ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 6 (505)

УДК 517.927

Г.Э. АБДУРАГИМОВ

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В настоящее время развито немало методов исследования вопросов, связанных с положительными решениями различных нелинейных уравнений. Естественным орудием исследования положительных решений являются методы функционального анализа, основанные на использовании полуупорядоченных пространств, теория которых связана с именами Ф. Рисса, М.Г. Крейна, Л.В. Канторовича, Г. Фрейденталя, Г. Биркгофа и др. Методы полуупорядоченных пространств к задачам о положительных решениях в различных аспектах применялись многими авторами. В связи с этим общие результаты, полученные в терминах функционального анализа, нашли приложения к первой краевой задаче для квазилинейных эллиптических уравнений, к нелинейным интегральным уравнениям, к нелинейным колебаниям, к задаче о точках бифуркации, к теории уравнений Монжа–Ампера и др. Приложения основаны на специальных построениях и используют свойства функции Грина различных дифференциальных операторов. Кроме того, методы полуупорядоченных пространств нашли широкое применение в задачах теории волн, в теории упругости и др.

Методы исследования положительных решений нелинейных операторных уравнений были развиты М.А. Красносельским и его учениками Л.А. Ладыженским, И.А. Бахтиным, В.Я. Стеценко, Ю.В. Покорным и др.

В данной работе на основе теории полуупорядоченных пространств автором получены условия существования положительного решения для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка.

Введем следующие обозначения: C — пространство $C[0,1]$, L_p $(1 < p < \infty)$ — пространство $L_p(0,1)$ и W^2 — пространство функций, определенных на $[0,1]$, с абсолютно непрерывной производной.

Рассмотрим краевую задачу

$$x''(t) + p(t)x(t) + f(t,(Tx)(t)) = 0, \qquad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}x(0) + \alpha_{12}x(1) + \beta_{11}x'(0) + \beta_{12}x'(1) = 0,\\ &\alpha_{21}x(0) + \alpha_{22}x(1) + \beta_{21}x'(0) + \beta_{22}x'(1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1,2)$ — действительные числа, $p(t)$ — неотрицательная суммируемая со степенью $q \in (1,\infty)$ функция, $T : C \to L_p$ $(1 < p < \infty)$ — линейный непрерывный оператор, функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори и $f(\cdot,0) \equiv 0$.

Под положительным решением задачи (1)–(2) будем понимать функцию $x \in W^2$, положительную в интервале $(0,1)$, удовлетворяющую почти всюду уравнению (1) и краевым условиям (2).

В работе доказана теорема существования по крайней мере одного положительного решения задачи (1)–(2) при некоторых ограничениях на функции $f(t,u)$, $p(t)$ и числа α_{ij}, β_{ij} $(i,j=1,2)$.

Рассмотрим эквивалентное задаче (1)–(2) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)p(s)x(s)ds + \int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds, \quad 0 \le t \le 1, \tag{3}$$

где $G(t,s)$ — функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dt^2}$ с краевыми условиями (2).

Введем некоторые обозначения: $\alpha \equiv \frac{\alpha_{12}+\beta_{11}+\beta_{12}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}$, $\beta \equiv \frac{\alpha_{22}+\beta_{21}+\beta_{22}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}$. При выполнении условий

A) $\alpha \ne \beta$, $\alpha_{11}+\alpha_{12} \ne 0$, $\alpha_{21}+\alpha_{22} \ne 0$;

B) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha) - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right] < 0$;

C) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}-\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}(1-\alpha) - \frac{\alpha_{11}-\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}(1-\beta)\right] > 0$;

D) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha - \frac{\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta\right] > 0$;

E) $\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\alpha - \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}}\beta + 1\right] < 0$

функция Грина существует, положительна и имеет вид [1]

$$G(t,s) = \begin{cases} a_1(s)(t-\alpha) + a_2(s)(t-\beta), & 0 \le t \le s; \\ b_1(s)(t-\alpha) + b_2(s)(t-\beta), & s \le t \le 1, \end{cases}$$

где

$$a_1(s) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\beta - \frac{\alpha_{22}s+\beta_{21}}{\alpha_{21}+\alpha_{22}}\right], \quad a_2(s) = \frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\alpha_{12}s+\beta_{11}}{\alpha_{11}+\alpha_{12}} - \alpha\right],$$
$$b_1(s) = \frac{\alpha_{21}s-\beta_{21}}{(\beta-\alpha)(\alpha_{21}+\alpha_{22})}, \qquad b_2(s) = \frac{\alpha_{11}s-\beta_{11}}{(\alpha-\beta)(\alpha_{11}+\alpha_{12})}, \quad s \in [0,1].$$

Предположим, что функция $f(t,u)$ неотрицательна на $[0,1]\times(0,\infty)$, монотонна по второму аргументу и $f(t,u) \le bu^{p/q}$ $(b>0)$ при $u>0$.

В операторной форме уравнение (3) можно переписать в виде

$$x = GPx + GNTx,$$

где $P : C \to L_q$ — оператор, определяемый равенством $(Px)(t) = p(t)x(t)$, $N : L_p \to L_q$ — оператор Немыцкого, $G : L_q \to C$ — оператор Грина.

При перечисленных ограничениях оператор A, определяемый равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t,s)p(s)x(s)ds + \int_0^1 G(t,s)f(s,(Tx)(s))ds, \quad 0 < t < 1, \tag{4}$$

действует в пространстве C, вполне непрерывен [2] и оставляет инвариантным конус $\widetilde{K}$ неотрицательных функций $x(t)$ пространства C, удовлетворяющих условию

$$\min_{t\in[0,1]} x(t) \ge \frac{m}{M}\max_{t\in[0,1]} x(t) = \frac{m}{M}\|x\|_C,$$

где m и M — соответственно нижняя и верхняя оценки функции Грина.

Теорема. *Предположим, что* $T : C \to L_p$ *— положительный (монотонный) на конусе* $\widetilde{K}$ *оператор. Пусть выполнены условия* A)–E), *а также*

1) $p \ne q$;

2) $\|p\|_{L_q} < \frac{m}{M^2}$;

3) $a(t)u^{p/q} \le f(t,u) \le bu^{p/q}$, $t\in[0,1]$, $u \ge 0$,

где $a(t)$ *— положительная суммируемая функция,* b *— некоторое положительное число.*

Тогда краевая задача (1)–(2) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Доказательство. В дальнейшем под полуупорядочиванием $u \prec v$ и $u \overline{\prec} v$ в конусе $\widetilde{K}$ пространства C соответственно будем понимать $u(x) \le v(x)$ и $u(x) > v(x)$ для любого $x \in [0,1]$.

Рассмотрим случай $\frac{p}{q} > 1$. Покажем, что найдется такое число $R > 0$, что при $x \in \widetilde{K}$ и $\|x\|_C \ge R$

$$Ax \overline{\prec} x. \tag{5}$$

Действительно, в силу монотонности оператора $T : C \to L_p$ и условия 3) теоремы имеем

$$(Ax)(t) \ge m \int_0^1 a(s)(Tx)^{p/q}(s)ds \ge \frac{m^{p/q+1}}{M^{p/q}} \|x\|_C^{p/q} \int_0^1 a(s)(T1)^{p/q}(s)ds \ge$$
$$\ge \frac{m^{p/q+1}}{M^{p/q}} R^{p/q-1} \int_0^1 a(s)(T1)^{p/q}(s)ds \cdot x(t), \quad 0 < t < 1.$$

Отсюда при $R > \left(M^{p/q}\Big/\left[m^{p/q+1}\int\limits_0^1 a(s)(T1)^{p/q}(s)ds\right]\right)^{p/(p-q)}$ следует (5).

Найдем теперь $r > 0$ такое, что для всех $\varepsilon > 0$ при $x \in \widetilde{K}$, $\|x\|_C \le r$, $x \ne 0$

$$Ax \overline{\succ} (1+\varepsilon)x. \tag{6}$$

В силу условия 3) теоремы имеем

$$(Ax)(t) \le M \int_0^1 p(s)x(s)ds + Mb \int_0^1 (Tx)^{p/q}(s)ds \le$$
$$\le M\|p\|_{L_q}\|x\|_C + Mb\|Tx\|_{L_p}^{p/q} \le M\|p\|_{L_q}\|x\|_C + Mb\gamma^{p/q}\|x\|_C^{p/q} \le$$
$$\le M(\|p\|_{L_q} + b\gamma^{p/q}r^{p/q-1})\|x\|_C \le \frac{M^2}{m}(\|p\|_{L_q} + b\gamma^{p/q}r^{p/q-1})x(t),$$

где γ — норма оператора $T : C \to L_p$.

Отсюда при $r < \left(\frac{m/M^2 - \|p\|_{L_q}}{b\gamma^{p/q}}\right)^{q/(p-q)}$ следует (6).

Легко проверить, что $r \le R$. Из (5) и (6) следует, что положительный оператор (4) является растяжением конуса $\widetilde{K}$. Тогда согласно теореме о растяжении конуса [3] оператор (4) имеет в конусе $\widetilde{K}$ пространства C по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку, что равносильно существованию по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2).

В случае $p/q < 1$, применяя теорему о сжатии конуса [3], аналогично можно установить существование по крайней мере одного положительного решения краевой задачи (1)–(2). $\square$

Литература

1. Абдурагимов Г.Э. *О положительных решениях краевой задачи для одного нелинейного функционально-дифференциального уравнения 2-го порядка* // Вестн. Дагест. ун-та. Сер. Естеств. науки. – 1997. – Вып. 4. – С. 121–123.
2. Крейн С.Г. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1972. – 544 с.
3. Красносельский М.А. *Положительные решения операторных уравнений.* – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.

Дагестанский государственный университет

Поступили
первый вариант 04.06.2001
окончательный вариант 27.02.2003