ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1998 МАТЕМАТИКА № 5 (432)

УДК 517.518

А.А. ЯЦЕНКО

ИТЕРАТИВНЫЕ ПЕРЕСТАНОВКИ ФУНКЦИЙ И ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА

Пусть функция $f: R^n \to R$ измерима в R^n, конечна почти всюду (п. в.) и $\lambda_f(\sigma) = \mathrm{mes}_n\{x \in R^n : |f(x)| > \sigma\} < \infty$ для всех $\sigma > 0$. Невозрастающей перестановкой функции $f(x)$ будем называть функцию $f^*(t)$, невозрастающую на $(0, +\infty)$ и равноизмеримую с $|f(x)|$. Она может быть задана равенством

$$f^*(t) = \inf\{\sigma : \lambda_f(\sigma) \le t\}, \quad t > 0.$$

Пространством Лоренца $L^{p,q}(R^n)$ назовем пространство всех измеримых на R^n функций, для которых

$$\|f\|^*_{L^{p,q}(R^n)} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} < \infty, \quad 0 < p, q < \infty.$$

Под перестановкой функции $f(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, по первой переменной будем понимать функцию $\mathcal{R}_1 f(s_1, x_2, \dots, x_n)$, измеримую в $R_+ \times R^{n-1}$, невозрастающую по s_1 и такую, что функции $\mathcal{R}_1 f(s_1, \cdot)$ и $f(x_1, \cdot)$ равноизмеримы как функции одной переменной для почти всех фиксированных остальных [1]. Аналогичным образом, переставив $\mathcal{R}_1 f(s_1, x_2, \dots, x_n)$ по остальным переменным, получим функцию $\mathcal{R}_{1,2,\dots,n} f(s_1, s_2, \dots, s_n)$, равноизмеримую с $f(x)$, невозрастающую по каждой переменной, которую будем называть итеративной перестановкой функции $f(x)$. Необходимо заметить, что порядок, в котором мы переставляем функцию, существен. К примеру $\mathcal{R}_{1,2,\dots,n} f \ne \mathcal{R}_{n,n-1,\dots,1} f$. Пространствами Лоренца $\mathcal{L}^{p,q}(R^n)$ и $\mathcal{L}^{p,q}_*(R^n)$ будем называть пространства, определяемые равенствами

$$\|f\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}(R^n)} = \|\cdots\| f\|^*_{L^{p,q}(R)}\cdots\|^*_{L^{p,q}(R)},$$
$$\|f\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^n)} = \|\cdots\| \mathcal{R}_{1,2,\dots,n} f\|^*_{L^{p,q}(R)}\cdots\|^*_{L^{p,q}(R)},$$

где норма пространства $L^{p,q}(R)$ берется последовательно по каждой переменной, начиная с первой, при фиксированных остальных.

В [2] было доказано, что при $p \ne q$, $q \ne \infty$ ни одно из пространств $L^{p,q}(R^n)$, $\mathcal{L}^{p,q}(R^n)$ не является подмножеством другого. Основным результатом данной работы является

Теорема 1. (i) *Если $0 < p < q < \infty$, то $L^{p,q}(R^n) \subset \mathcal{L}^{p,q}_*(R^n)$.*
(ii) *Если $0 < q < p < \infty$, то $\mathcal{L}^{p,q}_*(R^n) \subset L^{p,q}(R^n)$.*
(iii) *Если $p \ne q$, то $L^{p,q}(R^n) \ne \mathcal{L}^{p,q}_*(R^n)$.*

Доказательство. Для наглядности докажем теорему при $n = 2$. При $n > 2$ доказательство проводится аналогично.

В дальнейшем будем пользоваться тем, что функции, невозрастающие по каждой переменной, непрерывны п. в. Затрудняясь дать ссылку, приведем доказательство этого факта.

Лемма. *Пусть $f(x, y)$ — неотрицательная, невозрастающая по каждой переменной функция, определенная для $x, y > 0$, тогда $f(x, y)$ непрерывна п. в.*

Доказательство леммы. Пусть $m(x,y)$, $M(x,y)$ — функции Бэра,

$$m(x_0,y_0) = \lim_{\delta\to+0} \inf_{(x,y)\in I^\delta_{(x_0,y_0)}} f(x,y),$$
$$M(x_0,y_0) = \lim_{\delta\to+0} \sup_{(x,y)\in I^\delta_{(x_0,y_0)}} f(x,y),$$

где $I^\delta_{(x_0,y_0)}$ — квадрат с центром в точке (x_0,y_0) и длиной стороны δ. Функции $m(x,y), M(x,y)$ измеримы ([3], с. 143), а значит, измеримо множество $E = \{(x,y) : M(x,y) > m(x,y)\}$ — множество точек разрыва функции $f(x,y)$. Пусть $\mathrm{mes}_2\, E > 0$. Обозначим $E_n = \{(x,y) : M(x,y) - m(x,y) > \frac{1}{n}\}$, $n = 1,2,\ldots$ Ясно, что $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ и, значит, существует такое n, что $\mathrm{mes}_2\, E_n > 0$.

Переходя к полярным координатам и применяя теорему Фубини, можем утверждать, что найдется такой луч $L = \{(x,y) : y = kx,\ x > 0\}$, что $\mathrm{mes}_1(E_n \cap L) > 0$. Выберем последовательность точек $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\infty}$ так, чтобы $(x_i,y_i) \in E_n \cap L$ и

$$x_i < x_{i+1}, \quad y_i < y_{i+1}, \quad i = 1,2,\ldots$$

Пусть $f(x_1,y_1) = M$. Учитывая, что $f(x,y)$ не возрастает по каждой переменной, получим для всех i неравенство

$$f\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2},\ \frac{y_i + y_{i-1}}{2}\right) \geq f\left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2},\ \frac{y_{i+1} + y_i}{2}\right) + \frac{1}{n}.$$

Отсюда видно, что если $i_0 = ([M]+1)n$, то $f\left(\frac{x_{i_0}+x_{i_0+1}}{2},\ \frac{y_{i_0}+y_{i_0+1}}{2}\right) < 0$, что противоречит условию леммы. $\square$

Продолжим доказательство теоремы.

(i) Вложение $L^{p,q}(R^2) \subset \mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)$ будет следовать из неравенства для норм

$$\|f\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)} \leq c\|f\|^*_{L^{p,q}(R^2)}. \tag{1}$$

Функциями вида $(*)$ будем называть неотрицательные, невозрастающие по каждой переменной функции

$$f(x,y) = \sum_{m,n=1}^{N} c_{m,n}\chi_{I_{m,n}}(x,y),$$

где

$$I_{m,n} = ((m-1)\delta, m\delta] \times ((n-1)\delta, n\delta],$$

$m,n = \overline{1,N}$, $\delta > 0$ — фиксированное число. Покажем, что (i) справедливо для функций вида $(*)$. Перенумеруем квадраты $I_{m,n}$, $m,n = \overline{1,N}$, в порядке убывания принимаемых на них значений функции. Если все значения функции различны, то процесс нумерации определен однозначно и завершается за N^2 шагов. Если же на некотором шаге мы получим k квадратов, на которых функция принимает одинаковые значения, то продолжим нумерацию следующим образом. Выберем среди них те, у которых первый индекс наименьший и перенумеруем их в порядке возрастания второго индекса. С оставшимися квадратами поступаем аналогичным образом, пока не перенумеруем все k квадратов.

Итак, функция примет вид

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{N^2} \xi_k \chi_{I_k}(x,y),$$

где ξ_k — значение, которое принимает функция на квадрате I_k. Заметим, что если $I_k = ((m-1)\delta, m\delta] \times ((n-1)\delta, n\delta]$, то

$$mn \leq k \quad \text{и} \quad \iint\limits_{I_k} (xy)^{q/p-1} dx\, dy \leq \frac{p^2}{q^2}\delta^{2q/p} k^{q/p-1}. \tag{2}$$

Действительно, из способа нумерации следует, что номер квадрата $I_{m,n}$ будет не меньше номеров квадратов $I_{i,j}$, $i \le m$, $j \le n$, т. к. на них функция принимает значения не меньше, чем на $I_{m,n}$, и оба индекса у них не превосходят соответственно m и n.

Перестановка функции $f(x,y)$ имеет вид

$$f^*(t) = \sum_{k=1}^{N^2} \xi_k \chi_{(\delta^2(k-1),\delta^2 k]}(t),$$

а т. к. $f(x,y)$ не возрастает по каждой переменной, то $f(x,y) = \mathcal{R}_{1,2} f(x,y)$. Имеем

$$\|f\|^{*q}_{L^{p,q}(R^2)} = \frac{q}{p}\int_0^\infty t^{q/p-1} f^{*q}(t)dt = \delta^{2q/p}\sum_{k=1}^{N^2} \xi_k^q [k^{q/p} - (k-1)^{q/p}] \ge 2^{1-q/p}\delta^{2q/p}\sum_{k=1}^{N^2}\xi_k^q k^{q/p-1}.$$

С другой стороны, учитывая (2), получим

$$\|f\|^{*q}_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)} = \frac{q^2}{p^2}\sum_{k=1}^{N^2} \xi_k^q \iint\limits_{I_k} (xy)^{q/p-1} dx\, dy \le \delta^{2q/p}\sum_{k=1}^{N^2}\xi_k^q k^{q/p-1} \le 2^{q/p-1}\|f\|^{*q}_{L^{p,q}(R^2)}.$$

Таким образом, неравенство (1) справедливо для функций вида $(*)$.

Докажем (1) в случае, когда $f(x,y)$ — произвольная измеримая функция. Не ограничивая общности, можно считать, что функция $f(x,y)$ невозрастающая по каждой переменной, неотрицательная и определенная для $x,y > 0$. Это можно сделать, т. к. $f(x,y)$ и $\mathcal{R}_{1,2}f(x,y)$ имеют одинаковые перестановки.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_k(x,y) = \sum_{m,n=1}^{N^2} f(m2^{-k}, n2^{-k})\chi_{I_{m,n}}(x,y),$$

где $I_{m,n} = ((m-1)2^{-k}, m\,2^{-k}] \times ((n-1)2^{-k}, n2^{-k}]$, $N = 4^k$, $m,n = \overline{1,N}$, $k = 1,2,\ldots$ Заметим, что для всех (x,y) справедливо

$$f_1(x,y) \le f_2(x,y) \le \cdots \le f_k(x,y) \le \cdots \tag{3}$$

и для всех k

$$f(x+2^{-k}, y+2^{-k}) \le f_k(x,y) \le f(x,y). \tag{4}$$

Из (4) и леммы будет следовать, что для почти всех (x,y)

$$\lim_{k\to\infty} f_k(x,y) = f(x,y). \tag{5}$$

Предположим, что $\|f\|^*_{L^{p,q}(R^2)} = M < \infty$. Тогда, учитывая (3)–(5) и то, что $f_k(x,y)$ — функции вида $(*)$, по теореме Леви получим

$$\|f\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)} = \lim_{k\to\infty}\|f_k\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)} \le c\lim_{k\to\infty}\|f_k\|^*_{L^{p,q}(R^2)} = c\|f\|^*_{L^{p,q}(R^2)}.$$

Это доказывает первую часть теоремы 1.

(ii) Доказательство второй части теоремы 1 аналогично доказательству первой.

(iii) Исходя из (i) и (ii), достаточно показать существование функций $f(x,y)$ и $g(x,y)$ таких, что если $0 < p < q < \infty$, то $f(x,y) \in \mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)$, но $f(x,y) \notin L^{p,q}(R^2)$, а если $0 < q < p < \infty$, то $g(x,y) \in L^{p,q}(R^2)$, но $g(x,y) \notin \mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)$.

Пусть $0 < p < q < \infty$ и $f(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n/p}\chi_{I_n}(x,y)$, где

$$I_0 = (0,1] \times (0,1], \quad I_n = \{(x,y) : (xy)^{q/p-1} \le 2^{(1-n)},\ x \in (\xi_{n-1}, \xi_n]\}, \tag{6}$$

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_n = \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} 2^{(k-1)\frac{q}{q-p}}\Big), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Нетрудно убедиться, что

$$\operatorname{mes}_2 I_n = 2^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{7}$$

а значит, $f^*(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n/p}\chi_{J_n}(t)$, где $J_0 = (0,1]$, $J_n = (2^{n-1}, 2^n]$, $n = 1, 2, \ldots$ Из (6) и (7) получим

$$\iint\limits_{I_n} (xy)^{q/p-1} dx\, dy \le 1. \tag{8}$$

Функция $f(x,y)$ не возрастает, значит, $f(x,y) = \mathcal{R}_{1,2}f(x,y)$. Учитывая (8), будем иметь

$$\|f\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)} = \left(\frac{q^2}{p^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (xy)^{q/p-1} f^q(x,y)\, dx\, dy\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{q^2}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq/p} \iint\limits_{I_n} (xy)^{q/p-1} dx\, dy\right)^{1/q} \le \left(\frac{q^2}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-nq/p}\right)^{1/q} < \infty,$$

но

$$\|f\|^*_{L^{p,q}(R^2)} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{q/p-1} f^{*q}(t) dt\right)^{1/q} = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}(1 - 2^{-q/p})\right)^{1/q} = \infty.$$

Таким образом, $f(x,y) \in \mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)$, но $f(x,y) \notin L^{p,q}(R^2)$.

Пусть теперь $0 < q < p < \infty$ и пусть $g(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \chi_{I_n}(x,y)$, где

$$I_0 = (0,1] \times (0,1], \quad I_n = \{(x,y) : (xy)^{1-q/p} \le 2^{-n},\ x \in (\xi_{n-1}, \xi_n]\}, \tag{9}$$

$$\xi_0 = 1, \quad \xi_n = \exp\Big(\sum_{k=1}^{n} 2^{\frac{kq}{p-q}}\Big) \quad n = 1, 2, \ldots$$

Легко видеть, что

$$\operatorname{mes}_2 I_n = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

а значит, $g^*(t) = \chi_{(0,2]}(t)$. Из (9) и (10) получим

$$\iint\limits_{I_n} (xy)^{q/p-1} dx\, dy \ge 1. \tag{11}$$

Функция $g(x,y)$ не возрастает, значит, $g(x,y) = \mathcal{R}_{1,2}g(x,y)$. Учитывая (11), имеем

$$\|g\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}_*(R^2)} = \left(\frac{q^2}{p^2}\int_0^\infty\!\!\int_0^\infty (xy)^{q/p-1} g^q(x,y) dx\, dy\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{q^2}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty} \iint\limits_{I_n} (xy)^{q/p-1} dx\, dy\right)^{1/q} \ge \left(\frac{q^2}{p^2}\sum_{n=0}^{\infty} 1\right)^{1/q} = \infty,$$

но

$$\|g\|^*_{L^{p,q}(R^2)} = \left(\frac{q}{p}\int_0^\infty t^{q/p-1} g^{*q}(t) dt\right)^{1/q} = \left(\frac{q}{p}\int_0^2 t^{q/p-1} dt\right)^{1/q} < \infty.$$

Таким образом, $g(x,y) \in L^{p,q}(R^2)$, но $g(x,y) \notin \mathcal{L}_*^{p,q}(R^2)$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. В статье Блозинского [1] утверждается, что при $p \neq q$, $q \neq \infty$ ни одно из пространств $L^{p,q}(R^n)$, $\mathcal{L}_*^{p,q}(R^n)$ не является подмножеством другого. По-видимому, здесь имеется опечатка; автор обосновывает это утверждение ссылкой на статью Цвикела [2], но, как уже отмечалось выше, в упомянутой статье речь идет о сравнении пространств $L^{p,q}(R^n)$, $\mathcal{L}^{p,q}(R^n)$.

Замечание 2. По существу из доказательства теоремы 1 следует более общая

Теорема 2. *Пусть $f(x) : R^n \to R$ измерима в R^n. Тогда*

(i) *Если $q > p$, то $\|f\|^*_{L^{p,q}(R^n)} \le \sup \|g\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}(R^n)} \le c\|f\|^*_{L^{p,q}(R^n)}$.*

(ii) *Если $q < p$, то $c\|f\|^*_{L^{p,q}(R^n)} \le \inf \|g\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}(R^n)} \le \|f\|^*_{L^{p,q}(R^n)}$, где верхняя и нижняя грани берутся по всем функциям $g(s)$, $s \in R^n_+$, равноизмеримым с $f(x)$ и невозрастающим по каждой переменной.*

Доказательство. Докажем утверждение (i) для случая $n = 2$. Правое неравенство (i) следует из доказательства теоремы 1. Для доказательства левого неравенства (i) достаточно рассмотреть функцию $g(s,t) = f^*(t)\chi_{(0,1]}(s)$, где $f^*(t)$ — невозрастающая перестановка $f(x,y)$. Функция $g(s,t)$ будет равноизмеримой с $f(x,y)$ и невозрастающей по каждой переменной и для нее будет выполняться

$$\|g\|^*_{\mathcal{L}^{p,q}(R^2)} = \left(\frac{q^2}{p^2}\int_0^1 s^{q/p-1}ds \int_0^\infty t^{q/p-1} f^{*q}(t)dt\right)^{1/q} = \|f\|^*_{L^{p,q}(R^2)},$$

что доказывает утверждение (i).

Утверждение (ii) доказывается аналогично.

В заключение автор хотел бы выразить благодарность В.И. Коляде за постановку задачи и обсуждение результатов.

Литература

1. Blozinski A.P. *Multivariate rearrangements and Banach function spaces with mixed norms* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 263. – № 1. – P. 149–167.
2. Cwikel M. *On* $(L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))_{\theta,q}$ // Proc. Amer. Math. Soc. – 1974. – V. 44. – № 2. – P. 286–292.
3. Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* – 2-е изд. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 552 с.

Одесский государственный университет

Поступила 06.05.1996