ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2005 МАТЕМАТИКА № 5 (516)

УДК 514.752:512.544

Г.А. ТОЛСТИХИНА, А.М. ШЕЛЕХОВ

О ТРИ-ТКАНИ БОЛА, ОБРАЗОВАННОЙ СЛОЕНИЯМИ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В классической теории три-тканей, образованных слоениями *одинаковых* размерностей, естественным образом выделяются специальные классы тканей — Рейдемейстера, Томсена, Бола, Муфанг [1]. Они характеризуются, с одной стороны, замыканием соответствующих конфигураций R, T, B, M, а с другой — тождествами ассоциативности, коммутативности, Бола, Муфанг соответственно, выполняемыми в координатных лупах этих тканей.

Теория тканей, образованных поверхностями разных размерностей, была построена в [2]. Как оказалось, непосредственно обобщить перечисленные конфигурации и тождества для тканей, образованных слоениями *разных* размерностей, невозможно, поскольку координатный группоид, определяемый такой тканью, не является, вообще говоря, квазигруппой. В [3], [4] обобщено понятие ассоциативности и конфигурации R для три-тканей $W(p,q,p+q-1)$, образованных слоениями размерностей p, q и $p+q-1$, а также для ткани $W(p,q,q)$, образованной слоениями размерностей p, q и q.

В данной работе по аналогии с классической теорией определяется левая три-ткань Бола $B_l(p,q,q)$, образованная слоениями размерностей p, q и q на дифференцируемом многообразии размерности $p+q$. Находятся необходимые и достаточные условия того, что ткань $W(p,q,q)$ является тканью $B_l(p,q,q)$, находятся структурные уравнения ткани $B_l(p,q,q)$, а также решается проблема эквивалентности для таких тканей. В заключение находится три-ткань $B_l(2,3,3)$ с максимально простым ненулевым тензором кривизны.

1. Структурные уравнения произвольной три-ткани $W(p,q,q)$ наиболее общего вида приведены в [5]:

$$\begin{aligned}
d\underset{1}{\omega}^\alpha &= \underset{1}{\omega}^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta + \mu^\alpha_{u\beta}\underset{1}{\omega}^u \wedge \underset{3}{\omega}^\beta - \mu^\alpha_{\beta\gamma}\underset{1}{\omega}^\beta \wedge \underset{1}{\omega}^\gamma,\\
d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^v \wedge \omega^u_v + \underset{1}{\omega}^\beta \wedge \omega^u_\beta,\\
d\underset{2}{\omega}^\alpha &= \underset{2}{\omega}^\beta \wedge \Theta^\alpha_\beta + \mu^\alpha_{\beta\gamma}\underset{2}{\omega}^\beta \wedge \underset{2}{\omega}^\gamma,
\end{aligned} \tag{1}$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\ldots = 1,2,\ldots,p$; $u,v,w,\ldots = p+1,p+2,\ldots,q$, величины $\mu^\alpha_{u\beta}$ и $\mu^\alpha_{\beta\gamma}$ кососимметричны по нижним индексам и образуют тензор кручения три-ткани $W(p,q,q)$ [2]. При этом слоение λ_1 определяется уравнениями $\underset{1}{\omega}^\alpha = 0$, $\underset{1}{\omega}^u = 0$, слоение λ_2 — уравнениями $\underset{2}{\omega}^\alpha = 0$, а слоение λ_3 — уравнениями $\underset{3}{\omega}^\alpha \equiv \underset{1}{\omega}^\alpha + \underset{2}{\omega}^\alpha = 0$.

Сложим первое и третье уравнения системы (1) и положим

$$\Theta^\alpha_\beta = \omega^\alpha_\beta + \frac{1}{2}\mu^\alpha_{u\beta}\underset{1}{\omega}^u + \mu^\alpha_{\beta\gamma}(-\underset{2}{\omega}^\gamma + \underset{3}{\omega}^\gamma).$$

Тогда уравнения (1) примут симметричный вид

$$\begin{aligned}
d\underset{3}{\omega}^\alpha &= \underset{3}{\omega}^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha+\underset{3}{\Theta}^\alpha,\\
d\underset{1}{\omega}^u &= \underset{1}{\omega}^v\wedge\omega_v^u+(\underset{3}{\omega}^\beta-\underset{2}{\omega}^\beta)\wedge\omega_\beta^u,\\
d\underset{2}{\omega}^\alpha &= \underset{2}{\omega}^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha+\underset{2}{\Theta}^\alpha,
\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
\underset{3}{\Theta}^\alpha &= \frac{1}{2}\mu^\alpha_{u\beta}\underset{1}{\omega}^u\wedge\underset{3}{\omega}^\beta+\mu^\alpha_{\beta\gamma}\underset{3}{\omega}^\beta\wedge\underset{2}{\omega}^\gamma,\\
\underset{2}{\Theta}^\alpha &= -\frac{1}{2}\mu^\alpha_{u\beta}\underset{1}{\omega}^u\wedge\underset{2}{\omega}^\beta+\mu^\alpha_{\beta\gamma}\underset{2}{\omega}^\beta\wedge\underset{3}{\omega}^\gamma.
\end{aligned}$$

2. Дифференцируя внешним образом уравнения (3), получим

$$\begin{gathered}
(d\omega_\beta^\alpha-\omega_\beta^\gamma\wedge\omega_\gamma^\alpha)\wedge\underset{3}{\omega}^\beta+d\underset{3}{\Theta}^\alpha+\underset{3}{\Theta}^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha=0,\\
(d\omega_v^u-\omega_v^w\wedge\omega_w^u)\wedge\underset{1}{\omega}^v+(d\omega_\beta^u-\omega_\beta^v\wedge\omega_v^u-\omega_\beta^\gamma\wedge\omega_\gamma^u)\wedge(\underset{3}{\omega}^\beta-\underset{2}{\omega}^\beta)+(\underset{3}{\Theta}^\beta-\underset{2}{\Theta}^\beta)\wedge\omega_\beta^u=0,\\
(d\omega_\beta^\alpha-\omega_\beta^\gamma\wedge\omega_\gamma^\alpha)\wedge\underset{2}{\omega}^\beta+d\underset{2}{\Theta}^\alpha+\underset{2}{\Theta}^\beta\wedge\omega_\beta^\alpha=0.
\end{gathered}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned}
d\omega_\beta^\alpha-\omega_\beta^\gamma\wedge\omega_\gamma^\alpha &= b^\alpha_{\beta\gamma\delta}\underset{2}{\omega}^\gamma\wedge\underset{3}{\omega}^\delta+\overline{b}^\alpha_{\beta\gamma u}\underset{2}{\omega}^\gamma\wedge\underset{1}{\omega}^u+\widetilde{b}^\alpha_{\beta\gamma u}\underset{3}{\omega}^\gamma\wedge\underset{1}{\omega}^w,\\
d\omega_v^u-\omega_v^w\wedge\omega_w^u &= b^u_{v\alpha\beta}\underset{2}{\omega}^\alpha\wedge\underset{3}{\omega}^\beta+\overline{b}^u_{v\alpha w}\underset{2}{\omega}^\alpha\wedge\underset{1}{\omega}^w+\widetilde{b}^u_{v\alpha w}\underset{3}{\omega}^\alpha\wedge\underset{1}{\omega}^w,\\
d\omega_\alpha^u-\omega_\alpha^v\wedge\omega_v^u-\omega_\alpha^\gamma\wedge\omega_\gamma^u &= b^u_{\alpha\beta\gamma}\underset{2}{\omega}^\beta\wedge\underset{3}{\omega}^\gamma+\overline{b}^u_{\alpha\beta v}\underset{2}{\omega}^\beta\wedge\underset{1}{\omega}^v+\widetilde{b}^u_{\alpha\beta v}\underset{3}{\omega}^\beta\wedge\underset{1}{\omega}^v.
\end{aligned}\tag{3}$$

Согласно [2] совокупность величин $b^\alpha_{\beta\gamma\delta}$, $\overline{b}^\alpha_{\beta\gamma u}$, $\widetilde{b}^\alpha_{\beta\gamma u}$, $b^u_{v\alpha\beta}$, $\overline{b}^u_{v\alpha w}$, $\widetilde{b}^u_{v\alpha w}$, $b^u_{\alpha\beta\gamma}$, $\overline{b}^u_{\alpha\beta v}$, $\widetilde{b}^u_{\alpha\beta v}$ образует тензор кривизны три-ткани $W(p,q,q)$.

3. Следуя [1], обобщим понятие эквивалентности для три-тканей $W(p,q,q)$.

Две ткани $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$, заданные соответственно на многообразиях M и $\widetilde{M}$ размерности $p+q$, назовем эквивалентными, если существует локальный диффеоморфизм $\Phi: M\to\widetilde{M}$, при котором слоения ткани $W(p,q,q)$ переходят в слоения ткани $\widetilde{W}(p,q,q)$.

Пусть отображение $\Phi: M\to\widetilde{M}$ переводит ткань $W(p,q,q)$ в эквивалентную ей ткань $\widetilde{W}(p,q,q)$. Это значит, что каждое из расслоений, образующих ткань $W(p,q,q)$, переходит в соответствующее расслоение ткани $\widetilde{W}(p,q,q)$. Поэтому базисные формы $\underset{3}{\widetilde{\omega}}^\alpha$, $\underset{2}{\widetilde{\omega}}^\alpha$ и $\underset{1}{\widetilde{\omega}}^u$ ткани $\widetilde{W}(p,q,q)$ выражаются через базисные формы $\underset{3}{\omega}^\alpha$, $\underset{2}{\omega}^\alpha$ и $\underset{1}{\omega}^u$ ткани $W(p,q,q)$ следующим образом:

$$\underset{3}{\widetilde{\omega}}^\alpha=A^\alpha_\beta\underset{3}{\omega}^\beta,\quad \underset{2}{\widetilde{\omega}}^\alpha=A^\alpha_\beta\underset{2}{\omega}^\beta,\quad \underset{1}{\widetilde{\omega}}^u=A^u_v\underset{1}{\omega}^v+A^u_\beta(\underset{3}{\omega}^\beta-\underset{2}{\omega}^\beta),$$

причем ранги матриц A^α_β, A^u_v и A^u_β являются максимальными. Отсюда следует, что выбором базиса в касательном пространстве $T_A(M)$, $A\in M$, можно привести эти уравнения к виду

$$\underset{3}{\widetilde{\omega}}^\alpha=\underset{3}{\omega}^\alpha,\quad \underset{2}{\widetilde{\omega}}^\alpha=\underset{2}{\omega}^\alpha,\quad \underset{1}{\widetilde{\omega}}^u=\underset{1}{\omega}^u.\tag{4}$$

Структурные уравнения ткани $\widetilde{W}(p,q,q)$ запишем в виде (3), (4), только входящие в них формы отметим "волной". Дифференцируя уравнения (5) и пользуясь структурными уравнениями, получим

$$\begin{aligned} \underset{3}{\omega}^{\beta} \wedge (\omega_{\beta}^{\alpha} - \widetilde{\omega}_{\beta}^{\alpha}) + \underset{3}{\Theta}^{\alpha} - \underset{3}{\widetilde{\Theta}}^{\alpha} = 0, \\ \underset{2}{\omega}^{\beta} \wedge (\omega_{\beta}^{\alpha} - \widetilde{\omega}_{\beta}^{\alpha}) + \underset{2}{\Theta}^{\alpha} - \underset{2}{\widetilde{\Theta}}^{\alpha} = 0, \\ \underset{1}{\omega}^{v} \wedge (\omega_{v}^{u} - \widetilde{\omega}_{v}^{u}) + (\underset{3}{\omega}^{\beta} - \underset{2}{\omega}^{\beta}) \wedge (\omega_{\beta}^{u} - \widetilde{\omega}_{\beta}^{u}) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \omega_{\beta}^{\alpha} = \widetilde{\omega}_{\beta}^{\alpha}, \quad \underset{3}{\Theta}^{\alpha} = \underset{3}{\widetilde{\Theta}}^{\alpha}, \quad \underset{2}{\Theta}^{\alpha} = \underset{2}{\widetilde{\Theta}}^{\alpha}, \\ \mu_{\beta\gamma}^{\alpha} = \widetilde{\mu}_{\beta\gamma}^{\alpha}, \quad \mu_{u\beta}^{\alpha} = \widetilde{\mu}_{u\beta}^{\alpha}, \\ \omega_{v}^{u} - \widetilde{\omega}_{v}^{u} = A_{vw}^{u} \underset{1}{\omega}^{w} + A_{v\beta}^{u} (\underset{3}{\omega}^{\beta} - \underset{2}{\omega}^{\beta}), \\ \omega_{\beta}^{u} - \widetilde{\omega}_{\beta}^{u} = A_{\beta v}^{u} \underset{1}{\omega}^{v} + A_{\beta\gamma}^{u} (\underset{3}{\omega}^{\gamma} - \underset{2}{\omega}^{\gamma}), \end{aligned} \tag{6}$$

причем величины A_{vw}^u, $A_{v\beta}^u$, $A_{\beta v}^u$ и $A_{\beta\gamma}^u$ удовлетворяют условиям

$$A_{v\beta}^u = A_{\beta v}^u, \quad A_{[vw]}^u = 0, \quad A_{[\beta\gamma]}^u = 0.$$

Покажем, что $\omega_v^u = \widetilde{\omega}_v^u$ и $\omega_\beta^u = \widetilde{\omega}_\beta^u$ (с точностью до допустимых преобразований). Как показывают уравнения (3), допустимыми преобразованиями для форм ω_v^u и ω_β^u являются следующие:

$$\begin{aligned} \omega_{v}^{u} = \overline{\omega}_{v}^{u} + B_{vw}^{u} \underset{1}{\omega}^{w} + B_{v\beta}^{u} (\underset{3}{\omega}^{\beta} - \underset{2}{\omega}^{\beta}), \\ \omega_{\beta}^{u} = \overline{\omega}_{\beta}^{u} + B_{\beta v}^{u} \underset{1}{\omega}^{v} + B_{\beta\gamma}^{u} (\underset{3}{\omega}^{\gamma} - \underset{2}{\omega}^{\gamma}), \end{aligned} \tag{7}$$

где величины B_{vw}^u, $B_{\beta\gamma}^u$, $B_{\beta v}^u$ симметричны по нижним индексам. Эти преобразования сохраняют вид структурных уравнений (3). Сравнивая соотношения (7) и (8), получаем $\overline{\omega}_v^u = \widetilde{\omega}_v^u$ и $\overline{\omega}_\beta^u = \widetilde{\omega}_\beta^u$ для заданных эквивалентных тканей $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$. Убирая черту из уравнений (4) и аналогичных им для тканей $\widetilde{W}(p,q,q)$, видим, что соответствующие тензоры кривизны совпадают. Доказана

Теорема 1. *Если ткани $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$ эквивалентны, то в соответствующих реперах их тензоры кручения и кривизны совпадают.*

Доказательство обратной теоремы проводится так же, как и доказательство аналогичной теоремы для классических три-тканей, образованных слоениями одинаковых размерностей [1]. Поэтому приведем только ее формулировку.

Теорема 2. *Пусть две три-ткани $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$ заданы соответственно на дифференцируемых многообразиях M и $\widetilde{M}$ размерности $p+q$, и существует локальный диффеоморфизм $\Phi : M \to \widetilde{M}$, а также гладкое поле линейных отображений $\Phi_A : R_A \to R_{\Phi(A)}$, где $A \in M$, R_A и $R_{\Phi(A)}$ — реперы в соответствующих точках. Если в соответствующих реперах тензоры кручения и кривизны тканей $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$ совпадают, то три-ткани $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$ эквивалентны.*

4. Зададим три-ткань $W(p,q,q)$ в локальных координатах уравнением

$$z = f(x, y), \tag{8}$$

где $z = (z^\alpha)$, $x = (x^i)$, $y = (y^\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, p$, $i = 1, 2, \ldots, q$, а ранги матриц $(\frac{\partial f}{\partial x})$ и $(\frac{\partial f}{\partial y})$ являются максимальными в каждой точке области определения. При этом слоения λ_1, λ_2, λ_3 ткани $W(p,q,q)$ определяются соответственно уравнениями

$$x = \mathrm{const}, \quad y = \mathrm{const}, \quad z = \mathrm{const}.$$

Уравнение (9) ткани $W(p,q,q)$, называемое также ее координатным группоидом, рассматривается как и в классической теории с точностью до допустимых (изотопических) преобразований, определяемых локальными диффеоморфизмами вида

$$\overline{x} = \alpha(x), \quad \overline{y} = \beta(y), \quad \overline{z} = \gamma(z).$$

Очевидно, ткани $W(p,q,q)$ и $\widetilde{W}(p,q,q)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их координатные группоиды изотопны.

Пусть функция f, определяющая ткань $W(p,q,q)$, удовлетворяет тождеству

$$f(x_1, f^{-1}(x_2, f(x_1, y))) = f(x_1 * x_2, y), \tag{9}$$

где $(*)$ — операция в некоторой квазигруппе Q, заданной на базе первого слоения (см. рисунок).

Можно показать, что такая ткань характеризуется замыканием конфигураций, аналогичных известной левой конфигурации Бола. Построение этих конфигураций проводится так же, как и построение конфигурации R на ткани $W(p,q,q)$ [6]. Назовем три-ткань $W(p,q,q)$, определяемую группоидом (9) со свойством (10), левой тканью Бола и обозначим $B_l(p,q,q)$.

Операция $(*)$ аналогична сердцевине классической ткани Бола [7]. Сердцевина $(*)$ индуцирует на первом слоении ткани $B_l(p,q,q)$ симметрии вида $S_{x_1}(x_2) = x_1 * x_2$, где слой x_1 фиксирован, а образом слоя x_2 будет общая трансверсаль $(q-p)$-мерных многообразий $V(A)$ при условии, что A пробегает вертикальный слой x_2. Указанные симметрии задают на базе первого слоения ткани $B_l(p,q,q)$ локально симметрическую структуру, а на многообразии самой ткани — точечное отображение φ, $\varphi(A) = V(A) \cap (x_1 * x_2)$.

Отображение φ возникает при фиксации вертикального слоя x_1. Соответствующий левый сдвиг L_{x_1} в координатном группоиде f вертикальные слои ткани переводит в вертикальные, а горизонтальные и наклонные слои ткани меняет местами. Следовательно, отображение φ является автоморфизмом ткани $B_l(p,q,q)$. При этом, поскольку оно порождается сдвигами координатного группоида, то его можно называть внутренним автоморфизмом.

В дифференциальной форме сдвиг L_{x_1} задается уравнениями

$$\underset{1}{\omega}^\alpha = 0, \quad \underset{1}{\omega}^u = 0.$$

Тогда соответствие между вторым и третьим слоениями задается уравнениями $\underset{3}{\omega}^\alpha = \underset{2}{\omega}^\alpha$, а точечное соответствие φ задается уравнениями

$$\underset{2}{\omega}^\alpha = \underset{3}{\overline{\omega}}^\alpha, \quad \underset{3}{\omega}^\alpha = \underset{2}{\overline{\omega}}^\alpha, \quad \underset{1}{\omega}^u = -\underset{1}{\overline{\omega}}^u.$$

Поскольку эти преобразования являются автоморфизмами, то они сохраняют вид структурных уравнений (3) и (4). Отсюда получаем следующие соотношения для компонентов тензора кривизны:

$$
\begin{gathered}
b^\alpha_{\beta(\gamma\delta)} = 0, \quad b^u_{v(\gamma\delta)} = 0, \quad b^u_{\beta(\gamma\delta)} = 0, \\
\overline{b}^\alpha_{\beta\gamma u} = -\widetilde{b}^\alpha_{\beta\gamma u}, \quad \overline{b}^u_{v\beta w} = -\widetilde{b}^u_{v\beta w}, \quad \overline{b}^u_{\alpha\beta v} = -\widetilde{b}^u_{\alpha\beta v}.
\end{gathered} \tag{10}
$$

Таким образом, окончательный вид дифференциальных продолжений (4) структурных уравнений (3) ткани $B_l(p,q,q)$ будет такой:

$$
\begin{gathered}
d\omega^\alpha_\beta - \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma = b^\alpha_{\beta\gamma\delta} \underset{2}{\omega}^\gamma \wedge \underset{3}{\omega}^\delta + b^\alpha_{\beta\gamma w}(\underset{2}{\omega}^\gamma - \underset{3}{\omega}^\gamma) \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\
d\omega^u_v - \omega^w_v \wedge \omega^u_w = b^u_{v\gamma\delta} \underset{2}{\omega}^\gamma \wedge \underset{3}{\omega}^\delta + b^u_{v\gamma w}(\underset{2}{\omega}^\gamma - \underset{3}{\omega}^\gamma) \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\
d\omega^u_\beta - \omega^v_\beta \wedge \omega^u_v - \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^u_\gamma = b^u_{\beta\gamma\delta} \underset{2}{\omega}^\gamma \wedge \underset{3}{\omega}^\delta + b^u_{\beta\gamma w}(\underset{2}{\omega}^\gamma - \underset{3}{\omega}^\gamma) \wedge \underset{1}{\omega}^w, \\
(d\omega^\alpha_\beta - \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma) \wedge \underset{3}{\omega}^\beta + d\underset{3}{\Theta}^\alpha + \underset{3}{\Theta}^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta = 0, \\
(d\omega^\alpha_\beta - \omega^\gamma_\beta \wedge \omega^\alpha_\gamma) \wedge \underset{2}{\omega}^\beta + d\underset{2}{\Theta}^\alpha + \underset{2}{\Theta}^\beta \wedge \omega^\alpha_\beta = 0,
\end{gathered}
$$

где

$$
b^\alpha_{\beta(\gamma\delta)} = 0, \quad b^u_{v(\beta\gamma)} = 0, \quad b^u_{\alpha(\beta\gamma)} = 0,
$$

и обозначено

$$
b^\alpha_{\beta\gamma w} = \overline{b}^\alpha_{\beta\gamma w}, \quad b^u_{v\beta w} = \overline{b}^u_{v\beta w}, \quad b^u_{\alpha\beta w} = \overline{b}^u_{\alpha\beta w}.
$$

Согласно теореме 2 полученные условия являются и достаточными для того, чтобы ткань $W(p,q,q)$ являлась тканью $B_l(p,q,q)$. Итак, справедлива

Теорема 3. *Ткань $W(p,q,q)$ на многообразии размерности $p+q$ является тканью Бола $B_l(p,q,q)$ тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны удовлетворяет условиям* (11).

Заметим, что аналогичное доказательство проходит и для классических три-тканей Бола $W(p,p,p)$. Оно принципиально отличается от доказательства в [8] и значительно проще последнего.

5. Приведем пример три-ткани $B_l(2,3,3)$, которая имеет единственную отличную от нуля компоненту тензора кривизны $b^1_{223} = b = \mathrm{const}$. Структурные уравнения такой ткани приводятся к виду

$$
\begin{gathered}
d\underset{3}{\omega}^1 = \underset{3}{\omega}^2 \wedge \omega^1_2 + \underset{3}{\Theta}^1, \quad d\underset{3}{\omega}^2 = 0, \quad d\underset{1}{\omega}^3 = 0, \\
d\underset{2}{\omega}^1 = \underset{2}{\omega}^2 \wedge \omega^1_2 + \underset{2}{\Theta}^1, \quad d\underset{2}{\omega}^2 = 0, \\
d\omega^1_2 = b(\underset{2}{\omega}^2 - \underset{3}{\omega}^2) \wedge \underset{1}{\omega}^3, \\
d\underset{3}{\Theta}^1 = -d\omega^1_2 \wedge \underset{3}{\omega}^2, \quad d\underset{2}{\Theta}^1 = -d\omega^1_2 \wedge \underset{2}{\omega}^2.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Эта система замкнута относительно внешнего дифференцирования. Последовательно интегрируя систему (12), найдем

$$
\begin{gathered}
\underset{3}{\omega}^1 = -\frac{1}{8} b (w^2)^2 du^3 + \frac{1}{8} u^3 d(w^2)^2 + dw^1, \\
\underset{1}{\omega}^3 = du^3, \quad \underset{3}{\omega}^2 = dw^2, \quad \underset{2}{\omega}^2 = dv^2, \\
\underset{2}{\omega}^1 = \frac{1}{8} b (v^2)^2 du^3 - \frac{1}{8} u^3 d(v^2)^2 + dv^1, \\
\omega^1_2 = \frac{1}{2} b v^2 w^2 du^3 - \frac{1}{2} b u^3 d(v^2 - w^2), \\
\underset{3}{\Theta}^1 = -\frac{1}{2} b (u^3 dv^2 - v^2 du^3) \wedge dw^2, \\
\underset{2}{\Theta}^1 = \frac{1}{2} b (u^3 dw^2 - w^2 du^3) \wedge dv^2,
\end{gathered}
$$

где w^1, w^2, u^3, v^1 и v^2 — локальные координаты.

Найдем уравнения слоений этой ткани. Слои третьего слоения рассматриваемой три-ткани $B_l(2,3,3)$ определяются уравнениями

$$\underset{3}{\omega}^1 = dw^1 - \frac{1}{8}b(w^2)^2du^3 + \frac{1}{8}u^3d(w^2)^2 = 0, \quad \underset{3}{\omega}^2 = dw^2 = 0.$$

Интегрируя их, получим

$$w^1 - \frac{1}{8}b(\overline{z}^2)^2u^3 = \overline{z}^1, \quad w^2 = \overline{z}^2,$$

где $\overline{z}^1$, $\overline{z}^2$ — первые интегралы системы. Аналогично найдем уравнения слоев второго слоения ткани. Они определяются уравнениями

$$\underset{2}{\omega}^1 = dv^1 + \frac{1}{8}b(v^2)^2du^3 - \frac{1}{8}u^3d(v^2)^2 = 0, \quad \underset{2}{\omega}^2 = dv^2 = 0.$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$v^1 + \frac{1}{8}b(\overline{y}^2)^2u^3 = \overline{y}^1, \quad v^2 = \overline{y}^2,$$

где $\overline{y}^1$, $\overline{y}^2$ — первые интегралы системы. Слои первого слоения три-ткани $B_l(2,3,3)$ определяются уравнениями

$$\underset{3}{\omega}^1 - \underset{2}{\omega}^1 = 0, \quad \underset{3}{\omega}^2 - \underset{2}{\omega}^2 = 0, \quad \underset{1}{\omega}^3 = 0,$$

или

$$dw^1 - \frac{1}{8}b(w^2)^2du^3 + \frac{1}{8}u^3d(w^2)^2 - dv^1 + \frac{1}{8}b(v^2)^2du^3 - \frac{1}{8}u^3d(v^2)^2 = 0,$$
$$dw^2 - dv^2 = 0, \quad du^3 = 0.$$

Интегрируя их, получим

$$w^1 - v^1 + \frac{1}{4}b\overline{x}^3(v^2)^2 = \overline{x}^1, \quad w^2 - v^2 = \overline{x}^2, \quad u^3 = \overline{x}^3,$$

где $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$, $\overline{x}^3$ — первые интегралы системы. Исключим локальные координаты из полученных уравнений слоений и проведем допустимые (изотопические) преобразования. В результате получим конечные уравнения рассматриваемой три-ткани в виде

$$z^1 = x^1 + y^1 - x^3y^2(x^2 + y^2), \quad z^2 = x^2 + y^2.$$

Найдем уравнения сердцевины $(*)$ этой ткани. Составим равенства (10). Они являются тождествами относительно y и связывают величины x_1, x_2 и $x_1 * x_2$. Проведя необходимые вычисления, получим искомые уравнения квазигруппы $Q(*)$:

$$\begin{aligned} c^1 &= 2a^1 - b^1 - (a^2 - b^2)(a^2(a^3 - b^3) + a^3(a^2 - b^2)), \\ c^2 &= 2a^2 - b^2, \quad c^3 = 2a^3 - b^3, \end{aligned} \tag{12}$$

где обозначено $c = x_1 * x_2$, $a = x_1$, $b = x_2$. Построим главный изотоп квазигруппы (13) — левую лупу Бола с единицей $e(0,0,0)$:

$$w^1 = u^1 + v^1 - u^3v^2(u^2 + v^2),$$
$$w^2 = u^2 + v^2, \quad w^3 = u^3 + v^3.$$

Заметим, что квазигруппа, левая обратная квазигруппе (13), изотопна средней лупе Бола, уравнения которой найдены в работе [9].

Литература

1. Akivis M.A., Shelekhov A.M. *Algebra and geometry of multidimensional three-webs.* – Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 1992. – 358 p.
2. Акивис М.А., Гольдберг В.В. *О многомерных три-тканях, образованных поверхностями разных размерностей* // ДАН СССР. – 1972. – Т. 203. – № 2. – С. 263–266.
3. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *О три-тканях $W(p, q, p + q - 1)$, на которых замыкаются обобщенные конфигурации Рейдемейстера.* – Тверск. гос. ун-т. – М., 2001. – 46 с. – Деп. в ВИНИТИ. № 1868-В01.
4. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *Обобщенная ассоциативность в гладких группоидах* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 383. – № 1. – С. 32–33.
5. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *Вложение три-ткани, определяемой группой преобразований, в групповую три-ткань.* – Тверск. гос. ун-т. – М., 2003. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ. № 880-В03.
6. Толстихина Г.А., Шелехов А.М. *Три-ткани, определяемые группами преобразований* // Докл. РАН. – 2002. – Т. 385. – № 4. – С. 1–3.
7. Белоусов В.Д. *Основы теории квазигрупп и луп.* – М.: Наука, 1967. – 223 с.
8. Федорова В.И. *Об условии, определяющем многомерные три-ткани Боля* // Сиб. матем. журн. – 1987. – Т.19. – № 4. – С. 922–926.
9. Федорова В.И. *Шестимерные три-ткани Боля с симметричным тензором a_{ij}* // Ткани и квазигруппы. – Калинин, 1981. – С. 110–123.

Тверской государственный университет

Поступила 04.06.2004