ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2006 МАТЕМАТИКА № 3 (526)

УДК 571.988:532

М.В. ТУРБИН

О КОРРЕКТНОЙ ПОСТАНОВКЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ КЕЛЬВИНА–ФОЙГТА

Введение

Известно [1], что движение несжимаемой жидкости в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на промежутке времени $[0, T]$, $T > 0$, описывается следующей системой уравнений в форме Коши:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \operatorname{grad} p = \operatorname{Div} \sigma + f, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \tag{0.1}$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]. \tag{0.2}$$

Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам. В данной системе $v(x,t)$ — вектор скорости частицы в точке x в момент времени t и $v_1, \dots, v_n$ — компоненты v; $p = p(x,t)$ — давление жидкости в точке x в момент времени t; $f = f(x,t)$ — вектор внешних сил (их также называют объемными), действующих на жидкость. Через $\operatorname{Div} \sigma$ обозначен вектор, координаты которого являются дивергенцией строк матрицы $\sigma = (\sigma_{ij}(x))$, где σ — девиатор тензора напряжений. Введение в уравнение (0.1) девиатора тензора напряжений имеет целью учет реакций, возникающих в жидкости в процессе ее движения. Система (0.1), (0.2) описывает течение всех видов жидкости, но при этом она содержит девиатор тензора напряжений, который явно не выражен через неизвестные этой системы. Чтобы выразить девиатор тензора напряжений через неизвестные системы (0.1), (0.2), как правило, используют соотношения между девиатором тензора напряжений, тензором скоростей деформаций

$$\mathcal{E}_{ij} = \mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

и их производными. Отметим, что устанавливая связь между девиатором тензора напряжений, тензором скоростей деформаций и их производными, тем самым устанавливаем тип жидкости. Такое соотношение называют определяющим или реологическим соотношением. Реологические соотношения относятся к разряду гипотез, которые должны подтверждаться для конкретных жидкостей экспериментальными данными.

В течение последних полутора столетий основным объектом исследования математиков в области гидродинамики является модель ньютоновской жидкости. Ее реологическое соотношение имеет вид $\sigma = 2\nu\mathcal{E}$, где ν — кинематический коэффициент вязкости. Если мы подставим это соотношение в (0.1), (0.2), то получим хорошо известную систему уравнений Навье–Стокса. Она описывает течение при умеренных скоростях большинства встречающихся на практике вязких несжимаемых жидкостей. Но уже в середине XIX века стали известны такие жидкости, которые не подчиняются ньютоновскому определяющему соотношению. Таковыми являются, например, жидкости, в которых после прекращения движения напряжения не обращаются мгновенно в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (№ 04-01-00081) и Министерства образования Российской Федерации и CRDF (№ VZ -010-0).

нуль, а спадают по некоторому закону, т. е. имеет место релаксация напряжений; а также жидкости, в которых после снятия напряжений движение не прекращается мгновенно, а затухает по некоторому закону, т. е. имеет место запаздывание деформаций; и жидкости, в которых имеют место оба этих эффекта.

Впервые модели таких жидкостей были предложены в XIX веке Дж. Максвеллом, В. Кельвином и В. Фойгтом и были развиты в середине XX века в значительной степени благодаря работам Дж.Г. Олдройта. Одной из таких моделей является модель Кельвина–Фойгта, уравнение состояния для которой имеет вид

$$\sigma = 2\nu\left(\mathcal{E} + \varkappa\nu^{-1}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}\right), \quad \varkappa, \nu > 0.$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, $\varkappa$ — время запаздывания. Данная модель изучалась во многих работах [2]–[4]. В [4] было показано, что математическая модель движения жидкости Кельвина–Фойгта описывает течение вязкой неньютоновской жидкости, которой требуется время, чтобы прийти в движение под действием внезапно приложенной силы.

В дальнейшем была построена феноменологическая теория линейных вязкоупругих жидкостей. В основе этой теории лежит предположение — принцип суперпозиции Л. Больцмана — о том, что все воздействия на среду независимы и аддитивны, а реакции среды на внешние воздействия линейны. Достаточно широкий для практических приложений класс линейных вязкоупругих жидкостей представляют жидкости с конечным числом дискретно распределенных времен релаксации и времен запаздывания. К таким жидкостям относятся эмульсии и суспензии одной ньютоновской жидкости в другой, сильно разбавленные суспензии твердых частиц в ньютоновской жидкости, некоторые полимерные растворы ([5], с. 101–103).

Одна из таких моделей по аналогии с моделью Кельвина–Фойгта была названа обобщенной математической моделью Кельвина–Фойгта (порядка $L = 1, 2\dots$). Она описывается следующим определяющим соотношением:

$$\left(1 + \sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\sigma = 2\left(\nu + \sum_{i=1}^{L+1}\varkappa_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\right)\mathcal{E}, \quad \varkappa_{L+1}, \lambda_L > 0. \tag{0.3}$$

Здесь λ_i — времена релаксации, ν — кинематический коэффициент вязкости, а коэффициенты $\varkappa_i$ — времена запаздывания.

Для того чтобы выразить девиатор тензора напряжений σ из данного реологического соотношения, нам нужны начальные условия на σ, тензор скоростей деформаций $\mathcal{E}$ и их производные по времени

$$\left.\frac{\partial^i\mathcal{E}}{\partial t^i}\right|_{t=0}(x) = \varepsilon_i(x), \quad x \in \Omega, \ \ i = 0, \dots, L;$$
$$\left.\frac{\partial^i\sigma}{\partial t^i}\right|_{t=0}(x) = b_i(x), \quad x \in \Omega, \ \ i = 0, \dots, L-1.$$

Если они известны, то после применения преобразования Лапласа по переменной t к (0.3) получим

$$\sigma(x,t) = 2\mu_2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t) + 2\mu_1\mathcal{E}(x,t) + 2\int_0^t \beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(x,s)\,ds + \varrho_i\,e^{\alpha_i t}, \quad \mu_2 = \frac{\varkappa_{L+1}}{\lambda_L} > 0,$$

где предполагается, что

α_i $(i = 1, \dots, L)$ — корни многочлена $Q(p) = 1 + \sum\limits_{i=1}^{L}\lambda_i p^i$ вещественны, различны и отрицательны;

β_i $(i = 1, \dots, L)$ — числа, зависящие от коэффициентов реологического соотношения (0.3);

ϱ_i $(i = 1, \dots, L)$ — известные функции, зависящие от коэффициентов реологического соотношения (0.3) и начальных условий.

Впервые это соотношение было выведено в [6] при предположении, что $\varepsilon_i = 0$, $b_j = 0$ ($i = 0, \dots, L$; $j = 0, \dots, L-1$). В этом случае все $\varrho_i \equiv 0$ ($i = 1 \dots L$). А в [7] данное соотношение было получено при произвольных начальных условиях.

В [6] и [7] рассматривались начально-краевые задачи для системы уравнений, полученной подстановкой данного соотношения в систему уравнений движения жидкости в форме Коши. При этом в указанных работах не проверяется, что полученное решение начально-краевой задачи будет удовлетворять начальным условиям на σ, $\mathcal{E}$ и на их производные. Однако отметим, что начальные условия должны удовлетворять системе уравнений (0.1), (0.2), иначе решение с такими начальными условиями также не будет им удовлетворять.

В данной статье будет показано, каким способом и при каких условиях могут быть корректно поставлены начально-краевые задачи для обобщенной математической модели движения жидкости Кельвина–Фойгта произвольного порядка $L = 1, 2, \dots$ А именно, будут введены так называемые условия согласования, которым должны удовлетворять начальные условия. С учетом этих условий будут предложены две различные корректные постановки начально-краевых задач для обобщенной модели Кельвина–Фойгта произвольного порядка $L = 1, 2, \dots$ Ранее для данной модели изучались только сильные решения и в гладких областях. В данной же работе получены теоремы существования и единственности слабых решений в областях с негладкой, а только локально-липшицевой границей.

1. Две корректные постановки начально-краевых задач

Изучается движение жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с локально-липшицевой границей $\partial\Omega$ на промежутке времени $[0, T]$, $T > 0$. Как уже было сказано, оно описывается системой уравнений (0.1), (0.2). Предполагается, что жидкость удовлетворяет реологическому соотношению (0.3) для обобщенной модели Кельвина–Фойгта.

1.1. *Первая постановка.* Для системы (0.1)–(0.3) рассмотрим начально-краевую задачу с начальными условиями

$$\left.\frac{\partial^i v}{\partial t^i}\right|_{t=0}(x) = a_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 0, \dots, L; \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^i \sigma}{\partial t^i}\right|_{t=0}(x) = b_i(x), \quad x \in \Omega, \quad i = 0, \dots, L-1, \tag{1.2}$$

и граничным условием

$$v|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0. \tag{1.3}$$

Зададим начальные условия на $\frac{\partial^i v}{\partial t^i}$ ($i = 0, \dots, L$), а не на $\frac{\partial^i \mathcal{E}}{\partial t^i}$, поскольку, зная первые, можно вычислить вторые.

Для того чтобы ввести понятие слабого решения для начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.1)–(1.3), потребуются некоторые функциональные пространства.

Обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ пространство функций на Ω со значениями в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞ с компактным носителем, содержащимся в Ω; $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)^n$ — замыкание множества $\mathfrak{D}(\Omega)^n$ по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$; $X = \{v : v \in \mathfrak{D}(\Omega)^n, \operatorname{div} v = 0\}$ — множество соленоидальных функций; H — замыкание X по норме пространства $L_2(\Omega)^n$; V — замыкание X по норме пространства $W_2^1(\Omega)^n$ со скалярным произведением $((v, w)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial w}{\partial x_i}\right)$, где $(\cdot\,,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\Omega)^n$.

Норма, порождаемая этим скалярным произведением в пространстве V, обозначается $\|\cdot\|_V$ и эквивалентна норме, индуцированной из пространства $W_2^1(\Omega)^n$.

Через V^* обозначим пространство, сопряженное пространству V, а через $\langle f, v\rangle$ — действие функционала $f \in V^*$ на элемент $v \in V$. Пусть $\mathbb{R}^{n\times n}$ — пространство матриц $n \times n$ со скалярным произведением

$$(A, B)_{\mathbb{R}^{n\times n}} = A : B = A_{ij}B_{ij},$$

$\mathbb{R}^{n\times n}_S$ — подпространство симметричных матриц из $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Предположим, что $f \in C^L([0,T], V^*)$, $a_i \in V$, $b_j \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}_S)$, $i = 0, \dots, L$, $j = 0, \dots, L-1$.

Определение 1.1. Слабым решением начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.1)–(1.3) называется пара функций

$$v \in C^{L+1}([0,T], V), \quad \sigma \in C^L([0,T], L_2(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}_S)),$$

удовлетворяющая для любого $\varphi \in V$ и всех $t \in [0,T]$ равенствам

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\, dx - \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \sigma : \nabla\varphi\, dx + \langle f, \varphi\rangle, \tag{1.4}$$

$$\Big(1 + \sum_{i=1}^{L} \lambda_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\Big)\sigma = 2\Big(\nu + \sum_{i=1}^{L+1} \varkappa_i \frac{\partial^i}{\partial t^i}\Big)\mathcal{E} \tag{1.5}$$

и начальным условиям (1.1), (1.2).

В следующей лемме приведем условия, при выполнении которых начально-краевая задача (0.1)–(0.3), (1.1)–(1.3) корректно поставлена.

Лемма 1.1. *Если пара v, σ — слабое решение начально-краевой задачи* (0.1)–(0.3), (1.1)–(1.3), *то функции a_i и b_j $(i = 0, \dots, L, \quad j = 0, \dots, L-1)$ удовлетворяют системе*

$$\begin{aligned} \int_\Omega a_1\,\varphi\, dx - \int_\Omega (a_0)_i (a_0)_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\, dx &= -\int_\Omega b_0 : \nabla\varphi\, dx + \langle f\big|_{t=0}, \varphi\rangle, \\ \int_\Omega a_2\,\varphi\, dx - \int_\Omega \big((a_1)_i(a_0)_j + (a_0)_i(a_1)_j\big) \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\, dx &= -\int_\Omega b_1 : \nabla\varphi\, dx + \Big\langle \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0}, \varphi\Big\rangle, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \int_\Omega a_L\,\varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{m=0}^{L-1} C_k^m (a_m)_i (a_{k-m})_j \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\, dx &= -\int_\Omega b_{L-1} : \nabla\varphi\, dx + \Big\langle \frac{\partial^{L-1} f}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0}, \varphi\Big\rangle. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Доказательство. Поскольку пара v, σ по условию леммы является слабым решением начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.1)–(1.3), то она для любого $\varphi \in V$ и всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет (1.4). Отсюда при $t = 0$ получим равенство, которое является первым в системе (1.6).

Для получения k-го равенства ($k = 2, \dots, L$) достаточно продифференцировать равенство (1.4) $k-1$ раз и рассмотреть значение полученного равенства в нуле. □

Условия (1.6) называются условиями согласования.

Из доказательства леммы следует, что начальные условия (1.1) и (1.2) нужно выбирать таким образом, чтобы они удовлетворяли условиям согласования (1.6), поскольку, если существует решение, оно необходимо им удовлетворяет. Действительно, напряжения и скорости деформаций в жидкости взаимосвязаны и зависят также от внешних сил. Таким образом, определенным значениям скоростей деформаций в жидкости и внешних сил, действующих на жидкость, соответствуют только определенные значения напряжений, которые не могут выбираться произвольным образом.

В § 2 будет доказана

Теорема 1.1. *При $f \in C^L([0,T], V^*)$ и $a_i \in V$, $b_j \in L_2(\Omega, \mathbb{R}^{n\times n}_S)$, $i{=}1, \dots, L$, $j{=}1, \dots, L-1$, удовлетворяющих условиям согласования* (1.6), *существует единственное слабое решение начально-краевой задачи* (0.1)–(0.3), (1.1)–(1.3).

1.2. *Вторая постановка.* Как видно из предыдущего пункта, не нужно задавать одновременно и начальные условия (1.1), и начальные условия (1.2). Можно задать только часть этих начальных условий, а недостающие найти из условий согласования (1.6). А именно, рассмотрим для системы (0.1)–(0.3) начально-краевую задачу с начальными условиями (1.2) и

$$v\,|_{t=0}\,(x) = a_0(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.7}$$

и граничным условием (1.3).

Предположим, что $f \in C^L([0,T],V^*)$, $a_0 \in V$, $b_i \in L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n})$, $i = 0,\dots,L-1$.

Определение 1.2. Слабым решением начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.2), (1.7), (1.3) называется пара функций

$$v \in C^{L+1}([0,T],V), \quad \sigma \in C^L([0,T],L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n})),$$

удовлетворяющая для любого $\varphi \in V$ и всех $t \in [0,T]$ равенствам (1.4), (1.5) и начальным условиям (1.2), (1.7).

Отметим, что для начальных условий на слабое решение начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.2), (1.7), (1.3) имеет место следующая система уравнений:

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi\,dx - \int_\Omega (a_0)_i(a_0)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega b_0 : \nabla\varphi\,dx + \langle f|_{t=0},\varphi\rangle,\\
\int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big|_{t=0}\varphi\,dx - \int_\Omega\left(\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)_i(a_0)_j + (a_0)_i\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)_j\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega b_1:\nabla\varphi dx + \Big\langle\frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0},\varphi\Big\rangle,\\
\dots\dots\dots\\
\int_\Omega\frac{\partial^L v}{\partial t^L}\Big|_{t=0}\varphi\,dx - \int_\Omega\sum_{m=1}^{L-2}C_k^m\left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\Big|_{t=0}\right)_i\left(\frac{\partial^{k-m}v}{\partial t^{k-m}}\Big|_{t=0}\right)_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx -\\
-\int_\Omega\left(\left(\frac{\partial^{L-1}v}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0}\right)_i(a_0)_j + (a_0)_i\left(\frac{\partial^{L-1}v}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0}\right)_j\right)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega b_{L-1}:\nabla\varphi\,dx + \Big\langle\frac{\partial^{L-1}f}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0},\varphi\Big\rangle.
\end{gathered}\tag{1.8}$$

Аналогично предыдущему пункту, если пара v, σ является слабым решением начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.2), (1.7), (1.3), то она удовлетворяет (1.8). Если рассмотреть (1.8) как систему уравнений относительно $\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\big|_{t=0}$, $k = 1,\dots,L$, то она имеет единственное решение $a_k \in V$, $k = 1,\dots,L$, которое можно найти следующим образом.

Из первого уравнения системы (1.8) выразим $\frac{\partial v}{\partial t}\big|_{t=0}$ и обозначим полученное выражение через a_1. Так как $v \in C^{L+1}([0,T],V)$, имеем $a_1 \in V$. Теперь подставим уже известное a_1 во второе уравнение и получим $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\big|_{t=0}$. Обозначим его через a_2. Как и ранее, $a_2 \in V$, поскольку $v \in C^{L+1}([0,T],V)$. И так далее.

Таким образом, в качестве решения системы (1.8) получим начальные условия на $\frac{\partial^k v}{\partial t^k}$, $k = 1,\dots,L$. То есть, если пара v, σ — решение, то она удовлетворяет начальным условиям

$$\frac{\partial^k v}{\partial t^k}\Big|_{t=0} = a_k \in V, \quad k = 1,\dots,L. \tag{1.9}$$

Однако стоит отметить, что не при любых f, a_0 и b_i, $i = 0,\dots,L-1$, решение системы (1.8) принадлежит V. А поскольку (1.9) является необходимым условием существования слабого решения начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.2), (1.7), (1.3), то, следовательно, данная задача имеет решение не при всех начальных условиях f, a_0 и b_i, $i = 0,\dots,L-1$.

В § 2 будет доказана

Теорема 1.2. *При правой части $f \in C^L([0,T],V^*)$ и начальных условиях $a_0 \in V$, $b_i \in L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n})$, $i = 0,\dots,L-1$, таких, что решение системы* (1.8) *принадлежит V, существует единственное слабое решение начально-краевой задачи* (0.1)–(0.3), (1.2), (1.7), (1.3).

2. Доказательство теорем 1.1, 1.2

Приведем доказательство теоремы 1.2. Теорема 1.1 доказывается абсолютно аналогично.

Первый этап. Выразим σ из (1.5). А именно, применим преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ по переменной t к (1.5):

$$\mathcal{L}\Big(1+\sum_{i=1}^{L}\lambda_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\Big)\sigma(x,t)=\mathcal{L}\Big(2\nu+2\sum_{i=1}^{L+1}\varkappa_i\frac{\partial^i}{\partial t^i}\Big)\mathcal{E}(x,t). \tag{2.1}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{L}\sigma(x,t)=\widehat{\sigma}(x,p)=\int_0^\infty e^{-pt}\sigma(x,t)dt,\quad \mathcal{L}\mathcal{E}(x,t)=\widehat{\mathcal{E}}(x,p)=\int_0^\infty e^{-pt}\mathcal{E}(x,t)dt,$$

$$\varepsilon_i=\frac{\partial^i\mathcal{E}}{\partial t^i}(x,0)=\mathcal{E}(a_i),\quad i=0,\dots,L,$$

$$\lambda_0=1,\quad \mu_1=\frac{\varkappa_L}{\lambda_L}-\frac{\varkappa_{L+1}\lambda_{L-1}}{\lambda_L^2},\quad \mu_2=\frac{\varkappa_{L+1}}{\lambda_L}>0,$$

$$C(p)=\sum_{i=1}^{L-1}(\varkappa_i-\mu_2\lambda_{i-1}-\mu_1\lambda_i)p^i-\mu_1+\nu,$$

$$\vartheta(p)=2\varepsilon_0\Big(\mu_2\sum_{j=0}^{L-1}\lambda_jp^j-\sum_{j=1}^{L}\varkappa_jp^{j-1}\Big)+\sum_{i=0}^{L-1}b_i\sum_{j=i+1}^{L}\lambda_jp^{j-i-1}-2\sum_{i=1}^{L}\varepsilon_i\sum_{j=i+1}^{L+1}\varkappa_jp^{j-i-1}.$$

При помощи свойств преобразования Лапласа (см., напр., [8]), произведя элементарные преобразования, из (2.1) найдем

$$\widehat{\sigma}(x,p)=2\mu_2p\,\widehat{\mathcal{E}}(x,p)-2\mu_2\varepsilon_0+2\mu_1\widehat{\mathcal{E}}(x,p)+2\frac{C(p)}{Q(p)}\widehat{\mathcal{E}}(x,p)+\frac{\vartheta(p)}{Q(p)}. \tag{2.2}$$

Применив к обеим частям (2.2) обратное преобразование Лапласа $\mathcal{L}^{-1}$, получим

$$\sigma(x,t)=2\mu_2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)+2\mu_1\mathcal{E}(x,t)+2\int_0^t\sum_{i=1}^{L}\frac{C(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}e^{\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(x,s)\,ds+\sum_{i=1}^{L}\frac{\vartheta(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}e^{\alpha_it},$$

где α_i $(i=1,\dots,L)$ — корни многочлена $Q(p)$. Используя для краткости обозначения $\beta_i=\frac{C(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$, $\varrho_i=\frac{\vartheta(\alpha_i)}{Q'(\alpha_i)}$, имеем

$$\sigma(x,t)=2\mu_2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)+2\mu_1\mathcal{E}(x,t)+2\int_0^t\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(x,s)\,ds+\varrho_i\,e^{\alpha_it}. \tag{2.3}$$

Второй этап. На первом этапе было показано, что пара функций $v\in C^{L+1}([0,T],V)$, $\sigma\in C^L([0,T],L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n}))$, являющаяся решением нашей исходной задачи, будет решением задачи (1.4), (2.3), (1.7):

$$\begin{gathered}\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx-\int_\Omega v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx=-\int_\Omega\sigma:\nabla\varphi\,dx+\langle f,\varphi\rangle\quad\forall\varphi\in V,\quad t\in[0,T],\\ \sigma(x,t)=2\mu_2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)+2\mu_1\mathcal{E}(x,t)+2\int_0^t\beta_ie^{\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(x,s)\,ds+\varrho_i\,e^{\alpha_it}\quad\forall t\in[0,T],\\ v(0)=a_0.\end{gathered} \tag{2.4}$$

Покажем, что полученная задача (2.4) будет эквивалентна исходной. Для этого достаточно показать, что решение (2.4) будет удовлетворять начальным условиям (1.2), (1.9).

Лемма 2.1. *Если пара функций $v\in C^{L+1}([0,T],V)$, $\sigma\in C^L([0,T],L_2(\Omega,\mathbb{R}_S^{n\times n}))$ является решением (2.4), то она удовлетворяет начальным условиям (1.2), (1.9).*

Доказательство. Заметим, что если $v \in C^{L+1}([0,T],V)$, $\sigma \in C^L([0,T],L_2(\Omega,\mathbb{R}^{n\times n}_S))$ — решение (2.4), то для начальных условий на v и σ имеет место следующая система уравнений:

$$
\begin{gathered}
\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi\, dx - \int_\Omega (a_0)_i (a_0)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \sigma(0) : \nabla\varphi\, dx + \langle f(0),\varphi\rangle,\\
\int_\Omega \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\Big|_{t=0} \varphi\, dx - \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)_i (a_0)_j + (a_0)_i\left(\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}\right)_j\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega \frac{\partial \sigma}{\partial t}\Big|_{t=0} : \nabla\varphi\, dx + \Big\langle \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{t=0},\varphi\Big\rangle,\\
\cdots\cdots\cdots\\
\int_\Omega \frac{\partial^L v}{\partial t^L}\Big|_{t=0} \varphi\, dx - \int_\Omega \sum_{m=1}^{L-2} C_k^m \left(\frac{\partial^m v}{\partial t^m}\Big|_{t=0}\right)_i \left(\frac{\partial^{k-m} v}{\partial t^{k-m}}\Big|_{t=0}\right)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx - \qquad (2.5)\\
- \int_\Omega \left(\left(\frac{\partial^{L-1} v}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0}\right)_i (a_0)_j + (a_0)_i \left(\frac{\partial^{L-1} v}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0}\right)_j\right)\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx =\\
= -\int_\Omega \frac{\partial^{L-1}\sigma}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0} : \nabla\varphi\, dx + \Big\langle \frac{\partial^{L-1} f}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0},\varphi\Big\rangle,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\sigma(0) = 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\Big|_{t=0} + 2\mu_1 \mathcal{E}(a_0) + \sum_{i=1}^L \varrho_i,\\
\frac{\partial \sigma}{\partial t}\Big|_{t=0} = 2\mu_2 \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}\Big|_{t=0} + 2\mu_1 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\Big|_{t=0} + 2\sum_{i=1}^L \beta_i \mathcal{E}(a_0) + \sum_{i=1}^L \alpha_i \varrho_i,\\
\cdots\cdots\cdots\\
\frac{\partial^{L-1}\sigma}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0} = 2\mu_2 \frac{\partial^L \mathcal{E}}{\partial t^L}\Big|_{t=0} + 2\mu_1 \frac{\partial^{L-1} \mathcal{E}}{\partial t^{L-1}}\Big|_{t=0} + 2\sum_{i=1}^L \beta_i \sum_{j=0}^{L-2} \alpha_i^{L-2-j} \frac{\partial^j \mathcal{E}}{\partial t^j}\Big|_{t=0} + \sum_{i=1}^L \alpha_i^{L-1} \varrho_i.
\end{gathered}
$$

Покажем, что эта система уравнений имеет единственное решение, а именно

$$a_i,\quad b_j,\quad i = 0,\dots,L,\quad j = 0,\dots,L-1.$$

Предположим противное. Пусть существуют два решения:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^i v_1}{\partial t^i}\Big|_{t=0},\quad \frac{\partial^j \sigma_1}{\partial t^j}\Big|_{t=0},\quad i = 1,\dots,L,\quad j = 0,\dots,L-1,\\
\frac{\partial^i v_2}{\partial t^i}\Big|_{t=0},\quad \frac{\partial^j \sigma_2}{\partial t^j}\Big|_{t=0},\quad i = 1,\dots,L,\quad j = 0,\dots,L-1.
\end{gathered}
$$

Введем следующие обозначения:

$$\omega_i = \frac{\partial^i v_1}{\partial t^i}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^i v_2}{\partial t^i}\Big|_{t=0},\quad \chi_j = \frac{\partial^j \sigma_1}{\partial t^j}\Big|_{t=0} - \frac{\partial^j \sigma_2}{\partial t^j}\Big|_{t=0},\quad i = 1,\dots,L,\quad j = 0,\dots,L-1.$$

Первый шаг. Покажем, что

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial v_2}{\partial t}\Big|_{t=0} = a_1,\quad \sigma_1(0) = \sigma_2(0) = b_0.$$

Для этого вычтем из первого и $(L+1)$-го равенств системы (2.5) для первого решения, первое и $(L+1)$-е равенства системы (2.5) для второго решения. Тогда для ω_1 и χ_0 имеют место два равенства:

$$
\begin{gathered}
\int_\Omega \omega_1\, \varphi\, dx = -\int_\Omega \chi_0 : \nabla\varphi\, dx,\\
\chi_0 = 2\mu_2 \mathcal{E}(\omega_1).
\end{gathered}
$$

Отсюда получим

$$\int_\Omega \omega_1\,\varphi\,dx = -\mu_2\int_\Omega \nabla\omega_1 : \nabla\varphi\,dx. \tag{2.6}$$

И это равенство имеет место при всех $\varphi\in V$, в частности, и при $\varphi=\omega_1$. Отсюда $\|\omega_1\|^2_{L_2(\Omega)^n} + \|\omega_1\|^2_V = 0$. Таким образом, уравнение (2.6) имеет единственное решение $\omega_1\equiv 0$. А отсюда следует, что $\chi_0 = 2\mu_2\mathcal{E}(\omega_1) = 2\mu_2\mathcal{E}(0)\equiv 0$. То есть мы доказали, что $\frac{\partial v_1}{\partial t}\big|_{t=0} = \frac{\partial v_2}{\partial t}\big|_{t=0}$, $\sigma_1(0)=\sigma_2(0)$. В силу того, что у системы (2.5) существует решение, а именно

$$a_i,\quad b_j,\quad i=0,\dots,L,\quad j=0,\dots,L-1,$$

получим $\frac{\partial v}{\partial t}\big|_{t=0} = a_1$, $\sigma(0)=b_0$.

Второй шаг. Покажем, что

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = a_2,\quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\bigg|_{t=0} = b_1.$$

Для этого вычтем из второго и $(L+2)$-го равенств системы (2.5) для первого решения, второе и $(L+2)$-е равенства системы (2.5) для второго решения. Тогда для ω_2 и χ_1 имеем $\int\limits_\Omega \omega_2\,\varphi\,dx = -\int\limits_\Omega \chi_1 : \nabla\varphi\,dx$, $\chi_1 = 2\mu_2\mathcal{E}(\omega_2)$. Отсюда $\int\limits_\Omega \omega_2\,\varphi\,dx = -\mu_2\int\limits_\Omega \nabla\omega_2 : \nabla\varphi\,dx$.

Как уже было сказано на первом шаге, это равенство имеет единственное решение $\omega_2\equiv 0$. А отсюда получаем $\chi_1 = 2\mu_2\mathcal{E}(\omega_2) = 2\mu_2\mathcal{E}(0)\equiv 0$. Таким образом, показано

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}\bigg|_{t=0},\quad \frac{\partial\sigma_1}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \frac{\partial\sigma_2}{\partial t}\bigg|_{t=0}.$$

В силу того, что у системы (2.5) существует решение

$$a_i,\quad b_j,\quad i=0,\dots,L,\quad j=0,\dots,L-1,$$

получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\bigg|_{t=0} = a_2,\quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}\bigg|_{t=0} = b_1.$$

И так далее. Повторяя этот процесс, после L-го шага получим

$$\frac{\partial^i v}{\partial t^i}\bigg|_{t=0} = a_i,\quad \frac{\partial^j\sigma}{\partial t^j}\bigg|_{t=0} = b_j,\quad i=1,\dots,L,\quad j=0,\dots,L-1,$$

что и завершает доказательство данной леммы.

Таким образом, показано, что исходная задача эквивалентна (2.4), которая в свою очередь эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{gathered}
\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int_\Omega v_i v_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_2\int_\Omega \nabla\frac{\partial v}{\partial t} : \nabla\varphi\,dx + \mu_1\int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\,dx + \\
+\int_0^t \beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\int_\Omega \nabla v(s) : \nabla\varphi\,dx\,ds = \langle f,\varphi\rangle + \int_\Omega \varrho_i\,e^{\alpha_i t}\varphi\,dx \quad \forall\varphi\in V,\quad t\in[0,T], \\
\sigma(x,t) = 2\mu_2\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t) + 2\mu_1\mathcal{E}(x,t) + 2\int_0^t \beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(x,s)\,ds + \varrho_i\,e^{\alpha_i t}\quad \forall t\in[0,T], \\
v(0) = a_0.
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Задача

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\varphi\,dx - \int_\Omega v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_2 \int_\Omega \nabla\frac{\partial v}{\partial t} : \nabla\varphi\,dx + \mu_1 \int_\Omega \nabla v : \nabla \varphi\,dx +$$
$$+ \int_0^t \beta_i e^{\alpha_i(t-s)} \int_\Omega \nabla v(s) : \nabla\varphi\,dx\,ds = \langle f, \varphi\rangle + \int_\Omega \varrho_i\, e^{\alpha_i t}\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in V, \quad t \in [0,T],$$
$$v(0) = a_0,$$

изучалась в [9]. А именно, было показано, что она имеет единственное слабое решение $v \in C^{L+1}([0,T],V)$. Согласно ему вычисляется σ по формуле

$$\sigma(x,t) = 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}(x,t) + 2\mu_1 \mathcal{E}(x,t) + 2\int_0^t \beta_i e^{\alpha_i(t-s)}\mathcal{E}(x,s)\,ds + \varrho_i\, e^{\alpha_i t}.$$

Отсюда $\sigma \in C^L([0,T], L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n\times n}))$.

Так как полученные $v \in C^{L+1}([0,T],V)$, $\sigma \in C^L([0,T], L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n\times n}))$ — единственное решение (2.7), а системы (2.7) и (2.4) эквивалентны, то эти же v и σ — единственное решение (2.4). Далее, поскольку (2.4) эквивалентна исходной задаче, то начально-краевая задача (0.1)–(0.3), (1.2), (1.7), (1.3) имеет единственное слабое решение $v \in C^{L+1}([0,T],V)$, $\sigma \in C^L([0,T], L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n\times n}))$. Таким образом теорема 1.2 доказана.

Замечание. Теорема 1.1 доказывается аналогично, а именно показывается, что задача о слабых решениях для начально-краевой задачи (0.1)–(0.3), (1.2)–(1.3) эквивалентна задаче (2.7), которая имеет единственное решение $v \in C^{L+1}([0,T],V)$, $\sigma \in C^L([0,T], L_2(\Omega, \mathbb{R}_S^{n\times n}))$.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Гидродинамика.* (Серия “Теоретическая физика”, Т. 6) – М.: Наука, 1988. – 773 с.
2. Бетчов Р., Криминале В. *Вопросы гидродинамической устойчивости.* – М.: Мир, 1971. – 350 с.
3. Войткунский Я.И., Амфилохиев В.Б., Павловский В.А. *Уравнения движения жидкости с учетом ее релаксационных свойств* // Тр. Ленинградск. ордена Ленина кораблестроительного института. – 1970. – Т. 69. – С. 19–26.
4. Павловский В.А. *К вопросу о теоретическом описании слабых водных растворов полимеров* // ДАН СССР. – 1971. – Т. 200. – № 4. – С. 809–812.
5. Виноградов Г.В., Малкин А.Я. *Реология полимеров.* – М.: Химия, 1977. – 438 с.
6. Осколков А.П. *К теории нестационарных течений жидкостей Кельвина–Фойгта* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. – 1982. – Т. 115. – С. 191–202.
7. Осколков А.П. *Начально-краевые задачи для уравнений движений жидкостей Кельвина–Фойгта и жидкостей Олдройта* // Тр. МИАН СССР. – 1987. – Т. 179. – С. 126–164.
8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1987. – 688 с.
9. Турбин М.В. *Исследование обобщенной математической модели движения жидкости Кельвина–Фойгта* // Вестн. ВГУ. Сер. физ. матем. – 2004. – № 1. – С. 163–179.

Воронежский государственный университет

Поступила
21.09.2004