ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2004 МАТЕМАТИКА № 5 (504)

УДК 514.756

Д.А. АБРУКОВ

ПОЛЯРНЫЕ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНО-МЕТРИЧЕСКОГО ПРОСТРАНСТВА

В работе изучаются некоторые вопросы геометрии двух регулярных гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$, погруженных в проективно-метрическое пространство K_n и являющихся полярными относительно его абсолюта Q_{n-1}.

Следующие индексы принимают значения

$$\overline{I},\overline{K},\overline{L}=\overline{0,n};\quad I,K,L,P,Q=\overline{1,n};$$
$$i,j,k,p,q,s,l,t,u,v=\overline{1,n-1};\quad \overline{i},\overline{j},\overline{k}=\overline{0,n-1}.$$

Операция внешнего дифференцирования обозначена буквой D, внешнего умножения — символом "$\wedge$". Оператор ∇ действует по следующему закону [1]:

$$\nabla K^\alpha_{in}=dK^\alpha_{in}-K^\alpha_{tn}\omega^t_i-K^\alpha_{in}\omega^n_n+K^\beta_{in}\omega^\alpha_\beta;$$

при фиксированных главных параметрах этот оператор обозначается через ∇_δ, формы $\omega^{\overline{I}}_{\overline{K}}$ — через $\pi^{\overline{I}}_{\overline{K}}$. Оператор $\widetilde{\nabla}$ действует по закону

$$\widetilde{\nabla}T^\alpha_{in}=dT^\alpha_{in}-T^\alpha_{tn}\Omega^t_i-T^\alpha_{in}\Omega^n_n+T^\beta_{in}\Omega^\alpha_\beta.$$

1. *Проективно-метрическое пространство.* Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к подвижному реперу $R=\{A_{\overline{K}}\}$; деривационные формулы репера R и уравнение структуры проективного пространства имеют соответственно вид [2]

$$\text{а)}\quad dA_{\overline{I}}=\omega^{\overline{L}}_{\overline{I}}A_{\overline{L}}, \tag{1-а}$$

$$\text{б)}\quad D\omega^{\overline{I}}_{\overline{K}}=\omega^{\overline{L}}_{\overline{K}}\wedge\omega^{\overline{I}}_{\overline{L}},\quad \omega^{\overline{L}}_{\overline{L}}=0. \tag{1-б}$$

Известно [3], что проективно-метрическим пространством K_n называется пространство P_n, в котором задана неподвижная гиперквадрика Q_{n-1} (абсолют):

$$g_{\overline{I}\,\overline{K}}x^{\overline{I}}x^{\overline{K}}=0,\quad g_{\overline{I}\,\overline{K}}=g_{\overline{K}\,\overline{I}}, \tag{2}$$

где $x^{\overline{I}}$ — координаты точек $M\in Q_{n-1}$; следовательно, фундаментальной группой пространства K_n является подгруппа группы проективных преобразований пространства P_n, а именно, стационарная подгруппа абсолюта Q_{n-1}. Согласно [4], условием неподвижности гиперквадрики (2) является выполнение дифференциальных уравнений

$$dg_{\overline{I}\,\overline{K}}-g_{\overline{I}\,\overline{L}}\omega^{\overline{L}}_{\overline{K}}-g_{\overline{L}\,\overline{K}}\omega^{\overline{L}}_{\overline{I}}=\Omega g_{\overline{I}\,\overline{K}}, \tag{3}$$

где Ω — некоторая форма Пфаффа.

Известно [5], что за счет нормировки коэффициентов $g_{\overline{I}\,\overline{K}}$ гиперквадрики и вершин репера R можно уравнение (2) абсолюта Q_{n-1} и условие его неподвижности (3) записать соответственно в виде

$$a_{IK}x^I x^K + \frac{1}{c}(g_{I0}x^I + cx^0)^2 = 0, \tag{4}$$

$$da_{IK} - a_{IL}\omega_K^L - a_{LK}\omega_I^L = -\frac{1}{c}(a_{IL}g_{K0} + a_{KL}g_{I0})\omega_0^L, \tag{5-а}$$

$$dg_{I0} - g_{L0}\omega_I^L - c\omega_I^0 = a_{IL}\omega_0^L, \tag{5-б}$$

где $a_{IK} = g_{IK} - \frac{g_{I0}g_{K0}}{c}$, $a_{IK} = a_{KI}$, $c = g_{00} = \mathrm{const} \neq 0$. Отметим, что при нормировке вершин репера R получаем соотношение $\omega_0^0 = -\frac{g_{0L}}{c}\omega_0^L$. В силу выражения (7) деривационные уравнения (1-а) в проективно-метрическом пространстве K_n запишутся в виде

$$dA_0 = \Big(-\frac{g_{0L}}{c}A_0 + A_L\Big)\omega_0^L, \quad dA_I = \omega_I^{\overline{L}}A_{\overline{L}}.$$

Заметим также, что в силу соотношений (1), (7) имеет место

$$\omega_L^L = \frac{g_{0L}}{c}\omega_0^L.$$

Уравнения структуры (1-б) проективно-метрического пространства K_n примут вид

$$\begin{gathered} D\omega_0^I = -\frac{g_{0L}}{c}\omega_0^L \wedge \omega_0^I + \omega_0^L \wedge \omega_L^I, \quad D\omega_I^0 = \omega_I^L \wedge \omega_L^0 - \frac{g_{0L}}{c}\omega_I^0 \wedge \omega_0^L, \\ D\omega_0^0 = \omega_0^L \wedge \omega_L^0, \quad D\omega_K^I = \omega_K^0 \wedge \omega_0^I + \omega_K^L \wedge \omega_L^I, \quad \omega_L^L = \frac{g_{0L}}{c}\omega_0^L. \end{gathered} \tag{6}$$

2. *Дифференциальные уравнения гиперповерхности.* Как и в проективном пространстве P_n [4], уравнение гиперповерхности V_{n-1} в K_n в репере первого порядка ($A_0 \in V_{n-1}$, $A_i \in T_{n-1}(A_0)$) записывается в виде

$$\omega_0^n = 0. \tag{7}$$

Отметим, что в силу $g_{00} \neq 0$ текущая точка A_0 гиперповерхности V_{n-1} не лежит на абсолюте. Трехкратное продолжение уравнения (7) приводит к следующим дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов второго $\{\Lambda_{ij}^n\}$ и третьего $\{\Lambda_{ij}^n, \Lambda_{ijk}^n\}$ порядков $V_{n-1} \subset K_n$:

$$\omega_i^n = \Lambda_{ij}^n\omega_0^j, \quad \Lambda_{[ij]}^n = 0, \tag{8}$$

$$\nabla\Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijk}^n\omega_0^k, \quad \Lambda_{i[jk]}^n = \frac{1}{c}\Lambda_{i[j}^n g_{k]0}, \quad \Lambda_{[ij]k}^n = 0, \tag{9}$$

$$\nabla\Lambda_{ijk}^n + \Lambda_{ik}^n\omega_j^0 + \Lambda_{jk}^n\omega_i^0 - \Lambda_{(ij}^n\Lambda_{k)s}^n\omega_n^s = \Lambda_{ijkl}^n\omega_0^l, \quad \Lambda_{ij[kl]}^n = \frac{1}{c}\Lambda_{ij[k}^n g_{l]0}.$$

Из уравнений (9) видно, что система функций Λ_{ij}^n образует симметричный тензор второго порядка.

Заметим, что при $I = i$ из уравнений (5-б), (8) имеем

$$d\Big(\frac{g_{i0}}{c}\Big) - \frac{g_{j0}}{c}\omega_i^j - \omega_i^0 = \widetilde{a}_{ij}\omega_0^j, \quad \widetilde{a}_{ij} = \frac{1}{c}(a_{ij} + g_{n0}\Lambda_{ij}^n).$$

Предполагая гиперповерхность V_{n-1} в K_n регулярной (т. е. $\Lambda = |\Lambda_{ij}^n| \neq 0$), можно ввести обращенный тензор Λ_n^{ij} второго порядка

$$\Lambda_n^{ik}\Lambda_{kj}^n = \delta_j^i, \quad \nabla\Lambda_n^{ij} = -\Lambda_n^{is}\Lambda_n^{tj}\Lambda_{stl}^n\omega_0^l. \tag{10}$$

Функция Λ есть относительный инвариант второго порядка

$$d\ln\Lambda+(n+1)\omega_n^n=A_l\omega_0^l,\quad A_l=\Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijl}^n+\frac{2}{c}g_{l0}.$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\nabla A_i-(n+1)\Lambda_{ij}^n\omega_n^j=A_{ij}\omega_0^j,\quad A_{[ij]}=\frac{1}{c}A_{[i}g_{j]0}.$$

В четвертой дифференциальной окрестности точки $A_0\in V_{n-1}$ в K_n внутренним образом определяется поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}^2 [4]:

$$\Lambda_{ij}^n x^i x^j+\frac{2p_i}{n+1}x^i x^n+S_n(x^n)^2=2x^0x^n;\tag{11}$$

здесь

$$p_i=\Lambda_n^{jk}\Lambda_{ijk}^n-\frac{g_{i0}}{c},\quad S_n=\frac{1}{n^2-1}\Lambda_n^{ij}\left(p_{ij}-\frac{p_ip_j}{n+1}-p_i\frac{g_{j0}}{c}\right).\tag{12}$$

Функции p_{ij} входят в дифференциальные уравнения

$$\nabla p_i+(n+1)[\omega_i^0-\Lambda_{is}^n\omega_n^s]=p_{is}\omega_0^s,$$
$$\nabla_\delta p_{ij}+\left[p_j+(n+1)\frac{g_{j0}}{c}\right]\pi_i^0-[(n+1)a_{sij}^n+p_s\Lambda_{ij}^n]\pi_n^s+2(n+1)\Lambda_{ij}^n\pi_n^0=0.$$

Аналогично [4] компоненты симметричного по всем нижним индексам тензора Дарбу на регулярной гиперповерхности V_{n-1} в K_n имеют вид

$$b_{ijk}^n\overset{\text{def}}{=}(n+1)\left(\Lambda_{ijk}^n+\frac{1}{c}\Lambda_{k(i}^n g_{j)0}\right)-\Lambda_{(ij}^n A_{k)},\quad \nabla b_{ijk}^n=b_{ijks}^n\omega_0^s,\tag{13}$$
$$b_{ijks}^n=(n+1)\left\{\Lambda_{ijks}^n+\frac{1}{c}[g_{0(i}\Lambda_{j)ks}^n+\{a_{s(i}+g_{n0}\Lambda_{s(i}^n\}\Lambda_{j)k}^n]\right\}-\Lambda_{(ij|s|}^n A_{k)}-\Lambda_{(ij}^n A_{k)s}.$$

Обращение в нуль тензора Дарбу регулярной гиперповерхности V_{n-1} в K_n есть условие ее вырождения в гиперквадрику Q_{n-1}^2 (см. (11)).

3. *Полярная гиперповерхность*. Гиперповерхности V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ назовем *полярными* (относительно абсолюта Q_{n-1}), если касательной гиперплоскостью $\widetilde{T}_{n-1}$ (T_{n-1}) в текущей точке $B\in\widetilde{V}_{n-1}$ ($A_0\in V_{n-1}$) будет поляра точки A_0 (B) относительно абсолюта Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n. Нашей дальнейшей задачей является построение гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$, полярной данной гиперповерхности V_{n-1} относительно абсолюта Q_{n-1} пространства K_n.

Пусть гиперповерхность V_{n-1} в K_n оснащена в смысле Э. Картана [6], т. е. каждой точке $A_0\in V_{n-1}$ присоединена точка

$$B_n(A_0)=v_nA_0+v_n^jA_j+A_n,\tag{14}$$

не принадлежащая касательной плоскости $T_{n-1}(A_0)$; оснащающий объект $\{v_n^i,v_n\}$ подчинен условию инвариантности поля оснащающих точек:

$$dv_n^i-v_n^i\omega_n^n+v_n^j\omega_j^i+\omega_n^i=v_{nk}^i\omega_0^k,$$
$$dv_n-v_n\omega_n^n+v_n^j\omega_j^0+\omega_n^0=v_{nk}\omega_0^k.$$

Поле квазитензора v_n^i определяет поле инвариантных нормалей первого рода гиперповерхности V_{n-1} в K_n.

Потребуем, чтобы точка B_n принадлежала поляре π точки A_0 относительно абсолюта Q_{n-1}:

$$\pi:g_{I0}x^I+cx^0=0.\tag{15}$$

Так как условием принадлежности точки B_n поляре (15) является выполнение равенства $g_{i0}v_n^i + cv_n + g_{n0} = 0$, то справедливо

$$v_n = -\frac{1}{c}(g_{i0}v_n^i + g_{n0}); \tag{16}$$

охват (16) определяет оснащающую точку Картана на нормали первого рода v_n^i.

Полярой точки B_n (см. (14)) относительно абсолюта Q_{n-1} пространства K_n является гиперплоскость

$$a_{Kj}x^K v_n^j + a_{Kn}x^K + \frac{1}{c}(g_{K0}x^K + cx^0)(g_{j0}v_n^j + g_{n0} + cv_n) = 0. \tag{17}$$

Соотношение (17) в силу равенств (16) запишется в виде

$$(a_{ij}v_n^j + a_{in})x^i + (a_{nj}v_n^j + a_{nn})x^n = 0. \tag{18}$$

Потребуем совпадения гиперплоскости (18) с касательной гиперплоскостью $T_{n-1}(A_0)$ гиперповерхности V_{n-1} в K_n, т. е. с гиперплоскостью $x^n = 0$. В силу последнего равенства и соотношений (18) имеем

$$a_{ij}v_n^j + a_{in} = 0, \quad a_{nj}v_n^j + a_{nn} \neq 0. \tag{19}$$

Заметим, что

$$B_n \notin Q_{n-1} \ \Leftrightarrow \ a_{nn} + a_{in}v_n^i \neq 0. \tag{20}$$

Из уравнений (5) неподвижности абсолюта Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n с учетом уравнения (7) имеем

$$da_{ij} - a_{ik}\omega_j^k - a_{kj}\omega_i^k = \left\{\Lambda^n_{s(i}a_{j)n} - \frac{1}{c}a_{s(i}g_{j)0}\right\}\omega_0^s, \tag{21}$$

$$da_{in} - a_{in}\omega_n^n - a_{kn}\omega_i^k - a_{ik}\omega_n^k = \left\{a_{nn}\Lambda^n_{is} - \frac{1}{c}(a_{is}g_{n0} + a_{ns}g_{i0})\right\}\omega_0^s,$$

$$da_{nn} - 2a_{nn}\omega_n^n - 2a_{kn}\omega_n^k = -\frac{2}{c}g_{n0}a_{ns}\omega_0^s, \tag{22}$$

$$dg_{i0} - g_{j0}\omega_i^j - c\omega_i^0 = (a_{is} + g_{n0}\Lambda^n_{is})\omega_0^s,$$

$$dg_{n0} - g_{j0}\omega_n^j - g_{n0}\omega_n^n - c\omega_n^0 = a_{ns}\sigma_0^s. \tag{23}$$

Предполагая тензор a_{ji} невырожденным (т. е. $a \overset{\text{def}}{=} |a_{ij}| \neq 0$), имеем поле взаимного тензора a^{ij}:

$$a^{ik}a_{kj} = \delta^i_j, \quad \nabla a^{ij} = \frac{1}{c}g_{s0}a^{s(i}\omega_0^{j)} - a^{is}a^{kj}a_{n(s}\Lambda^n_{k)l}\omega_0^l. \tag{24}$$

Из соотношений (19) в силу (24) находим

$$v_n^i = -a^{ik}a_{kn}. \tag{25}$$

Таким образом, из соотношений (16) и (25) следует, что точка $B_n \in \pi$ (см. (14)), являющаяся полюсом касательной гиперплоскости $T_{n-1}(A_0)$ гиперповерхности V_{n-1} в K_n относительно абсолюта Q_{n-1}, в репере первого порядка $R = \{A_{\overline{K}}\}$ имеет разложение

$$B_n = \frac{1}{c}(g_{j0}a_{sn}a^{sj} - g_{n0})A_0 - a_{sn}a^{sj}A_j + A_n. \tag{26}$$

Отметим, что условие (20) с учетом соотношений (25) перепишется в виде

$$B_n \notin Q^2_{n-1} \ \Leftrightarrow \ A_{nn} \overset{\text{def}}{=} a_{nn} - a_{in}a_{jn}a^{ij} \neq 0, \tag{27}$$

где A_{nn} — относительный инвариант, удовлетворяющий уравнению

$$dA_{nn} - 2A_{nn}\omega_n^n = -2A_{nn}a^{ij}a_{in}\Lambda_{jk}^n\omega_0^k. \tag{28}$$

Итак, исходная гиперповерхность V_{n-1} в K_n внутренним образом индуцирует гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$, полярную данной V_{n-1} относительно абсолюта Q_{n-1}. Касательной гиперплоскостью $\widetilde{T}_{n-1}$ в текущей точке $B_n \in \widetilde{V}_{n-1}$ (см. (26)) будет поляра π точки A_0. Гиперповерхности V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ являются полярными относительно абсолюта Q_{n-1}.

Так как $A_0 \notin \pi$, то, рассматривая точки $B_i = A_i + x_i^0 A_0$, потребуем, чтобы они принадлежали поляре π точки A_0 (см. (15)): $g_{i0} + cx_i^0 = 0$. Отсюда находим $x_i^0 = -\frac{1}{c}g_{i0}$. Следовательно,

$$B_i = A_i - \frac{1}{c}g_{i0}A_0. \tag{29}$$

Таким образом, с полярной гиперповерхностью $\widetilde{V}_{n-1}$ связан текущий репер первого порядка $\widetilde{R} = \{B_n, B_i, B_0\} = \{B_{\overline{I}}\}$, где B_n и B_i имеют соответственно строения (26) и (29), а в качестве вершины B_0 примем A_0: $B_0 \equiv A_0$.

Деривационные формулы репера $\widetilde{R} = \{B_{\overline{K}}\}$ и уравнения структуры проективно-метрического пространства K_n (в репере $\widetilde{R}$) запишутся соответственно в виде

$$\begin{aligned} dB_{\overline{I}} &= \Omega_{\overline{I}}^{\overline{L}}B_{\overline{L}},\\ D\Omega_{\overline{K}}^{\overline{I}} &= \Omega_{\overline{K}}^{\overline{L}} \wedge \Omega_{\overline{L}}^{\overline{I}}, \end{aligned} \tag{30}$$

где формы $\Omega_{\overline{I}}^{\overline{K}}$ имеют строения

$$\begin{gathered} \Omega_0^n = \omega_0^n = 0, \quad \Omega_0^0 = 0, \quad \Omega_n^n = \omega_n^n - a_{sn}a^{sj}\omega_j^n,\\ \Omega_i^n = \omega_i^n, \quad \Omega_i^0 = -\frac{1}{c}a_{ij}\omega_0^j, \quad \Omega_n^i = -A_{nn}a^{is}\omega_s^n,\\ \Omega_j^i = \omega_j^i + a^{is}a_{sn}\omega_j^n - \frac{1}{c}g_{j0}\omega_0^i, \quad \Omega_n^0 = -\frac{A_{nn}}{c}\omega_0^n = 0. \end{gathered} \tag{31}$$

Отметим, что в силу соотношений (6) и (31) имеем $\Omega_{\overline{L}}^{\overline{L}} = 0$. В силу соотношений (30), (31) система форм $\{\Omega_n^k\}$ на гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ будет базисной: $\Omega_n^1 \wedge \cdots \wedge \Omega_n^{n-1} \neq 0$. Уравнение полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n в репере первого порядка $\widetilde{R} = \{B_{\overline{K}}\}$ имеет вид

$$\Omega_n^0 = 0. \tag{32}$$

Заметим, что согласно соотношениям (31), (32) справедливо

$$\Omega_i^n = -\frac{1}{A_{nn}}a_{is}\Omega_n^s, \quad \Omega_0^i = -\frac{1}{A_{nn}}\Lambda_n^{il}a_{ls}\Omega_n^s. \tag{33}$$

Трехкратное продолжение уравнений (32) с использованием соотношений (33) приводит к следующим дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов второго $\{V_{ij}^n\}$ и третьего $\{V_{ijk}^n\}$ порядков гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n:

$$\begin{gathered} \Omega_i^0 = V_{ij}^n\Omega_n^j, \quad V_{[ij]}^n = 0;\\ \widetilde{\nabla}V_{ij}^n + V_{ij}^n\Omega_0^0 = V_{ijk}^n\Omega_n^k, \quad V_{i[jk]}^n = 0;\\ dV_{ijk}^n + 2V_{ijk}^n\Omega_n^n - V_{s(ij}^n\Omega_{k)}^s = V_{ijks}^n\Omega_n^s,\\ V_{ij[ks]}^n = \frac{1}{A_{nn}}\{V_{i[k}^n a_{s]j} + V_{j[k}^n a_{s]i} - \Lambda_n^{lt}(V_{il}^n V_{j[k}^n a_{s]t} + V_{jl}^n V_{i[k}^n a_{s]t})\}. \end{gathered} \tag{34}$$

Отметим, что согласно уравнениям (34) и соотношениям (31) имеем

$$V_{ij}^n = \frac{1}{cA_{nn}}\Lambda_n^{lt}a_{il}a_{jt}. \tag{35}$$

Заметим, что с учетом последних соотношений выражения (33) перепишутся в виде $\Omega_i^n = -\frac{1}{A_{nn}} a_{is}\Omega_n^s$, $\Omega_0^i = -ca^{it}V_{ts}^n\Omega_n^s$.

Дифференцируя выражения (35), с использованием уравнений (10), (21), (28), (34) и соотношений (31) получим

$$V_{ijk}^n = \frac{1}{cA_{nn}^2}\{\Lambda_n^{sp}\Lambda_n^{qt}\Lambda_n^{lu}\Lambda_{pql}^n a_{is}a_{jt}a_{ku} - cA_{nn}V_{(ij}^n a_{k)n} + A_{nn}\Lambda_n^{st}g_{t0}a_{s(i}v_{j)k}^n\}. \tag{36}$$

Из уравнений (34) видно, что каждая из систем функций $\{V_{ij}^n\}$, $\{V_{ijk}^n\}$ образует симметричный тензор второго и третьего порядка соответственно.

Согласно выражениям (35) справедлива

Теорема 1. *При сделанных выше предположениях* (10), (24), (27) *полярная гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n является регулярной, т. е.* $V \stackrel{\text{def}}{=} |v_{ij}^n| \neq 0$.

В силу регулярности полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n можно ввести обращенный тензор V_n^{ij} второго порядка $V_n^{ik}V_{kj}^n = \delta_j^i$, $\widetilde{\nabla}V_n^{ij} = -V_n^{is}V_n^{tj}V_{stl}^n\Omega_n^l$, причем

$$V_n^{ij} = cA_{nn}a^{ik}a^{jt}\Lambda_{kt}^n. \tag{37}$$

Функция V есть относительный инвариант второго порядка

$$d\ln V + (n+1)\Omega_n^n = V_k\Omega_n^k,$$

где

$$V_k = V_n^{ji}V_{ijk}^n. \tag{38}$$

Продолжая последнее уравнение, имеем

$$\widetilde{\nabla}V_i + V_i\Omega_n^n = V_{ij}\Omega_n^j, \quad V_{[ij]} = 0;$$

следовательно, совокупность функций V_i образует тензор третьего порядка.

Заметим, что согласно соотношениям (38) с использованием равенств (36) и (37) имеем

$$V_k = \frac{1}{A_{nn}}(\Lambda_n^{st}A_s a_{kt} - (n+1)a_{kn}). \tag{39}$$

Уравнение гиперквадрики (абсолюта) Q_{n-1} проективно-метрического пространства K_n в репере $R = \{A_{\overline{K}}\}$ имеет вид (4). Запишем данное уравнение в репере $\widetilde{R} = \{B_{\overline{K}}\}$ (см. (26), (29)).

Известно [7], что связь между старыми $x^{\overline{I}}$ и новыми $y^{\overline{I}}$ проективными координатами точки $M \in Q_{n-1}$ имеет вид

$$\rho x^{\overline{I}} = c_{\overline{K}}^{\overline{I}}y^{\overline{K}},$$

где $\overline{K}$-й столбец матрицы $c_{\overline{K}}^{\overline{I}}$ состоит из координат вершин $B_{\overline{K}}$ нового репера $\widetilde{R}$ в старом репере R. В силу (26), (29) и $B_0 \equiv A_0$ имеем

$$c_{\overline{K}}^{\overline{I}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{g_{j0}}{c} & \frac{1}{c}\{a^{kt}g_{k0}a_{tn} - g_{n0}\} \\ 0 & \delta_j^i & -a^{ki}a_{kn} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, связь между старыми $x^{\overline{I}}$ и новыми $y^{\overline{I}}$ координатами точки $M \in Q_{n-1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} x^0 &= y^0 - \frac{g_{j0}}{c}y^j + \frac{1}{c}\{a^{kt}g_{k0}a_{tn} - g_{n0}\}y^n, \\ x^i &= y^i - a^{ik}a_{kn}y^n, \\ x^n &= y^n. \end{aligned}$$

Подставляя последние соотношения в уравнение (4), получаем уравнение абсолюта Q_{n-1} в новом репере $\widetilde{R} = \{B_n, B_i, B_0\} = \{B_{\overline{I}}\}$:

$$a_{ij}y^i y^j + A_{nn}(y^n)^2 + c(y^0)^2 = 0, \tag{40}$$

где $y^{\overline{K}}$ — координаты точек $\widetilde{M} \in Q_{n-1}$ в репере $\widetilde{R}$.

Согласно уравнениям (21)–(22), (24), выражению A_{nn} (см. (27)) и соотношениям (31) находим

$$da_{ij} - a_{ik}\Omega_j^k - a_{kj}\Omega_i^k = 0, \quad dA_{nn} - 2A_{nn}\Omega_n^n = 0. \tag{41}$$

Уравнения (41) являются (в репере $\widetilde{R}$) условием неподвижности абсолюта Q_{n-1} (см. (40)).

Вернемся к полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$. Следуя [4], в четвертой дифференциальной окрестности точки $B_n \in \widetilde{V}_{n-1}$ внутренним образом определяется поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик $\widetilde{Q}^2_{n-1}$:

$$V^n_{ij}y^i y^j + \frac{2V_i}{n+1}y^i y^0 + S_0(y^0)^2 = 2y^0 y^n, \tag{42}$$

где

$$S_0 = \frac{1}{n^2-1}V^{ij}_n\left(V_{ij} - \frac{V_iV_j}{n+1}\right) + \frac{1}{n-1}\left(cV^n_{ij}a^{ij} - \frac{1}{A_{nn}}V^{ij}_n a_{ij}\right).$$

Компоненты симметричного тензора Дарбу на регулярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n имеют вид

$$D^n_{ijk} \overset{\text{def}}{=} (n+1)V^n_{ijk} - V^n_{(ij}V_{k)}, \quad \widetilde{\nabla} D^n_{ijk} + D^n_{ijk}\Omega^n_n = D^n_{ijks}\Omega^s_n. \tag{43}$$

Аналогично работе [4] справедливо следующее: необходимым и достаточным условием вырождения регулярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n в гиперквадрику $\widetilde{Q}^2_{n-1}$ (см. (42)) является обращение в нуль симметричного тензора Дарбу (43).

Согласно соотношениям (13), (35), (36), (39), (43) компоненты симметричных тензоров Дарбу полярных регулярных гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n связаны равенствами

$$D^n_{ijk} = \frac{1}{cA^2_{nn}}\Lambda^{sp}_n\Lambda^{qt}_n\Lambda^{lv}_n a_{is}a_{jt}a_{kv}b^n_{pql}. \tag{44}$$

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Гиперповерхность V_{n-1} в K_n вырождается в гиперквадрику Q^2_{n-1} (см. (11)) тогда и только тогда, когда полярная ей (относительно абсолюта Q_{n-1}) гиперповерхность $\widetilde{V}_{n-1}$ вырождается в гиперквадрику $\widetilde{Q}^2_{n-1}$ (см. (42)).*

4. *Полярные нормализации гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n.* Оснащение в смысле А.П. Нордена [3] гиперповерхности V_{n-1} в K_n равносильно заданию на этом подмногообразии двух полей квазитензоров v^i_n, v_i:

$$\nabla v^i_n + \omega^i_n = v^i_{nj}\omega^j_0, \quad \nabla v_i + \omega^0_i = v_{ij}\omega^j_0, \tag{45}$$

определяющих соответственно поля нормалей первого $N_1 \equiv [A_0, N_n]$ и второго $N_{n-2} \equiv [N_i]$ родов на гиперповерхности V_{n-1} в K_n; здесь $N_n = A_n + v^i_n A_i$, $N_i = A_i + v_i A_0$.

Для системы функций

$$E_i(v) = \frac{p_i}{n+1} - v_i + \Lambda^n_{is}v^s_n \tag{46}$$

в силу уравнений (9), (12), (45) имеем

$$\nabla E_i = E_{ij}\omega^j_0, \quad E_{[ij]} = \frac{A_{[i}g_{j]0}}{c(n+1)} - v_{[ij]} + \frac{v^s_n\Lambda^n_{s[i}g_{j]0}}{c} - v^s_{n[i}\Lambda^n_{j]s}.$$

Обращение в нуль тензора $E_i(v)$ есть условие, при котором нормализация $\{v_n^i, v_i\}$ гиперповерхности V_{n-1} в K_n является взаимной [3] относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (11).

Поля квазитензоров четвертого порядка [1]

$$F_n^i = \frac{1}{2}\Lambda_n^{ik}\Big(C_k - \frac{p_k}{n+1} - \frac{g_{k0}}{c}\Big), \quad F_i = \frac{1}{2}\Big(C_i + \frac{p_i}{n+1} - \frac{g_{i0}}{c}\Big) \tag{47}$$

на гиперповерхности V_{n-1} в K_n определяют инвариантные нормали Фубини первого и второго родов соответственно.

Отметим, что функции C_k входят в дифференциальное уравнение

$$d\ln C_n - \omega_n^n = C_k\omega_0^k \tag{48}$$

ненулевого относительного инварианта C_n третьего порядка

$$C_n = \Lambda_n^{ij}\Lambda_n^{st}\Lambda_n^{kl}b_{isk}^n b_{jtl}^n.$$

Дифференциальные уравнения функций C_i имеют вид $\nabla C_i + \Lambda_{ij}^n\omega_n^j = C_{ij}\omega_0^j$.

Нормализация Фубини (F_n^i, F_i) регулярной гиперповерхности V_{n-1} является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (11), т. к. $E_i(F) = 0$.

Оснащение в смысле А.П. Нордена [3] полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n равносильно заданию на этом многообразии двух полей тензоров v_0^i, v_i^n:

$$dv_0^i - v_0^i\Omega_0^0 + v_0^t\Omega_t^i = v_{0j}^i\Omega_n^j, \quad dv_i^n - v_t^n\Omega_i^t + v_i^n\Omega_n^n = v_{ij}^n\Omega_n^j,$$

определяющих соответственно поля нормалей первого $\widetilde{N}_1 \equiv [B_n, \widetilde{N}_0]$ и второго $\widetilde{N}_{n-2} \equiv [\widetilde{N}_i]$ родов на гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$; здесь $\widetilde{N}_0 = B_0 + v_0^i B_i$, $\widetilde{N}_i = B_i + v_i^n B_n$.

Нормаль первого рода гиперповерхности V_{n-1} инцидентна точкам A_0 и $N_n = A_n + v_n^i A_i$. Поляры этих точек относительно абсолюта Q_{n-1} (см. (4)) определяются соответственно уравнениями

$$g_{I0}x^I + cx^0 = 0, \quad a_{Kj}x^K v_n^j + a_{Kn}x^K + \frac{1}{c}(g_{K0}x^K + cx^0)(g_{j0}v_n^j + g_{n0}) = 0,$$

т. е. поляра прямой $[A_0, N_n]$ есть $(n-2)$-мерная плоскость, принадлежащая касательной гиперплоскости полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в соответствующей точке $B_n \in \widetilde{V}_n$; уравнение этой $(n-2)$-мерной плоскости определяется системой

$$g_{I0}x^I + cx^0 = 0, \quad a_{Ik}x^I v_n^k + a_{In}x^I = 0. \tag{49}$$

Так как нормаль второго рода гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ определяется точками $\widetilde{N}_i = B_i + v_i^n B_n$, то согласно соотношениям (26) и (29) получаем

$$\widetilde{N}_i = \Big(-\frac{1}{c}g_{i0} + \frac{1}{c}v_i^n\{g_{t0}a_{sn}a^{st} - g_{n0}\}\Big)A_0 + (\delta_i^j - a^{js}a_{sn}v_i^n)A_j + v_i^n A_n.$$

Потребуем, чтобы $(n-2)$-мерная плоскость (49) задавала нормаль второго рода гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$; для этого координаты точек $\widetilde{N}_i$ должны удовлетворять системе уравнений (49), что имеет место в случае выполнения соотношений

$$v_i^n = -\frac{1}{A_{nn}}(a_{ik}v_n^k + a_{in}). \tag{50}$$

Таким образом, при полярном (относительно абсолюта Q_{n-1}) отображении нормаль первого рода v_n^i гиперповерхности V_{n-1} в K_n переходит в нормаль второго рода v_i^n полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n, определяемую квазитензором (50).

Аналогично, нормаль второго рода v_i гиперповерхности V_{n-1} при полярном отображении переходит в нормаль первого рода v_0^i полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$, причем

$$v_0^i = -a^{ik}(g_{k0} + cv_k). \tag{51}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 3. *Нормализация в смысле А.П. Нордена одной из полярных гиперповерхностей V_{n-1} или $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n равносильна нормализации другой; при этом нормаль первого (второго) рода v_n^i (v_i) гиперповерхности V_{n-1} полярна (относительно абсолюта Q_{n-1}) нормали второго (первого) рода v_i^n (v_0^i) гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$, причем оснащающие объекты (v_n^i, v_i) и (v_0^i, v_i^n) связаны соотношениями* (50), (51).

Нормализации взаимных гиперповерхностей V_{n-1} и $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n полями объектов (v_n^i, v_i) и (v_0^i, v_i^n) соответственно, связанные между собой соотношениями (50) и (51), назовем *полярными* по отношению друг к другу.

Рассмотрим систему функций

$$\widetilde{E}_i(v) = \frac{V_i}{n+1} - v_i^n + V_{is}^n v_0^s, \quad \widetilde{\nabla}\widetilde{E}_i = \widetilde{E}_{ij}\Omega_n^j, \quad \widetilde{E}_{[ij]} = -v_{[ij]}^n - v_{0[j}^s V_{j]s}^n. \tag{52}$$

Обращение в нуль тензора $\widetilde{E}_(v)$ есть условие, при котором нормализация (v_0^i, v_i^n) гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (42).

Заметим, что согласно соотношениям (35), (39), (46), (50)–(52) получим $\widetilde{E}_i(v) = \frac{1}{A_{nn}}\Lambda_n^{st} a_{it} E_s(v)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Нормализация регулярной гиперповерхности V_{n-1} в K_n взаимна относительно поля соприкасающихся гиперквадрик Q_{n-1}^2 (см. (11)) тогда и только тогда, когда взаимна относительно поля соприкасающихся гиперквадрик $\widetilde{Q}_{n-1}^2$ (см. (42)) полярная относительно абсолюта Q_{n-1} нормализация регулярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$.*

В четвертой дифференциальной окрестности определяются поля нормалей Фубини первого и второго родов

$$\Phi_0^i \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2} V_n^{ik}\Big(\widetilde{C}_k - \frac{V_k}{n+1}\Big), \quad \Phi_i^n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\Big(\widetilde{C}_i + \frac{V_i}{n+1}\Big), \tag{53}$$

где функции $\widetilde{C}_i$ входят в дифференциальное уравнение

$$d\ln\widetilde{C}_n + \Omega_n^n = \widetilde{C}_i\Omega_n^i \tag{54}$$

ненулевого относительного инварианта

$$\widetilde{C}_n = V_n^{ij} V_n^{st} V_n^{kl} D_{isk}^n D_{jtl}^n. \tag{55}$$

Дифференциальные уравнения функций $\widetilde{C}_i$ имеют вид $d\widetilde{C}_i - \widetilde{C}_j\Omega_i^j + \widetilde{C}_i\Omega_n^n = \widetilde{C}_{ij}\Omega_n^j$.

Согласно соотношениям (50) и (51) можно получить поля нормалей F_0^i и F_i^n полярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n, полярные относительно абсолюта (4) полям нормалей Фубини гиперповерхности V_{n-1} в K_n (см. (47)):

$$F_0^i = -a^{ik}(g_{k0} + cF_k), \quad F_i^n = -\frac{1}{A_{nn}}(a_{ik}F_n^k + a_{in}). \tag{56}$$

Согласно равенствам (31), (35), (44), (48), (54), (55) имеем

$$\widetilde{C}_i = -\frac{1}{A_{nn}}(C_j\Lambda_n^{jk} a_{ik} + a_{in}). \tag{57}$$

Рассматривая соотношения (35), (39), (53), (56), (57), получим $F_0^i = \Phi_0^i$, $F_i^n = \Phi_i^n$.

Следовательно, доказана

Теорема 5. *Нормализация гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n, полярная (относительно абсолюта Q_{n-1} пространства K_n) нормализации Фубини исходной гиперповерхности V_{n-1}, является ее нормализацией Фубини полями нормалей* (53) *или, что то же самое, полями нормалей* (56).

Согласно теореме 4 нормализация Фубини (F_0^i, F_i^n) регулярной гиперповерхности $\widetilde{V}_{n-1}$ в K_n является взаимной относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (52).

Литература

1. Столяров А.В. *Двойственная теория оснащенных многообразий.* – Чебоксары, 1994. – 290 с.
2. Фиников С.П. *Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии.* – М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. – 432 с.
3. Норден А.П. *Пространства аффинной связности.* – М.: Наука, 1976. – 432 с.
4. Лаптев Г.Ф. *Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований* // Тр. Московск. матем. о-ва. – 1953. – Т. 2. – С. 275–382.
5. Столяров А.В. *Внутренняя геометрия проективно-метрического пространства* // Дифференц. геометрия многообразий фигур. – Калининград, 2001. – Вып. 32. – С. 94–101.
6. Cartan E. *Les espaces á connexion protective* // Тр. семин. по векторн. и тензорн. анализу. – МГУ. – 1937. – Вып. 4. – С. 147–159.
7. Ефимов Н.В. *Высшая геометрия.* – М.: ГИТТЛ, 1961. – 580 с.

Чувашский государственный
педагогический университет

Поступили
первый вариант 28.11.2001
окончательный вариант 13.10.2002