 3.4. Пусть оператор A_0 не замыкаем. Тогда $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{C}$.

Доказательство. Если оператор A_0 не замыкаем, то выполняется условие $\overline{\operatorname{Im} A_0} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. Из леммы 2.1 следует $\overline{\operatorname{Im} T} \cap \operatorname{Ker} T \neq \{0\}$. Согласно лемме 2.2 $\rho(\mathbb{A}) = \emptyset$, т. е. $\sigma(\mathbb{A}) = \mathbb{C}$. □

Замечание 3.2. Последнее утверждение будет справедливо, если оператор A_0 заменить на любой генератор $A \in \operatorname{Gen}(T)$, удовлетворяющий условию $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} A_0$. В частности, утверждение верно для генераторов $\mathbb{A}_0$ и A_1.

Теорема 3.3. *Пусть $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset X_1(T)$ и инфинитезимальный оператор A_0 замкнут. Тогда $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$.*

Доказательство. Пусть A_0 замкнут и $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} A_0}$. Тогда существует последовательность $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $y_n \in \operatorname{Im} A_0$, сходящаяся к y_0 при $n \to \infty$. Значит, существует последовательность $\{A_0 x_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, где $x_n \in D(A_0)$, сходящаяся к y_0 при $n \to \infty$. Так как $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset X_1(T)$, то для любого $t > 0$ и каждого $n \in \mathbb{N}$ из леммы 2.3 имеем

$$T(t)x_n - x_n = \int_0^t T(\tau) A_0 x_n \, d\tau.$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} (T(t)x_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T(\tau) A_0 x_n \, d\tau = \int_0^t T(\tau) y_0 \, d\tau, \quad t > 0.$$

Отсюда заключаем о существовании предела слева. Обозначим $z_0(t) = \lim_{n\to\infty}(T(t)x_n - x_n)$, $t > 0$. Так как $x_n \in D(A_0)$, то $T(s)x_n - x_n \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, $s > 0$. Из леммы 2.3 получаем

$$T(t)(T(s)x_n - x_n) - (T(s)x_n - x_n) = \int_0^t T(\tau)A_0(T(s)x_n - x_n)d\tau, \quad n \in \mathbb{N}, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

В пределе имеем

$$T(t)z_0(s) - z_0(s) = \int_0^t T(\tau)(T(s)y_0 - y_0)d\tau, \quad t > 0, \quad s > 0.$$

Умножая обе части равенства на $1/t$ и беря предел при $t \to 0+$, получаем

$$\lim_{t\to 0+} \frac{T(t)z_0(s) - z_0(s)}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)(T(s)y_0 - y_0)d\tau, \quad s > 0.$$

Из замкнутости оператора A_0 следует, что $z_0(s) \in D(A_0)$ и $A_0 z_0(s) = T(s)y_0 - y_0$, $s > 0$. Следовательно,

$$T(s)y_0 - y_0 = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)(T(s)y_0 - y_0)d\tau, \quad s > 0,$$

т. е. $T(s)y_0 - y_0 \in \widetilde{X}_1(T)$, $s > 0$. Так как

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t T(\tau)T(s)y_0 d\tau = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_s^{s+t} T(\tau)y_0 d\tau = T(s)y_0, \quad s > 0,$$

то $T(s)y_0 \in \widetilde{X}_1(T)$, $s > 0$. Значит, $y_0 = -(T(s)y_0 - y_0) + T(s)y_0 \in \widetilde{X}_1(T)$. В силу произвольности выбора $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} A_0}$, заключаем, что $\overline{ImA_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$. □

Следствие 3.5. Пусть $\overline{\operatorname{Im} \mathbb{A}_0} \subset X_1(T)$ и строгий инфинитезимальный оператор $\mathbb{A}_0$ замкнут. Тогда $\overline{\operatorname{Im} \mathbb{A}_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$.

Теорема 3.4. *Пусть* $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$. *Тогда инфинитезимальный оператор* A_0 *замкнут.*

Доказательство. Пусть $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$ и существует последовательность $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ такая, что $x_n \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и последовательность $\{A_0 x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ сходится к y_0 при $n \to \infty$. Покажем, что $x_0 \in D(A_0)$ и $A_0 x_0 = y_0$. Так как $\widetilde{X}_1(T) \subset X_1(T)$, то $\overline{\operatorname{Im} A_0} \subset X_1(T)$, поэтому для $x_n \in D(A_0)$, $n \in \mathbb{N}$, из леммы 2.3 следуют равенства

$$\int_0^t T(s)A_0 x_n\, ds = T(t)x_n - x_n, \quad t > 0.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\int_0^t T(s)y_0\, ds = T(t)x_0 - x_0, \quad t > 0.$$

Умножая обе части равенства на $1/t$ и переходя к пределу при $t \to 0+$, получим

$$\lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)y_0\, ds = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}(T(t)x_0 - x_0).$$

Так как $y_0 \in \overline{\operatorname{Im} A_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$, то существует предел слева, равный y_0. Значит, $x_0 \in D(A_0)$ и имеет место равенство $y_0 = A_0 x_0$. Другими словами, оператор A_0 замкнут. □

Следствие 3.6. Пусть $\overline{\operatorname{Im} \mathbb{A}_0} \subset \widetilde{X}_1(T)$. Тогда строгий инфинитезимальный оператор $\mathbb{A}_0$ замкнут.

Следствие 3.7. Пусть $X_c(T) = \overline{X_c(T)}$ и для оператора $A \in \mathrm{Gen}(T)$ выполняется условие $A \subset A_0$. Тогда оператор A замкнут.

Теорема 3.5. *Если* $\overline{X_1(T)} \neq X$, *то* $\sigma(A_0) = \mathbb{C}$.

Доказательство. Так как $\overline{X_1(T)} \neq X$ и $X_c(T) \subset X_1(T)$, то $\overline{X_c(T)} \neq X$. Из леммы 2.1 следует $\overline{\mathrm{Im}\, T} \neq X$ и $\overline{\mathrm{Im}\, A_0} \neq X$. Значит, $\sigma(A_0) = \mathbb{C}$. □

Замечание 3.3. Пусть $\overline{X_1(T)} \neq X$. Тогда $\sigma(A) = \mathbb{C}$ для любого генератора из $\mathrm{Gen}(T)$, удовлетворяющего условию $A \subset A_0$.

4. Примеры замкнутых и незамыкаемых инфинитезимальных операторов

Далее рассмотрена полугруппа операторов, которая удовлетворяет условиям теоремы 3.4, и показано, что инфинитезимальный оператор данной полугруппы замкнут.

Пример 4.1. Рассмотрим показательную полугруппу ([1], с. 334). Пусть $X = C[0,1]$. Полугруппа T задается формулой

$$(T(t)x)(s) = \left[s\left(1 + \cos\frac{1}{s}\right)\right]^t x(s), \quad t > 0, \quad x \in C[0,1].$$

Это сильно непрерывная на $(0,\infty)$ полугруппа. Так как

$$\|T(t)\| = \sup_{\|x\|=1} \max_{s\in[0,1]} \left|\left[s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right]^t x(s)\right| \leq \max_{s\in[0,1]} \left|\left[s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right]^t\right| \leq 2, \quad t > 0,$$

то T — ограниченная полугруппа. Значит, $X_1(T) = C[0,1]$, $\mathrm{Ker}\, T = \{0\}$, поэтому

$$\overline{\mathrm{Im}\, A_0} \cap \mathrm{Ker}\, T = \{0\}.$$

Пусть $S_0 = \{0\} \cup \bigl\{\frac{1}{(2n+1)\pi}, n = 0, 1, 2, \dots\bigr\}$. Подпространство $X_c(T)$ имеет вид $\{x \in C[0,1] : x(s) = 0$ для $s \in S_0\}$. Отсюда $X_c(T) = \overline{X_c(T)}$. Из последнего равенства и определения генератора $\mathbb{A}_0$ следует $\mathbb{A}_0 = A_0$. Кроме того, имеют место включения $\overline{\mathrm{Im}\, A_0} \subset \overline{\mathrm{Im}\, T} = \overline{X_c(T)} = X_c(T) \subset \widetilde{X}_1(T)$. Таким образом, полугруппа T удовлетворяет условиям теоремы 3.4. Выясним вид оператора A_0. По определению

$$A_0 : D(A_0) \subset X \to X,$$

$$A_0 x = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A_0).$$

Из включения $D(A_0) \subset X_c(T)$ следует $x(s) = 0$, $s \in S_0$, для $x \in D(A_0)$. Пусть $s \notin S_0$. Тогда

$$\lim_{t\to 0+} \frac{(T(t)x)(s) - x(s)}{t} = \ln\left(s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right)x(s).$$

Значит,

$$\lim_{t\to 0+} \frac{(T(t)x)(s) - x(s)}{t} = \begin{cases} 0, & s \in S_0; \\ \ln(s(1+\cos\frac{1}{s}))x(s), & s \notin S_0. \end{cases}$$

Из условия $\ln\bigl(s\bigl(1+\cos\frac{1}{s}\bigr)\bigr)x(s) \in C[0,1]$ заключаем, что $x \in D(A_0)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s\to s_0} \ln\bigl(s\bigl(1+\cos\frac{1}{s}\bigr)\bigr)x(s) = 0$ для $s_0 \in S_0$. Таким образом, инфинитезимальный оператор A_0 имеет вид

$$(A_0x)(s) = \begin{cases} 0, & s \in S_0; \\ \ln\bigl(s\bigl(1+\cos\frac{1}{s}\bigr)\bigr)x(s), & s \notin S_0, \end{cases}$$

$$D(A_0)=\left\{x\in C[0,1]:\lim_{s\to s_0}\ln\left(s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right)x(s)=0\ \text{ для }\ s_0\in S_0\right\}.$$

Покажем, что оператор A_0 замкнутый. Пусть существует последовательность $\{x_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ такая, что $x_n\in D(A_0)$, $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}A_0x_n=y_0$. Покажем, что $x_0\in D(A_0)$ и $A_0x_0=y_0$. Так как пространство $C[0,1]$ банахово, то $y_0,x_0\in C[0,1]$. Имеем

$$y_0(s)=\lim_{n\to\infty}(A_0x_n)(s)=\lim_{n\to\infty}\left(\ln\left(s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right)x_n(s)\right)=\ln\left(s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right)\lim_{n\to\infty}x_n(s)=$$
$$=\ln\left(s\left(1+\cos\frac{1}{s}\right)\right)x_0(s);\quad y_0(s)=0\ \text{ при }\ s\notin S_0.$$

Из условия $y_0\in C[0,1]$ заключаем, что $\lim\limits_{s\to s_0+}\ln\big(s\big(1+\cos\frac{1}{s}\big)\big)x_0(s)=0$ для $s_0\in S_0$. Значит, $x_0\in D(A_0)$ и $A_0x_0=y_0$, т. е. оператор A_0 замкнутый.

В следующем примере рассмотрена полугруппа операторов, которая удовлетворяет условиям теоремы 3.2, и показано, что инфинитезимальный оператор данной полугруппы не замыкаем в классе операторов. Исследуемая полугруппа является частным случаем полугруппы, рассмотренной в ([2], пример 1).

Пример 4.2. В пространстве $L^2[0,1]$ с ортонормированным базисом $\{e_k,\, k\in\mathbb{Z}\}$, где $e_k(s)=e^{i2\pi ks}$, $s\in[0,1]$, $k\in\mathbb{Z}$, рассмотрим операторозначную функцию $T:(0,\infty)\to\operatorname{End}L^2[0,1]$, задаваемую равенством

$$(T(t)x)(s)=\sum_{k\neq0}e^{-4\pi^2k^2t}(x,e_k)e_k(s)+\left(\sum_{k\neq0}e^{-4\pi^2k^2t}(x,e_k)\right)e_0(s),\quad t>0,\quad s\in[0,1].$$

Всюду далее $(x,e_k)=\int\limits_0^1 x(s)e^{i2\pi ks}ds$, $k\in\mathbb{Z}$.

Функция T является полугруппой операторов в $L^2[0,1]$. Для этой полугруппы $\operatorname{Ker}T$ — ненулевое подпространство из $L^2[0,1]$, порожденное базисным вектором e_0, т. е. подпространство функций x вида $x(s)=\alpha$, $s\in[0,1]$, $\alpha\in\mathbb{C}$. В силу оценки

$$\|T(t)\|=\sup_{\|x\|=1}\|T(t)x\|\le1+\sum_{k\neq0}e^{-4\pi^2k^2t},\quad t>0,$$

имеем равенство $X_1(T)=L^2[0,1]$.

Так как для всех $k\neq0$ функции e_k принадлежат $D(A_0)$ и $A_0e_k=-4\pi^2k^2(e_k+e_0)$, $k\neq0$, то $e_k+e_0\in\operatorname{Im}A_0$ для всех $k\neq0$. Последовательность

$$\left\{z_n=\frac{1}{2n}\sum_{1\le|k|\le n}(e_k+e_0),\quad n\in\mathbb{N}\right\}$$

состоит из элементов подпространства $\operatorname{Im}A_0$ и сходится к $e_0\in\operatorname{Ker}T$, так как $\|e_0-z_n\|^2=\frac{1}{2n}\to0$ при $n\to\infty$. Значит, $e_0\in\overline{\operatorname{Im}A_0}$. Так как $e_0\in\operatorname{Ker}T$, то $\overline{\operatorname{Im}A_0}\cap\operatorname{Ker}T\neq\{0\}$. Таким образом, полугруппа T удовлетворяет условиям теоремы 3.2. Покажем теперь, что оператор A_0 не замыкаем.

Введем подпространство Y следующим образом. Функция $x\in L^2[0,1]$ принадлежит подпространству Y, если функциональный ряд

$$T(t)x=\sum_{k\neq0}e^{-4\pi^2k^2t}(x,e_k)(e_k+e_0),\quad t>0,$$

почленно дифференцируем в нуле справа, т. е.

$$\lim_{t\to 0+}\frac{T(t)x-x}{t}=-4\pi^2\sum_{k\neq 0}k^2(x,e_k)(e_k+e_0).$$

Ясно, что $Y\subset D(A_0)$. Определим сужение A инфинитезимального оператора A_0 на подпространство Y как $Ax=A_0x$, $x\in Y$. Тогда $Ax=-4\pi^2\sum\limits_{k\neq 0}k^2(x,e_k)(e_k+e_0)$, $x\in Y$.

Покажем, что оператор A не замыкаем. Образуем последовательность функций

$$\left\{x_n(s)=\frac{1}{2n}\sum_{1\le|k|\le n}\frac{1}{k^2}\,e_k(s),\quad n\ge 1,\quad s\in[0,1]\right\}.$$

Для каждого $n\in\mathbb{N}$ функция x_n принадлежит подпространству Y. Поэтому

$$(Ax_n)(s)=-4\pi^2\frac{1}{2n}\sum_{1\le|k|\le n}(e_k(s)+e_0(s)),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Последовательность $\{x_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ сходится к нулю при $n\to\infty$, так как

$$\|x_n\|^2=\frac{1}{4n^2}\sum_{1\le|k|\le n}\frac{1}{k^2}\|e_k\|^2=\frac{1}{n}\sum_{1\le|k|\le n}\frac{1}{k^2}.$$

Последовательность $\{Ax_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ сходится к $-4\pi^2e_0$ при $n\to\infty$, так как

$$\|Ax_n+4\pi^2e_0\|^2=\left\|\frac{-2\pi^2}{n}\sum_{1\le|k|\le n}e_k-4\pi^2e_0+4\pi^2e_0\right\|^2=\frac{4\pi^4}{n^2}\left\|\sum_{1\le|k|\le n}e_k\right\|^2=\frac{8\pi^4}{n}.$$

Следовательно, замыкание $\overline{\Gamma}$ графика Γ оператора A помимо пары $(0,0)$ содержит пару $(0,-4\pi^2e_0)$, т. е. оператор A не замыкаемый в классе операторов. Значит, инфинитезимальный оператор A_0 также не замыкаем.

Литература

[1] Хилле Э., Филлипс Р. *Функциональный анализ и полугруппы* (Ин. лит., М., 1962).

[2] Баскаков А.Г. *Линейные отношения как генераторы полугрупп операторов*, Матем. заметки **84** (2), 175–192 (2008).

[3] Баскаков А.Г., Чернышов К.И. *Спектральная теория линейных отношений и вырожденные полугруппы операторов*, Матем. сб. **193** (11), 3–42 (2002).

А.Г. Чшиев

аспирант, кафедра математических методов исследования операций,
Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006,

e-mail: mmio@amm.vsu.ru

A.G. Chshiev

Postgraduate, Chair of Mathematical Methods of Research of Operations,
Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: mmio@amm.vsu.ru