ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2001 МАТЕМАТИКА № 6 (469)

УДК 517.957

Д.В. ПАШУТКИН

О ПРИВОДИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К БЛОЧНО-ТРЕУГОЛЬНОМУ ВИДУ

1. При решении задачи устойчивости первым методом Ляпунова важную роль играет понятие приводимости линейных однородных дифференциальных уравнений ([1], с. 43; [2], с. 154). Приводимые уравнения обладают большим сходством в качественном поведении решений, в частности, сохраняется свойство устойчивости и характеристические показатели решений ([2], с. 154). Для исследования свойств решений конкретного уравнения важно установить приводимость его к уравнению, свойства которого поддаются изучению. В работах Ляпунова в качестве таких простейших уравнений рассматривались уравнения с постоянными матрицами. Известно, что не всякое линейное однородное дифференциальное уравнение приводимо к уравнению с постоянной матрицей. Однако, как показал Перрон, всякое линейное однородное дифференциальное уравнение приводимо к уравнению с треугольной матрицей, которое может быть проинтегрировано. В работах ([3], с. 266; [4]) был получен критерий приводимости линейного однородного дифференциального уравнения к уравнению с блочно-треугольной матрицей, обобщающий результат Перрона.

В [5]–[7] введено понятие приводимости на множестве Ξ нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_0(t,x), \tag{1}$$

где $t \in [T,+\infty)$, $x \in R^n$, $x = \operatorname{colon}(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $f_0 \in C([T,+\infty)\times R^n, R^n)$, $f(t,0) \equiv 0$, все решения $x(t:t_0,x_0)$ существуют на всем полуинтервале $[T,+\infty)$ и однозначно определяются начальными данными (t_0,x_0). Пусть задана группа преобразований множества Ξ, инвариантами которой являются характеристические показатели решений и устойчивость нулевого решения. Тогда эта группа называется ляпуновской, преобразования, входящие в эту группу, называются ляпуновскими преобразованиями, а дифференциальные уравнения, связанные такими преобразованиями, — приводимыми [7].

Одной из наиболее часто используемых групп преобразований является группа LG [6], состоящая из преобразований $L \in C^1([T,+\infty)\times R^n, R^n)$, обладающих следующими свойствами:

1) $L(t,0) = 0$;

2) $\|\frac{\partial L(t,x)}{\partial x}\| \le K_L$ при $t \in [T+\infty)$, $x \in R^n$, K_L не зависит от t, x.

Здесь и далее используется евклидова норма векторов и матриц $\|(a_{ij})\| = \sqrt{\sum\limits_{i,j} a_{ij}^2}$, $\|\operatorname{colon}(x_1,x_2,\dots,x_n)\| = \sqrt{\sum\limits_i x_i^2}$.

Все результаты, полученные в данной работе, относятся к приводимости в группе LG.

Использование приводимости нелинейных дифференциальных уравнений позволяет применить идеи и приемы первого метода Ляпунова к исследованию решений существенно нелинейных дифференциальных уравнений. Как и в линейном случае, важно установить, является ли рассматриваемое дифференциальное уравнение приводимым к уравнению более простого вида

[5]–[8]. Решению вопроса, будут ли справедливы результаты, относящиеся к приводимости линейного однородного дифференциального уравнения к блочно-треугольному виду, в нелинейном случае, посвящена данная работа.

Основным инструментом, используемым в статье, является обобщающий известную теорему Еругина ([2], с. 154) критерий приводимости нелинейных дифференциальных уравнений [7].

Теорема 1. *Для того чтобы уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f_1(t, x) \tag{2}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = f_2(t, y) \tag{3}$$

из множества Ξ *были взаимно приводимы, необходимо и достаточно, чтобы преобразование*

$$x = \varphi_1(t, \varphi_2^{-1}(t, y)),$$

где $x = \varphi_1(t, c)$, $y = \varphi_2(t, c)$ *— общие решения уравнений* (2) *и* (3) *соответственно, было ляпуновским.*

2. В качестве естественного обобщения понятия треугольного уравнения на нелинейный случай возьмем

Определение 1 ([2], с. 323). Дифференциальное уравнение (1) будем называть треугольным, если функция f имеет вид

$$f(t, x) = \mathrm{colon}(f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(t, x_2, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_n)).$$

По аналогии введем понятия блочно-треугольного и диагонального дифференциальных уравнений.

Определение 2. Дифференциальное уравнение (1) будем называть блочно-треугольным, если функция f имеет вид

$$f(t,x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}) \\ f_2(t, x_2, \ldots, x_{m_1}) \\ \ldots \\ f_{m_1}(t, x_{m_1}) \\ f_{m_1+1}(t, x_{m_1+1}, \ldots, x_{m_1+m_2}) \\ f_{m_1+2}(t, x_{m_1+2}, \ldots, x_{m_1+m_2}) \\ \ldots \\ f_{m_1+m_2}(t, x_{m_1+m_2}) \\ \ldots \\ f_{m_1+m_2+\ldots+m_{k-1}+1}(t, x_{m_{k-1}+1}, \ldots, x_n) \\ \ldots \\ f_n(t, x_n) \end{pmatrix},$$

где $m_i \in N$, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$.

В условиях определения 2 уравнение (1) распадается на k независимых уравнений.

Наконец, уравнение (1) будем называть диагональным, если f допускает представление $f(t, x) = \mathrm{colon}(f_1(t, x_1), f_2(t, x_2), \ldots, f_n(t, x_n))$.

Если в уравнении (1) f является непрерывно дифференцируемой функцией, то согласно сформулированным определениям уравнение (1) является треугольным, блочно-треугольным и диагональным, если матрица Якоби $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ является треугольной, блочно-треугольной и диагональной соответственно.

Условимся для функции $F \in C([T,+\infty)\times R^n, R^n)$ обозначать через $F^{-1}(t,x)$ такую функцию, что $F(t, F^{-1}(t,x)) = x$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) \tag{4}$$

из множества Ξ, $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty)\times R^n, R^n)$.

Необходимые и достаточные условия приводимости линейного однородного уравнения к блочно-треугольному виду получены в работах ([4]; [3], с. 266). Следующая теорема дает необходимое условие приводимости уже нелинейного уравнения (4) к блочно-треугольному дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y) \tag{5}$$

класса Ξ, $g \in C^{(0,1)}([T,+\infty)\times R^n, R^n)$, в группе преобразований Ляпунова LG.

Пусть $m_i \in N$, $i = 1,\dots,k$, $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$, будем считать $m_0 = 0$. Обозначим $X(t,x_0) = \frac{\partial\Phi(t,x_0)}{\partial x_0}$, где $\Phi(t,x_0)$ — общее решение уравнения (4); X_i — прямоугольные матрицы, составленные из столбцов матрицы $X(t,x_0)$ с номерами $m_{i-1}+1,\dots,m_i$, т. е.

$$X(t,x_0) = [X_1, X_2, \dots, X_k],$$

а через $G(A)$ — граммиан матрицы A [3].

Теорема 2. *Для приводимости уравнения* (4) *к блочно-треугольному уравнению вида* (5) *в группе преобразований Ляпунова LG необходимо, чтобы выполнялось неравенство*

$$\frac{G(X(t,x_0))}{G(X_1(t,x_0))G(X_2(t,x_0))\dots G(X_k(t,x_0))} \ge \rho, \tag{6}$$

где ρ — некоторая положительная постоянная, при всех $t \in [T,+\infty)$, $x_0 \in R^n$.

Доказательство. Пусть преобразование Ляпунова $x = L(t,y)$ переводит уравнение (4) в блочно-треугольное уравнение (5). Так как $L \in LG$, то

$$\left\|\frac{\partial L(t,y)}{\partial y}\right\| \le K_1, \quad \det\frac{\partial L(t,y)}{\partial y} \ge K_2 > 0, \tag{7}$$

где K_1, K_2 — положительные постоянные, при всех $t \in [T,+\infty)$, $y \in R^n$.

Разобьем матрицу $\frac{\partial L(t,y)}{\partial y}$ на k прямоугольных блоков размерности $n \times m_i$:

$$\frac{\partial L(t,y)}{\partial y} = [L_1(t,y),\dots,L_k(t,y)].$$

Обозначим через $y(t:t_0,y_0)$ решение уравнения (5) с начальными данными (t_0,y_0).

Так как уравнение (5) является блочно-треугольным, то матрица $\frac{\partial y(t:T,y_0)}{\partial y_0}$ является блочно-диагональной с ненулевыми матрицами размерности $m_i \times m_i$ на диагонали.

По теореме 1 $\Phi(t,x_0) = L(t, y(t:T,x_0))$ — общее решение уравнения (4). Тогда

$$X(t,x_0) = \frac{\partial L(t,y(t:T,y_0))}{\partial y}\frac{\partial y(t:T,y_0)}{\partial y_0}.$$

Из строения матрицы $\frac{\partial y(t:T,y_0)}{\partial y_0}$ вытекает

$$X_i(t,x_0) = L_i(t,y(t:T,x_0))Y_i(t,x_0), \quad i = 1,\dots,k.$$

Далее следуем доказательству теоремы для линейных уравнений [3], [4]. Используя свойства детерминанта Грама ([3], с.469), получим

$$
\begin{aligned}
G(X_i(t,x_0)) = \det X_i^T(t,x_0)X_i(t,x_0) = \\
= \det(Y_i^T(t,x_0)L_i^T(t,y(t:T,x_0))L_i(t,y(t:T,x_0))Y_i(t,x_0)) = \\
= (\det Y_i(t,x_0))^2 G(L_i(t,y(t:T,x_0))), \quad i = 1,\ldots,k.
\end{aligned}
$$

Из формулы Остроградского–Лиувилля вытекает

$$
\begin{aligned}
G(X(t,x_0)) = (\det X(t,x_0))^2 = \left(\det \frac{\partial L(t,y(t:T,y_0))}{\partial y}\right)^2 \left(\det \frac{\partial y(t:T,y_0)}{\partial y_0}\right)^2 = \\
= A(t)G\Big(\frac{\partial L(t,y(t:T,y_0))}{\partial y}\Big), \\
G(Y_1)\ldots G(Y_k) = \exp\left(2\int_T^t \operatorname{Sp}\frac{\partial g(s,y(s:T,y_0))}{\partial y}ds\right) \stackrel{\text{def}}{=} A(t).
\end{aligned}
$$

Тогда из полученных соотношений и неравенств (7) следует оценка

$$
\begin{aligned}
\frac{G(X(t,x_0))}{G(X_1(t,x_0))\ldots G(X_k(t,x_0))} = \frac{A(t)G\big(\frac{\partial L(t,y(t:T,y_0))}{\partial y_0}\big)}{A(t)G(L_1(t,y(t:T,y_0)))\ldots G(L_k(t,y(t:T,y_0)))} = \\
= \frac{G\big(\frac{\partial L(t,y(t:T,y_0))}{\partial y_0}\big)}{G(L_1(t,y(t:T,y_0)))\ldots G(L_k(t,y(t:T,y_0)))} \geq \frac{K_2^2}{(n!nK_1^2)^k}.
\end{aligned}
$$

Так как последнее неравенство справедливо при всех y_0, то имеет место оценка

$$
\frac{G\big(\frac{\partial L(t,y)}{\partial y}\big)}{G(L_1(t,y))\ldots G(L_k(t,y))} \geq \frac{K_2^2}{(n!nK_1^2)^k}.
$$

Полагая $\rho = \frac{K_2^2}{(n!nK_1^2)^k}$, получим неравенство (6). □

Если уравнение (4) является линейным, то условие (7) переходит в необходимое и достаточное условие приводимости к блочно-треугольному виду из работ ([3], с. 268; [4]).

Следующий пример показывает, что в общем случае нелинейное дифференциальное уравнение не может быть приведено к треугольному виду преобразованием группы LG, хотя условие (6) в этом случае всегда выполнено, т. е. условие (7) не является достаточным в нелинейном случае.

Пример. Рассмотрим функцию $F_1 : [0,+\infty) \times R^2 \to R^2$,

$$
F_1(t,x) = P(t(x_1^2 + x_2^2))x,
$$

где $x = \operatorname{colon}(x_1, x_2)$,

$$
P(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}
$$

— матрица поворота, и функцию $F_2 : [0,+\infty) \times R^2 \to R^2$,

$$
F_2(t,x) = \begin{pmatrix} e^{t \operatorname{arctg} x_1^2} x_1 \\ e^{t \operatorname{arctg} x_1^2} x_2 \end{pmatrix}.
$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$
\det \frac{\partial F_1(t,x)}{\partial x} = 1, \tag{8}
$$

$$
\det \frac{\partial F_2(t,x)}{\partial x} = e^{2 \operatorname{arctg} x_1^2} + \frac{2tx_1^2}{1+x_1^4} e^{2 \operatorname{arctg} x_1^2} \geq 1. \tag{9}
$$

Очевидно,

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|F_1(t,x)\| = \infty, \quad \lim_{\|x\|\to\infty} \|F_2(t,x)\| = \infty.$$

Используя неравенства (8) и (9), получим оценки

$$\left\| \left[\frac{\partial F_1(t,x)}{\partial x} \right]^{-1} \right\| \le c_1 t \|x\|^2, \quad \left\| \left[\frac{\partial F_2(t,x)}{\partial x} \right]^{-1} \right\| \le c_2 t \|x\|,$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные, $c_1, c_2 > 0$. Тогда ([9], с. 319) отображения F_1 и F_2 при каждом фиксированном t взаимно однозначно отображют R^2 на себя, причем из неравенств (8) и (9) вытекает непрерывная дифференцируемость $F_1^{-1}(t,\cdot)$ и $F_2^{-1}(t,\cdot)$.

Обозначим

$$x(t,x_0) = F_2(t, F_1(t,x_0)) = e^{t \operatorname{arctg} (\cos(t\|x_0\|^2) x_0^{(1)} + \sin(t\|x_0\|^2) x_0^{(2)})^2} P(t\|x_0\|^2) x_0, \quad x_0 = \operatorname{colon}(x_0^{(1)}, x_0^{(2)}). \tag{10}$$

Из вышесказанного следует, что $x(t,x_0)$ является взаимно однозначным отображением R^2 на себя при каждом фиксированном $t \in [0,+\infty)$, причем $x(0,x_0) = x_0$, а отображение $x^{-1}(t,\cdot)$ непрерывно дифференцируемо.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t,\xi), \tag{11}$$

$f(t,\xi) = \frac{d}{dt} x(t, x^{-1}(t,\xi))$. Покажем, что уравнение (11) не будет приводимым ни к какому треугольному уравнению.

Из свойств функции $x(t,x_0)$ вытекает гладкость функции f по компонентам вектора ξ. По построению $f(t,\xi)$ имеем $\xi(t:0,\xi_0) = x(t,\xi_0)$.

Пусть уравнение (11) преобразованием Ляпунова из группы LG приводимо к треугольному уравнению

$$\frac{d\eta}{dt} = h(t,\eta) \tag{12}$$

класса Ξ. Всякое решение уравнения (12) $\eta(t:0,\alpha e_1)$, $e_1 = \operatorname{colon}(1,0)$, не покидает множество $\{\operatorname{colon}(x_1,x_2) \mid x_1 \in R,\ x_2 = 0\}$ и является решением скалярного уравнения

$$\frac{du}{dt} = h_1(t, \operatorname{colon}(u,0)),$$

где h_1 — первая компонента вектора h.

В силу теоремы 1 существует гомеоморфизм $\Phi : R^2 \to R^2$, $\Phi(0) = 0$, такой, что

$$K_1 \|x(t,\Phi(\eta_0))\| \le \|\eta(t:0,\eta_0)\| \le K_2 \|x(t,\Phi(\eta_0))\|,$$

где $K_1, K_2 \in (0,+\infty)$. Тогда на сфере $S(0,1)$ ($S(x,r) = \{x : x \in R^2,\ \|x\| = r \ge 0\}$) существует точка ξ_1 такая, что решению $\xi(t:0,\xi_1)$ уравнения (11) соответствует решение уравнения (12) $\eta(t:0,\alpha_1 e_1)$, $\alpha_1 > 0$, т. е. $\xi_1 = \Phi(\alpha_1 a_1)$. Для этих решений выполнено неравенство

$$K_1 \|x(t,\xi_1)\| \le \eta(t:0,\alpha_1 e_1) \le K_2 \|x(t,\xi_1)\|. \tag{13}$$

На окружности $S(0,1/2)$ существует точка ξ_2, которой соответствует точка $\alpha_2 e_1$, $0 < \alpha_2 < \alpha_1$, такая, что $\xi_2 = \Phi(\alpha_2 e_1)$, откуда

$$K_1 \|x(t,\xi_2)\| \le \eta(t:0,\alpha_2 e_1) \le K_2 \|x(t,\xi_2)\|. \tag{14}$$

В силу единственности решения задачи Коши для уравнения (12) $\eta(t:0,\alpha_2 e_1) < \eta(t:0,\alpha_1 e_1)$. Из неравенств (13), (14) получим

$$\|x(t,\xi_2)\| \le \frac{K_2}{K_1} \|x(t,\xi_1)\| \tag{15}$$

при всех $t \in [0, +\infty)$.

Пусть $0 \le t_0 < 2\pi$ — угол между вектором $\mathrm{colon}(0,1)$ и вектором ξ_1, т. е. $P(t_0)\xi_1 = \mathrm{colon}(0,1)$. Рассмотрим последовательность $t_k = t_0 + 2\pi k$, $k = 1, 2, \ldots$ Из формулы (10) вытекает

$$\begin{aligned} &\|x(t_k : 0, \xi_1)\| = 1, \\ &\|x(t_k : 0, \xi_2)\| = \frac{1}{2} e^{t_k \operatorname{arctg}(\cos(\frac{1}{4}t_k)\xi_2^{(1)} + \sin(\frac{1}{4}t_k)\xi_2^{(2)})}. \end{aligned} \tag{16}$$

Под знаком арктангенса стоит первая координата вектора b, полученного поворотом вектора ξ_2 на угол $\frac{1}{4}t_k = \frac{1}{4}t_0 + \frac{1}{2}k\pi$, откуда видно, что при каждом значении $m = 0, 1, 2, \ldots$ существует $i(m) \in \{0, 1, 2, 3\}$ такое, что при $k = 4m + i(m)$ угол между векторами b и e_1 находится в пределах $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, следовательно, в точках $t_{4m+i(m)}$ выражение, стоящее под знаком арктангенса, будет не меньше некоторого числа $c > 0$, откуда следует $\|x(t_{4m+i(m)} : 0, \xi_2)\| \to +\infty$ при $m \to \infty$, что в совокупности с формулой (16) противоречит неравенству (15). Следовательно, уравнение (11) не является приводимым к треугольному виду.

3. В ([3], с. 270) указан критерий приводимости линейного дифференциального уравнения к уравнению с диагональной матрицей. Обобщает этот результат

Теорема 3 ([10], [11]). *Для приводимости уравнения* (4) *к диагональному дифференциальному уравнению вида* (5) *в группе преобразований Ляпунова* LG *необходимо и достаточно, чтобы для матрицы Якоби общего решения* $\Phi \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$ *уравнения* (4) $\frac{\partial \Phi(t,c)}{\partial c} = (\phi_1(t,c), \ldots, \phi_n(t,c))$ *существовали непрерывные функции* λ_i *с непрерывными частными производными* $\frac{\partial \lambda_i(t,a)}{\partial t}$ *такие, что* $\|\phi_i(t,c)\| \le \lambda_i(t, c_i)$, $i = 1, \ldots, n$, $t \in [T, +\infty)$, $c \in R^n$ *и*

$$\frac{G(\frac{\partial \Phi(t,c)}{\partial c})}{\lambda_1^2(t, c_1) \ldots \lambda_n^2(t, c_n)} \ge \rho, \tag{17}$$

где $\phi \in (0, +\infty)$, $t \in [T, +\infty)$, $c = \mathrm{colon}(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in R^n$.

Доказательство. Достаточность. Введем обозначения

$$y_i = \int_0^{u_i} \lambda_i(t, \tau) d\tau, \quad i = 1, \ldots, n,$$
$$y(t, u) = \mathrm{colon}(y_1(t, u_1), \ldots, y_n(t, u_n)).$$

Так как

$$\det \frac{\partial y}{\partial u} = \lambda_1(t, u_1) \ldots \lambda_n(t, u_n) \ne 0,$$

то $y(t,u)$ обратима. Покажем, что $y(t, R^n) = R^n$. Для этого достаточно показать, что $y_i(t, R) = R$ $\forall t \in [T, +\infty)$. Так как Φ является общим решением, то при каждом фиксированном t отображение $\Phi(t, \cdot)$ гомеоморфно отображает пространство R^n на себя. Следовательно, $\|\Phi(t,c)\| \to \infty$ при $\|c\| \to +\infty$. Рассмотрим последовательность $a_i = \alpha_i e_1$, $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\alpha_i \to +\infty$. Тогда

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, a_i)\| = \left\| \int_0^1 \phi_1(t, a_i \tau) d\tau \alpha_i \right\| = \left\| \int_0^{\alpha_i} \phi_1(t, \eta e_1) d\eta \right\| \le \\ \le \int_0^{\alpha_i} \|\phi_1(t, \eta e_1) d\eta\| \le \int_0^{\alpha_i} \lambda_1(t, \eta) d\eta \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned} \|\Phi(t, -a_i)\| = \left\| - \int_0^1 \phi_1(t, -a_i \tau) d\tau \alpha_i \right\| = \left\| \int_0^{\alpha_i} \phi_1(t, -\eta e_1) d\eta \right\| \le \int_0^{\alpha_i} \|\phi_1(t, -\eta e_1) d\eta\| \le \\ \le \int_0^{\alpha_i} \lambda_1(t, -\eta) d\eta = - \int_0^{-\alpha_i} \lambda_1(t, \xi) d\xi \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty. \end{aligned} \tag{19}$$

Из неравенств (18) и (19) следует, что $y_1(t,R)=R$. Аналогично доказывается, что $y_i(t,R)=R$, $i=2,\dots,n$.

Положим в уравнении (5) $g(t,z)=\frac{\partial y}{\partial t}(t,y^{-1}(t,z))$, $y(t,c)$ — его общее решение. В силу построения уравнение (5) является диагональным, а в силу условий, наложенных на λ_1, g_1, удовлетворяет требуемым условиям гладкости.

Пусть $L(t,v)=\Phi(t,y^{-1}(t,v))$,

$$\frac{\partial L(t,v)}{\partial v}=\frac{\partial\Phi(t,y^{-1}(t,v))}{\partial u}\frac{\partial y^{-1}(t,v)}{\partial v}=\frac{\partial\Phi(t,y^{-1}(t,v))}{\partial u}\Big[\frac{\partial y(t,y^{-1}(t,v))}{\partial u}\Big]^{-1}.$$

Из условий теоремы вытекает, что $\|\frac{\partial L(t,v)}{\partial v}\|\le K_1$,

$$\det\frac{\partial L(t,v)}{\partial v}=\frac{\sqrt{G(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(t,y^{-1}(t,v)))}}{\lambda_1(t,y^{-1}(t,v))\dots\lambda_n(t,y^{-1}(t,v))}\ge\sqrt{\rho}>0.$$

Последнее неравенство в совокупности с ограниченностью матрицы $\frac{\partial L(t,v)}{\partial v}$ гарантирует ограниченность матрицы $[\frac{\partial L(t,v)}{\partial v}]^{-1}$, а следовательно, и ограниченность матрицы $\frac{\partial L^{-1}(t,v)}{\partial v}$. Требование дифференцируемости преобразования в определении LG выполняется за счет условий гладкости функций λ_i и Φ.

Таким образом, $L\in LG$ и по теореме 1 уравнение (5) приводимо к уравнению (4).

Необходимость. Пусть уравнение (4) приводимо к диагональному уравнению вида (5). По теореме 1 существует общее решение уравнения (4) $\Phi(t,c)$ такое, что $L(t,v)=\Phi(t,y^{-1}(t:T,v))$ является преобразованием Ляпунова.

Положим $\widetilde{\lambda}_i(t,c_i)=\frac{\partial y_i(t:T,c_1)}{\partial y_0^i}$. Так как $\|\frac{\partial L}{\partial v}\|\le K_3$, то $\frac{\Phi_{ij}}{\widetilde{\lambda}_j}\le K_3$, откуда $\|\phi_i(t,u)\|\le\widetilde{\lambda}_i(t,u_i)K_4$. Пусть $\lambda_i(t,a)=K_4\widetilde{\lambda}_i(t,a)$. Так как $\|\frac{\partial L^{-1}}{\partial v}\|\le K_5$, то $\|[\frac{\partial L}{\partial v}]^{-1}\|\le K_6$, следовательно, $|\det\frac{\partial L}{\partial v}|\ge m>0$,

$$\Big|\det\frac{\partial L}{\partial v}\Big|=\Big|\det\frac{\partial\Phi(t,y^{-1}(t:T,v))}{\partial u}\frac{\partial y^{-1}(t:T,v)}{\partial v}\Big|=$$
$$=\Big|\det\frac{\partial\Phi(t,y^{-1}(t:T,v))}{\partial u}\Big[\frac{\partial y(t:T,y^{-1}(t:T,v))}{\partial v}\Big]^{-1}\Big|.$$

Поэтому

$$\Big|\det\frac{\partial\Phi}{\partial u}\det\Big[\frac{\partial y(t:T,u)}{\partial u}\Big]^{-1}\Big|\ge m>0.$$

Следовательно,

$$\frac{\left(\det\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2}{\widetilde{\lambda}_1^2\dots\widetilde{\lambda}_n^2}=\frac{G(\frac{\partial\Phi}{\partial u})K_4^n}{\lambda_1^2\dots\lambda_n^2}\ge m^2>0,$$

откуда получим неравенство (17) при $\rho=\frac{m^2}{K_4^n}$. Условия гладкости функций λ_i и Φ вытекают из теорем о существовании производных по начальным данным для уравнения (5) и гладкости преобразования L. $\square$

Пусть $f(t,x)=A(t)x$. Если положить $\lambda_i\equiv\|\phi_i\|$, то теорема 3 перейдет в критерий приводимости к диагональному виду для линейных дифференциальных уравнений ([3], с. 270).

Литература

1. Ляпунов А.М. *Общая задача об устойчивости движения.* – М.–Л.: ОНТИ, 1935. – 336 с.
2. Демидович Б.П. *Лекции по математической теории устойчивости.* – М.: Наука, 1967. – 472 с.
3. Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В. *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости.* – М.: Наука, 1966. – 576 с.
4. Былов Б.Ф. *Обобщение теоремы Перрона* // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1. – №12. – с. 1597–1600.
5. Воскресенский Е.В. *Группы преобразований Ляпунова* // Укр. матем. журн. – 1993. – Т. 45. – № 12. – С. 1595–1600.
6. Воскресенский Е.В. *Ляпуновские группы преобразований* // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 7. – С. 13–19.
7. Воскресенский Е.В. *О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 9. – С. 33–37.
8. Пашуткин Д.В. *О приводимости нелинейной дифференциальной системы к системе с нулевой правой частью* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 6. – С. 846–847.
9. Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 512 с.
10. Пашуткин Д.В. *О диагонализации нелинейной системы дифференциальных уравнений* // Тез. докл. VII Четаевская конф. "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением", Казань, 10–13 июня, 1997. – Казань: Изд-во Казанск. техн. ун-та, 1997. – С. 62.
11. Пашуткин Д.В. *О диагонализации нелинейных дифференциальных систем* // Тр. семин. по дифференц. уравнениям Мордовск. гос. ун-та. – Саранск, май–июнь, 1997 / Мордовск. гос. ун-т. – Саранск, 1997. – С. 78–83. Деп. в ВИНИТИ 06.08.97. № 2618-И97.

Мордовский государственный университет

Поступила
02.11.1998